4. GAIA: ARIKETA EBATZIAK

1. Ikasle batek etxetik unibertsitateraino iristeko behar duen denbora uniformeki aldatzen da 35 eta 45 minutu artean. Zein ordutan atera behar da etxetik gutxienez 0,8ko probabilitatearekin klasera garaiz iristeko, klaseak goizeko 8tan hasten badira?

$X =$ "Etxetik unibertsitatera bidean pasatzen diren minutuak"
Aldagaiak banaketa uniformea jarraitzen du.

$$P(X \leq x) \geq 0{,}8 \Rightarrow \frac{x-35}{45-35} \geq 0{,}8 \Rightarrow x \geq 43$$

Beraz, etxetik 7:17tan edo lehenago ateratzen bada ikaslea, klasera garaiz iristeko probabilitatea 0,8 edo handiagoa izango da.

2. Denda batean, bezero batetik hurrengo bezeroa sartu arte itxaron behar den denbora era esponentzialean banatzen da batezbestekoa 5 minutu izanik. Kalkulatu hurrengo bezeroa sartu arte 8 eta 10 minutu bitartean itxaron behar izateko probabilitatea.

X :'Hurrengo bezeroa sartu arte itxaron beharreko minutuak'

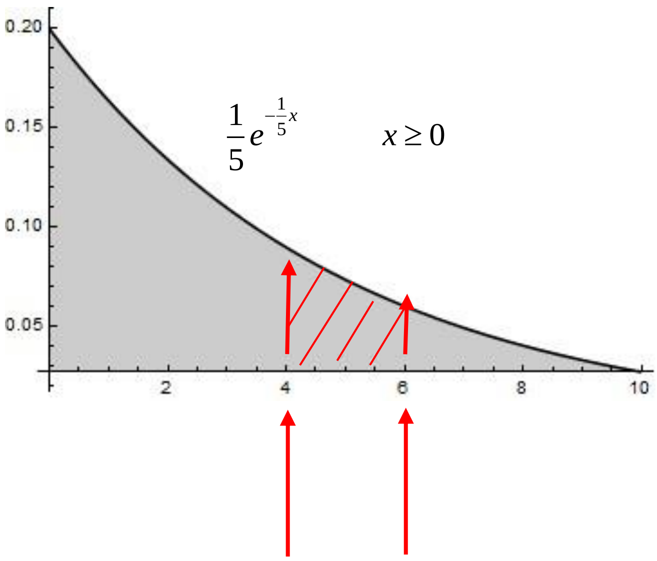
$$E(X)=5=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{5}$$

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} & x\geq 0 \quad \wedge \quad \lambda>0\\ 0 & \text{beste kasuetan}\end{cases}$$

$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{5}x} & x\geq 0\\ 0 & \text{beste kasuetan}\end{cases}$$

$$P(4\leq X\leq 6)=P(X\leq 6)-P(X\leq 4)$$

Tarte bateko probabilitatea kalkulatzeko eskatzen da ariketan. Grafikoan agertzen den azalera hori kalkulatzeko hauxe da egin beharrekoa



$$P(4\leq X\leq 6)=\left(1-e^{-\frac{1}{5}\cdot 6}\right)-\left(1-e^{-\frac{1}{5}\cdot 4}\right)=0{,}148$$

3. Konfitura-pote bat 'almibar' bezala kalifika daiteke azukreko kantitatea 420 eta 520 g artean badago. Fabrikatzaileak konfitura-potoak aztertzerakoan batezbesteko pisua 465 g-koa dela ikusten du, desbideratze tipikoa 30 g izanik. Azukreko pisuak banaketa normal bati jarraitzen diola jakinik,
   a) Fabrikatzailearen ekoizpenaren zein portzentaia ezin da 'almibar' bezala etiketatu?
   b) Zeintzuk dira finkatu behar ditugun bi balio zentralak beraien artean potoen %50a egon dadin?

X : 'Konfitura-potoan dagoen azukre kantitatea g-tan.'

