K-II BLOKEA: Aldagai bakarreko funtzioen izate-eremua, mutur erlatiboak eta adierazpen grafikoa

1. ARIKETA:

Kalkulatu ondoko funtzioen izate-eremua:

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+x-2}}\right)$

b) $f(x)=\dfrac{\arcsin(x)}{x^2+2x-3}$

Ebazpena:

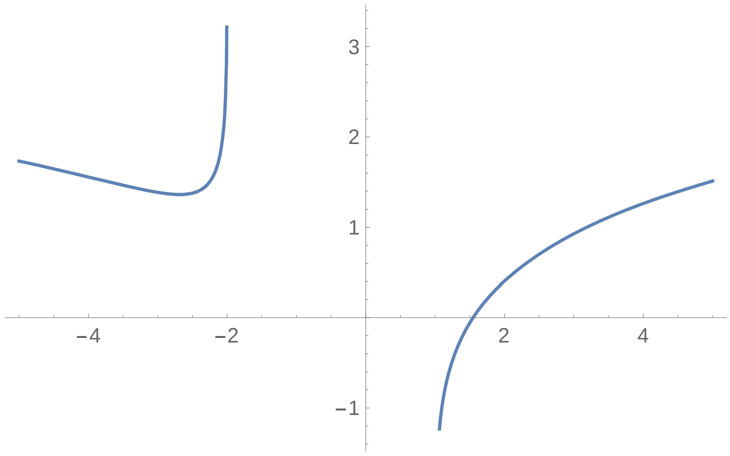
a) Logaritmoaren argumentua positiboa izan behar da, beraz:

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+x-2}}>0\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}x^2-1>0\\ \sqrt{x^2+x-2}>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2>1\\ x^2+x-2>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}|x|>1\rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty,)\\ (x-1)(x+2)>0\rightarrow *\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-1<0\\ \sqrt{x^2+x-2}<0\end{cases}\rightarrow \text{Ezinezkoa } (\text{x}^2\text{+x-2 positiboa izan behar da})\end{cases}$$

$$*\ (x-1)(x+2)>0\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}(x-1)>0\rightarrow x>1\\ (x+2)>0\rightarrow x>-2\end{cases}\rightarrow x\in(1,\infty)\\ \begin{cases}(x-1)<0\rightarrow x<1\\ (x+2)<0\rightarrow x<-2\end{cases}\rightarrow x\in(-\infty,-2)\end{cases}$$

Beraz, izate-eremua $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\in(-\infty,-2)\cup(1,\infty)\}$ da.

Funtzioaren adierazpen grafikoa:



b) Alde batetik, arku sinuaren argumentua $[-1,1]$ tartean egon behar da, beraz:

$$-1 \le x \le 1 \rightarrow x \in [-1,1]$$

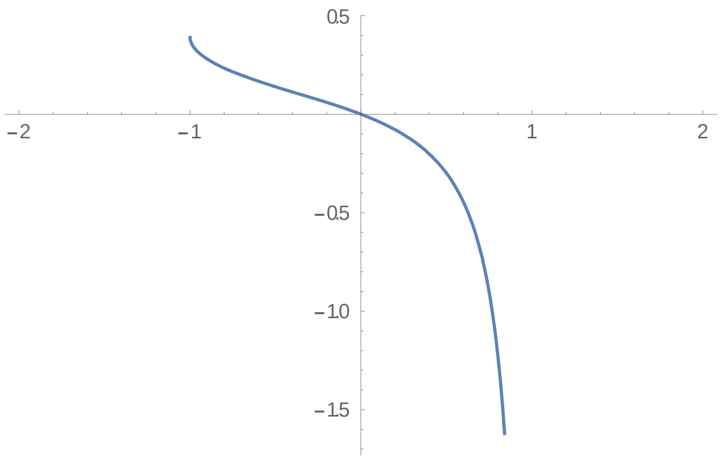
Beste aldetik, zatiduraren izendatzailea ez-nulua izan behar da, beraz:

$$x^2 + 2x - 3 \neq 0$$
$$(x-1)(x+2) \neq 0 \rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq -2$$

Orduan funtzioaren izate-eremua hurrengoa da:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in [-1,1)\}$$

Funtzioaren adierazpen grafikoa:



2. ARIKETA:

Izan bedi $f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$ funtzioa:

a) Mutur erlatiboak kalkulatu

b) [0,3] tartean mutur absolutuak kalkulatu.

Ebazpena:

a) Hasteko, funtzioaren deribatua kalkulatuko dugu:

$$f'(x)=1\cdot x^{2/3}+(x-2)\frac{2}{3}x^{-1/3}=x^{2/3}+\frac{2(x-2)}{3x^{1/3}}=\frac{3x+2(x-2)}{3x^{1/3}}=\frac{5x-4}{3x^{1/3}}$$

Orain puntu kritikoak kalkulatuko ditugu:

$$\begin{cases} f'(x)=0 \to 5x-4=0 \to x=4/5 \\ \nexists f'(x) \to 3x^{1/3} \to x=0 \end{cases}$$

Deribatuaren zeinua aztertuz, puntu kritikoak sailkatuko ditugu:

$(-\infty,0)$ tartean $\to f'(x)=\dfrac{(-)}{(-)}>0$

$(0,4/5)$ tartean $f'(x)=\dfrac{(-)}{(+)}<0$

$(4/5,\infty)$ tartean $\to f'(x)=\dfrac{(+)}{(+)}>0$

$x=0$ puntuan deribatuaren zeinua positibotik negatibora aldatzen da, beraz **maximo** bat da.

$x=4/5$ puntuan deribatuaren zeinua negatibotik positibora aldatzen da, beraz **minimo** bat da.

Mutur absolutuak [0,3] tartean:

Funtzioaren balioak $x=0$ eta $x=3$ puntuetan kalkulatuko ditugu:

$$f(0)=0$$

$$f(3)=2.08008>f(0)=0$$

Puntu kritikoetan, funtzioaren balioak hurrengoak dira:

$$f(0)=0$$

$$f(4/5)=-1.034$$

Beraz, **maximo absolutua** $x=3$ da eta **minimo absolutua** $x=4/5$ da.

Funtzioaren adierazpen grafikoa: