1. GAIA: ARIKETA EBATZIAK

1. X zorizko aldagai jarraitu bat da non bere batezbestekoa E(X) den eta bere bariantza $\sigma_x{}^2$. Kalkulatu Y zorizko aldagaiaren batezbestekoa eta bariantza jakinik Y=aX+b dela.

$E(Y)$?

$\sigma_y{}^2$?

$$E(Y) = E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)\,\mathrm{f}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} ax\,\mathrm{f}(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} b\,\mathrm{f}(x)dx = a\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{f}(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x)dx =$$

$$= aE(X) + b$$

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$\sigma_y^2 = E(Y - E(Y))^2 = E((aX + b) - (aE(X) + b))^2$$

$$\sigma_y^2 = E(aX + b - aE(X) - b)^2 = E(aX - aE(X))^2 = aE(X - E(X))^2 = a\sigma_x^2$$

$$\sigma_y^2 = a\sigma_x^2$$

2. Zorizko aldagaiak honako balio diskretuak har ditzake: {2,3,7,8,10}. Jakinik gertaera guztiak ekiprobableak direla (hau da, gertaera guztiek probabilitate bera dute), kalkulatu lehen eta bigarren mailako zentratu gabeko momentuak, batezbestekoan zentraturiko momentuak eta, aplikazio puntua 4 izanik, momentu absolutuak.

$$\alpha_1 = E(X)^1 = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 7 \cdot \frac{1}{5} + 8 \cdot \frac{1}{5} + 10 \cdot \frac{1}{5} = 6 \qquad \alpha_1 = 6$$

$$\alpha_2 = E(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 p(x_i) = 2^2 \cdot \frac{1}{5} + 3^2 \cdot \frac{1}{5} + 7^2 \cdot \frac{1}{5} + 8^2 \cdot \frac{1}{5} + 10^2 \cdot \frac{1}{5} = 45,2 \qquad \alpha_2 = 45,2$$

$$\mu_1 = E(X - E(X))^1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X)) p(x_i) =$$

$$\mu_1 = (2-6) \cdot \frac{1}{5} + (3-6) \cdot \frac{1}{5} + (7-6) \cdot \frac{1}{5} + (8-6) \cdot \frac{1}{5} + (10-6) \cdot \frac{1}{5} = 0 \qquad \mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p(x_i) =$$

$$\mu_2 = (2-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (3-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (7-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (8-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (10-6)^2 \cdot \frac{1}{5} = 9,2 \qquad \mu_2 = \sigma^2 = 9,2$$

$$\alpha_{1,4} = E(X-4)^1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - 4) p(x_i) =$$

$$\alpha_{1,4} = (2-4) \cdot \frac{1}{5} + (3-4) \cdot \frac{1}{5} + (7-4) \cdot \frac{1}{5} + (8-4) \cdot \frac{1}{5} + (10-4) \cdot \frac{1}{5} = 2 \qquad \alpha_{1,4} = 2$$

$$\alpha_{2,4} = E(X-4)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - 4)^2 p(x_i) =$$

$$\alpha_{2,4} = (2-4)^2 \cdot \frac{1}{5} + (3-4)^2 \cdot \frac{1}{5} + (7-4)^2 \cdot \frac{1}{5} + (8-4)^2 \cdot \frac{1}{5} + (10-4)^2 \cdot \frac{1}{5} = 13,2 \qquad \alpha_{2,4} = 13,2$$

3. Zorizko aldagaiak honako balioak har ditzake: {2,3,7,8,10}, aurreko ariketan bezala. Jakinik gertaera guztiak ekiprobableak direla (hau da, gertaera guztiek probabilitate bera dute), kalkulatu asimetria eta kurtosi balioak, eta esan zein den banaketaren forma.

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sigma^3} E(X - E(X))^3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\mu_3 = E(X - E(X))^3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^3 \, p(x_i) =$$

$$\mu_3 = (2-6)^3 \cdot \frac{1}{5} + (3-6)^3 \cdot \frac{1}{5} + (7-6)^3 \cdot \frac{1}{5} + (8-6)^3 \cdot \frac{1}{5} + (10-6)^3 \cdot \frac{1}{5} = -3.6 \qquad \mu_3 = -3{,}6$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \, p(x_i) =$$

$$\sigma^2 = (2-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (3-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (7-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (8-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (10-6)^2 \cdot \frac{1}{5} = 9{,}2 \qquad \sigma^2 = 9{,}2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{9{,}2}$$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-3.6}{\left(\sqrt{9{,}2}\right)^3} = -0{,}13$$

0-tik oso gertu dago balioa, beraz apur bat asimetriko negatiboa da.

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

$$\mu_4 = E(X - E(X))^4 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^4 \, p(x_i) =$$

$$\mu_4 = (2-6)^4 \cdot \frac{1}{5} + (3-6)^4 \cdot \frac{1}{5} + (7-6)^4 \cdot \frac{1}{5} + (8-6)^4 \cdot \frac{1}{5} + (10-6)^4 \cdot \frac{1}{5} = 122 \qquad \mu_4 = 122$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \, p(x_i) =$$

$$\sigma^2 = (2-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (3-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (7-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (8-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (10-6)^2 \cdot \frac{1}{5} = 9{,}2 \qquad \sigma^2 = 9{,}2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{9{,}2}$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{122}{\left(\sqrt{9{,}2}\right)^4} - 3 = -1{,}56$$

Balioa negatiboa da beraz gure banaketa apur bat platikurtikoa dela esan daiteke.

4. Zorizko aldagai baten batezbestekoa 7 da eta batezbestekoan zentraturiko bigarren mailako momentua 4 da. Kalkulatu aldagaia (4, 14) tartearen barnean egoteko probabilitate minimoa edo behe-bornea.

$$P(E(X)-k\sigma < X < E(X)+k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2} \quad \forall k>0$$

$$P(4 < X < 10) \geq 1-\frac{1}{k^2} \quad \forall k>0$$

$$4 = E(X)-k\sigma \qquad 4 = 7-k2 \qquad k=\frac{3}{2} \quad \text{edo}$$

$$10 = E(X)+k\sigma \qquad 10 = 7+k2 \qquad k=\frac{3}{2}$$

$$P(4 < X < 10) \geq 1-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{9}$$

5. Oinezkoen semaforo batean oinezkoak itxaron beharreko denbora zorizko aldagai jarraitu bat da. Pertsona bat gurutze bidera iristen da zoriz, zein da batezbesteko itxarote denbora? Zorizko aldagaiaren dentsitate funtzioa honakoa da (balioak segundotan daudelarik):

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ \dfrac{x}{80} & 0 < x < 30 \\ 0 & 80 < x < \infty \end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{f}(x)dx=\int_{0}^{30} x\frac{x}{80}dx=\int_{0}^{30}\frac{x^2}{80}dx=\left.\frac{x^3}{240}\right]_0^{30}=\left.\frac{30^3}{240}\right]=112,5 \text{ segundu}$$