$420 \leq X \leq 520 \rightarrow$ 'Almibar' bezala izendatu daiteke konfitura-potoa

X<420 eta X>520 $\rightarrow$ Konfitura-potoa ezin da 'Almibar' bezala izendatu

$E(X) = 465$ eta $\sigma = 30$ $\quad$ $X \sim N(465;30)$

a)

Bi modutara kalkulatuko dugu:

1)

$$P(420 \leq X \leq 520) = P(X \leq 520) - P(X \leq 420)$$

$$Z = \frac{x-465}{30}$$

$$P(420 \leq X \leq 520) = P(Z \leq \frac{520-465}{30}) - P(Z \leq \frac{420-465}{30}) = P(Z \leq 1,83) - P(Z \leq -1,5)$$

$P(Z \leq 1,83) = 0,9664$ Balio hau banaketa normal tipifikatuaren taulan aurkitu dugu

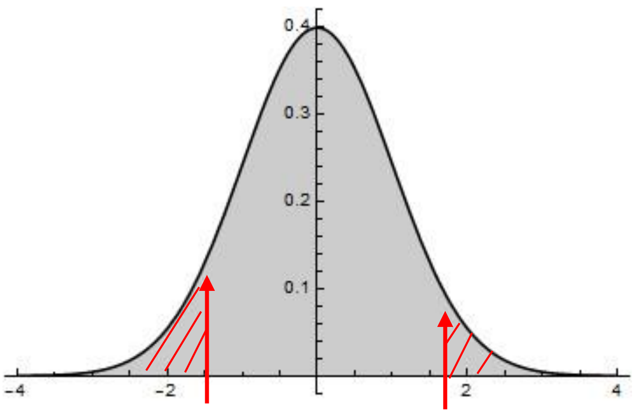
$P(Z \leq -1,5)$ Gure taulan ez daukagu balio negatiborik, beraz simetria aplikatu behar dugu

$$P(Z \leq -1,5) = P(Z \geq 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

$$P(420 \leq X \leq 520) = P(Z \leq 1,83) - P(Z \leq -1,5) = 0,9664 - 0,0668 = 0,8996$$

$$1 - P(420 \leq X \leq 520) = 0,1004$$

Beraz % 10,04a ezin da 'almibar' bezala etiketatu.



Banaketa normal tipifikatua

Eskatzen diguten probabilitatea azalera gorria da. Kurbaren azpian dagoen azalera guztiak 1 balio duenez, kalkulaturiko tarteko probabilitatea kendu behar diogu azalera gorria lortzeko.

2)

$P(X \geq 520) + P(X \leq 420)$

$Z = \dfrac{x - 465}{30}$

$P(X \geq 520) + P(X \leq 420) = P(Z \geq \dfrac{520 - 465}{30}) + P(Z \leq \dfrac{420 - 465}{30}) = P(Z \geq 1,83) + P(Z \leq -1,5)$

$P(Z \geq 1,83)$ Banaketa normal tipifikatuaren taulan dauzkagun balioak $P(Z \leq z)$ dira. Beraz simetria aplikatu behar dugu eta balioa taulan begiratu.

$P(Z \geq 1,83) \ = 1 - P(Z \leq 1,83) = 1 - 0,9664 = 0,0336$

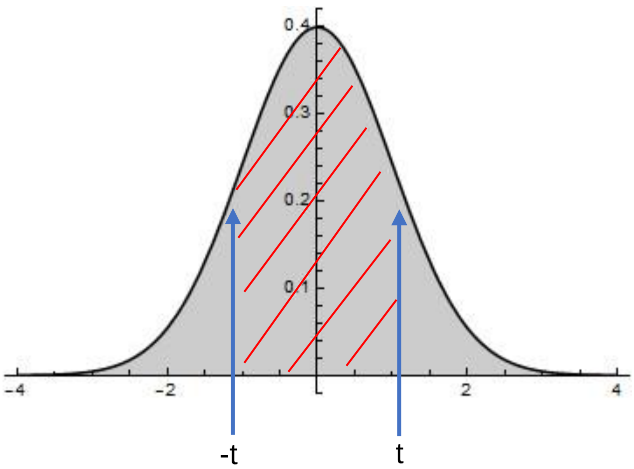
$P(Z \leq -1,5)$ Gure taulan ez daukagu balio negatiborik, beraz simetria aplikatu behar dugu

$P(Z \leq -1,5) = P(Z \geq 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$

$P(X \geq 520) + P(X \leq 420) = P(Z \geq 1,83) + P(Z \leq -1,5) = 0,0336 - 0,0668 = 0,1004$

Beraz % 10,04a ezin da 'almibar' bezala etiketatu.

b)



Atal honetan, *b* eta *a* balio zentralak kalkulatzeko eskatzen da (aldagai aldaketa egin eta gero banaketa normal tipifikatua erabiltzeko -t eta t. Bakoitza, banaketaren batezbestekoaren distantzia berdinera dago. Ematen diguten datua da haien arteko azalera gorria %50ekoa izan behar dela.

