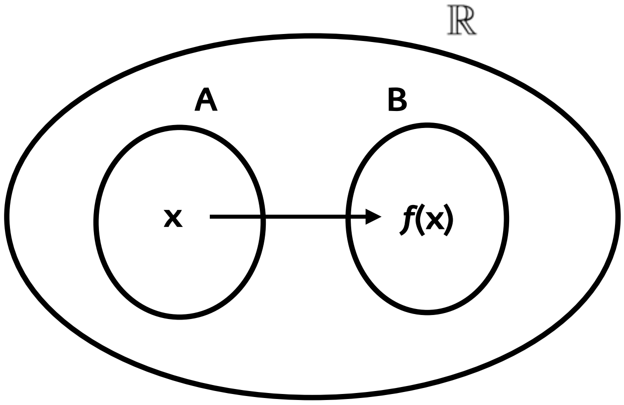
K-II BLOKEA: Aldagai bakarreko funtzioen izate-eremua, mutur erlatiboak eta adierazpen grafikoa

IZATE-EREMUA

Hurrengo irudiaren transformazioa, f , A multzoko puntuak B multzora eramaten ditu. A multzoari f funtzioaren izate-eremua deritzogu, hau da, $D(f)$.



Erregela moduan, funtzio baten izate-eremua aldagai askearen balioak dira zeinetarako funtzioa existitzen den. $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\in\mathbb{R}\}$

Praktikoki, funtzio baten izate-eremua kalkulatzeko, lehenengo funtzio-mota desberdinetan sailkatzen da. Hurrengoan, mota bakoitzeko izate-eremua adierazten da:

a) Polinomioak:

Haien izate-eremua $\mathbb{R}$ osoa da, beraz $D(f)=(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$ adierazten da.

b) Zatiketak:

Zenbakitzailea eta izendatzailearen izate-eremu bakoitza bere aldetik kalkulatu behar da eta zatiketaren ekarpena izendatzailea baliogabetzen duten puntuak eremutik kentzea izango da.

Adibidea:

$$f(x)=\frac{3x^2-4}{x^2-9};\ D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-9\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-3,3\}=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$$

c) Erroak:

Indize bikoitiko erroa: Erroaren barruko funtzioa positiboa edo zero denean, hau da,

$$D\left(\sqrt[2n]{f(x)}\right)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\geq 0\},n\in\mathbb{N}$$

Adibidea: $f(x)=\sqrt{x^2-4};\,D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-4\geq 0\}=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

Indize bakoitiko erroa: Erroaren barruko funtzioaren izate-eremua da, hau da,

$$D\left(\sqrt[2n+1]{f(x)}\right)=D(f(x)),n\in\mathbb{N}$$

Adibidea: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4};\,D(f)=D\left(x^2-4\right)=\mathbb{R}$

d) Logaritmoak:

Logaritmoaren barruko funtzioa positiboa denean, hau da,

$$D(\log_a f(x))=\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)>0\}$$

Adibidea: $f(x)=\ln(x^2-4);\,D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-4>0\}=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

e) Berredurak:

Berreduraren funtzioaren izate-eremua da, hau da,

$$D\left(a^{f(x)}\right)=D(f(x)),\,a>0$$

Adibidea: $f(x)=e^{\sqrt{x}};\,D(f)=D\left(\sqrt{x}\right)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq 0\}=[0,\infty)$

f) Trigonometrikoak:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin(x) \\ f(x)=\cos(x) \end{array}\right\} D(f)=\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\operatorname{tg}(x) \\ f(x)=\sec(x) \\ f(x)=\operatorname{cosec}(x) \\ f(x)=\operatorname{ctg}(x) \end{array}\right\} \text{zatiketa moduan aztertzen dira eta } D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,\text{izendatzailea}\neq 0\}$$

Adibidea: $f(x)=\operatorname{tg}(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)};\,D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,\cos(x)\neq 0\}=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\},\forall k\in\mathbb{Z}$

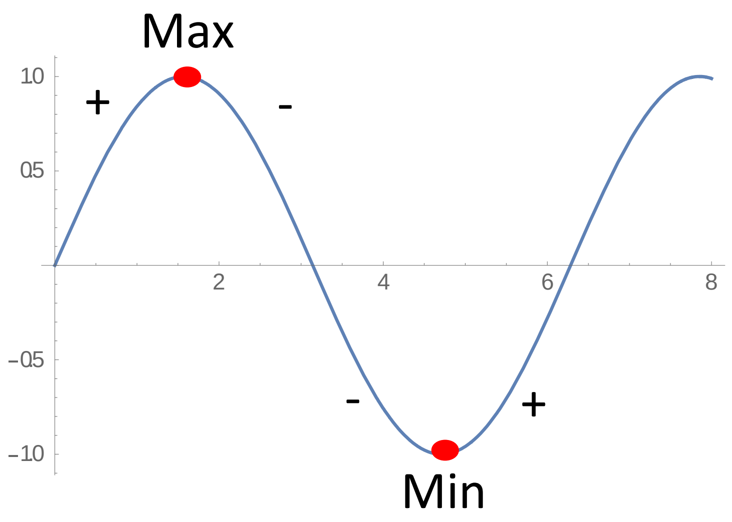
MUTUR ERLATIBOAK

Funtzio baten mutur erlatiboak aztertu baino lehen, bere izate-eremua ezagutu behar da eta hor funtzioa jarraitua eta deribagarria izan behar da (zatika jarraitua edota deribagarria izan daiteke).

Analitikoki, funtzio baten gorakortasuna edo beherakortasuna jakiteko hurrengo erregela erabil dezakegu: x_0 puntu batean funtzioa gorakorra dela diogu bere deribatua puntu horretan positiboa bada, eta beherakorra, aldiz, negatiboa bada.

$$\text{Gorakorra: } f'(x_0) > 0$$
$$\text{Beherakorra: } f'(x_0) < 0$$

Orduan, x_0 puntu bat maximo erlatiboa izango da baldin bere inguru txiki batean funtzioa gorakorra izatetik beherakorra izatera pasatzen bada. Alderantziz, x_0 puntu bat minimo erlatiboa izango da baldin bere inguru txiki batean funtzioa beherakorra izatetik gorakorra izatera pasatzen bada. Hurrengo irudian hori azaltzen da.



Beraz, praktikoki, mutur erlatiboak aurkitzeko deribatuaren zeinuaren aldaketa aztertu beharko da. Izan ere, irudiaren mutur erlatiboetan erraz identifikatzen da deribatua zero dela.

Irizpide moduan, hurrengoa erabil daiteke:

$$f'(x_0) = 0 \rightarrow \begin{cases} f''(x_0) < 0 \rightarrow \text{Maximo erlatiboa} \\ f''(x_0) > 0 \rightarrow \text{Minimo erlatiboa} \end{cases}$$

Hasieran esan dugunez, lehendik funtzioa (zatika) deribagarria izan behar da. Baina, kasu partikular batean, puntu kritiko batean deribatua definituta ez egotea gerta daiteke. Hurrengo irudian ikus dezakegu π eta 2π puntuetan deribatua ez dela existitzen. Baina deribatuaren zeinuaren aldaketaren irizpidearen bidez, bietan minimo erlatibo bat daukagula ondoriozta dezakegu.