K-IV BLOKEA-Funtzioen deribagarritasuna eta oinarrizko deribatuen kalkulua: Funtzio konposatuak

Itxura konplexuko funtzio batzuk beste funtzio sinpleagoren konposizio gisan idatz daitezke. Esate baterako, hartu kontuan

$$f(x) = \cos(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

formulak definituriko funtzioa. Aintzat hartu, ere, hurrengo bi funtzio hauek:

$$g(x) = \cos x, \quad h(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Orduan, f funtzioa beste bi funtzioen konposizioa da, hau da:

$$f(x) = g(h(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hurrengo eskema honetan konposizioaren funtzionamendua deskribatzen da aurreko adibiderako:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "h"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto x^2 \longmapsto \cos(x^2)$$

Bi funtzioren konposizioa deribatzeko *katearen erregela* aplikatzen da:

$$\boxed{f(x) = g(h(x)) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))}$$

baldin h funtzioa x puntuan deribagarria bada eta baldin g funtzioa $h(x)$ puntuan deribagarria bada.

1. Adibidea:

Kalkula dezagun $f(x) = \cos(x^2)$ funtzioaren deribatua. Goian ikusi dugunez, $f(x) = g(h(x))$ dugu, non g kosinu funtzioa eta $h(x) = x^2$ baitira. Bi funtzio horiek deribagarriak dira puntu guztietan, eta

$$g'(x) = -\sin x, \quad h'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dugu. Ondorioz, katearen erregela erabiliz,

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x)) = -2x\sin(x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Adibidea:

Deriba dezagun, orain, $\psi(x) = \mathrm{Ln}(\sin^2(\mathrm{x}) + 1)$ formulak definituriko funtzioa. $u(x) = \sin^2(x) + 1$ funtzioa definituz, badaukagu $\psi(x) = Ln(u(x))$, non

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "u"'] \arrow[rr, bend left, "\psi"] & (0,\infty) \arrow[r, "Ln"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

dugun. Nabari ezazu u-ren irudiak $(0,\infty)$ tartean daudela, hain zuzen ere, logaritmo funtzioaren izate eremua. $Ln'(x) = 1/x$ izanik $x > 0$ guztietarako, katearen erregelaz, badaukagu

$$\psi'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \tag{1}$$

dela. Orain, $u(x) = 1 + \sin^2(x)$ funtzioaren deribatua kalkulatu behar dugu. $h(x) = 1 + x^2$ definituz, badaukagu $u(x) = h(\sin(x))$ dela, hau da, honako konposizio hau:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\sin"'] \arrow[rr, bend left, "u"] & \mathbb{R} \arrow[r, "h"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Beraz, $\sin'(x) = \cos x$ eta $h'(x) = 2x$ izanik $\forall x \in \mathbb{R}$, badaukagu

$$u'(x) = \cos x \cdot h'(\sin x) = \cos x \cdot 2\sin x = \sin(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

eta (1) formulan ordezkatuz,

$$\psi'(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x) + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$