Banaketa normal tipifikatua

Banaketa normal tipifikatua erabiliko dugu:

$$P(b \le X \le a) = P(X \le a) - P(X \le b)$$

$$Z = \frac{x-465}{30}$$

Atal hau ebazteko simetria aplikatuko dugu behin eta berriz:

$$P(b \le \mathrm{X} \le a) = P(-t \le Z \le t) = P(Z \le \frac{a-465}{30}) - P(Z \le \frac{b-465}{30}) = P(Z \le t) - P(Z \le -t)$$

$$P(b \le \mathrm{X} \le a) = P(Z \le t) - P(Z \le -t) = P(Z \le t) - P(Z \ge t) =$$

$$P(Z \le t) - \left(1 - P(Z \le t)\right) = -1 + 2P(Z \le t) = 0,5 \Rightarrow P(Z \le t) = 0,75$$

Banaketa normal tipifikatuaren taulan ikusten dugu t-ren zein baliotarako probabilitatea 0,75 den.

$$P(Z \le t) = 0,75 \Rightarrow t = 0,68$$

$$t = \frac{a-465}{30} \Rightarrow a = 485,4 \quad \text{eta}$$

$$-t = \frac{b-465}{30} \Rightarrow b = 444,6$$

Beraz a eta b puntu zentralak 485,4 eta 444,6 izango dira.

4. Fabrika batean bi pieza mota ekoizten dira: bat material berriztagarriekin egina dago eta bestea petroliotik eratorritako lehengaiekin.
   a) %2-a akastuna bada, zein da 100 pieza aukeratzerakoan gehienez 3 akastun egoteko probabilitatea?
   b) %40-a material berriztagarrietan oinarrituriko piezak dira. Zein da 600 pieza aukeratzerakoan 352 pieza edo gehiago petroliotik eratorritako lehengaiekin egindako piezak izatearen probabilitatea?

a)

X : 'akastun pieza kopurua'

n=100; p=0,02 $\quad$ $X \sim B(100;0{,}02)$

$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$$P(X \leq 3) = \binom{100}{0} 0{,}02^0 (1-0{,}02)^{100-0} + \binom{100}{1} 0{,}02^1 (1-0{,}02)^{100-1} + \binom{100}{2} 0{,}02^2 (1-0{,}02)^{100-2} + \binom{100}{3} 0{,}02^3 (1-0{,}02)^{100-3} = 0{,}8589$$

$P(X \leq 3) = 0{,}8589$

b)

X : 'petroliotik eratorritako lehengaiekin egindako pieza kopurua'

n=600; p=0,6 $\quad$ $X \sim B(600;0{,}6)$

$P(X \geq 352)$ kalkulua egiteko banaketa binomiala banaketa normalaren bitartez hurbiltzen da. Bestela batugai ugari kalkulatu beharko genituzke. Aztertuko dugu ea banaketa normalarekin hurbiltzeko baldintzak betetzen diren.

n=600>30

np=$360 \geq 5$

nq=$240 \geq 5$

Baldintza betetzen da beraz hurbilketa egin daiteke.

$$X \sim B(600;0{,}6) \cong X \sim N(\mu\text{=np};\sigma^2\text{=npq})=N(\mu=600 \cdot 0{,}6;\sigma^2=600 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4)=N(\mu=360;\sigma^2=144)$$

$P(X_{diskretua} \geq 352)=P(X_{jarraitua} \geq 351{,}5)$

$$P(X_{diskretua} \geq 352)=P(X_{jarraitua} \geq 351{,}5) = P(Z \geq \frac{351{,}5-360}{12})=P(Z \geq -0{,}71)$$

$P(Z \geq -0{,}71)=P(Z \leq 0{,}71)$ banaketa normalaren taulan begiratuz balioa

$P(Z \leq 0{,}71) = 0{,}7611$

$P(X_{diskretua} \geq 352)=P(X_{jarraitua} \geq 351{,}5) = 0{,}7611$