ZORIZKO ALDAGAIEN BANAKETA JARRAITUAK

4. GAIA

Xabier Erdocia
Itsaso Leceta

IKASKETA HELBURUAK

- ✓ Zorizko aldagai batek jarraitzen duen banaketa jarraitua identifikatzeko gai izatea
- ✓ Zorizko aldagai batek jarraitzen duen banaketa jarraitua identifikatu ostean, dentsitate edo banaketa funtzioaren bidez probabilitate desberdinak kalkulatzen jakitea
- ✓ Banaketa diskretu desberdinen momentuak kalkulatu eta interpretatzeko gaitasuna edukitzea
- ✓ Banaketa binomiala normalaren bitartez hurbiltzeko bete beharrezko baldintzak ezagutzea eta hurbilketa modu egokian gauzatzeko gai izatea

AURKIBIDEA

4.1. Banaketa uniformea
4.2. Banaketa esponentziala
4.3. Banaketa normala

4.1. Banaketa uniformea

- Zorizko aldagai batek, tarte finitu batean, balio bat hartzeko duen probabilitatea berdina denean aldagaiaren balio desberdinentzat (luzera berdineko tarte guztientzat), aldagaiek banaketa uniforme bat jarraitzen duela esan daiteke.

- Aldagaiak banaketa uniforme bat jarraitzen du bere dentsitate funtzioa honakoa bada:

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)} & a \le x \le b \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

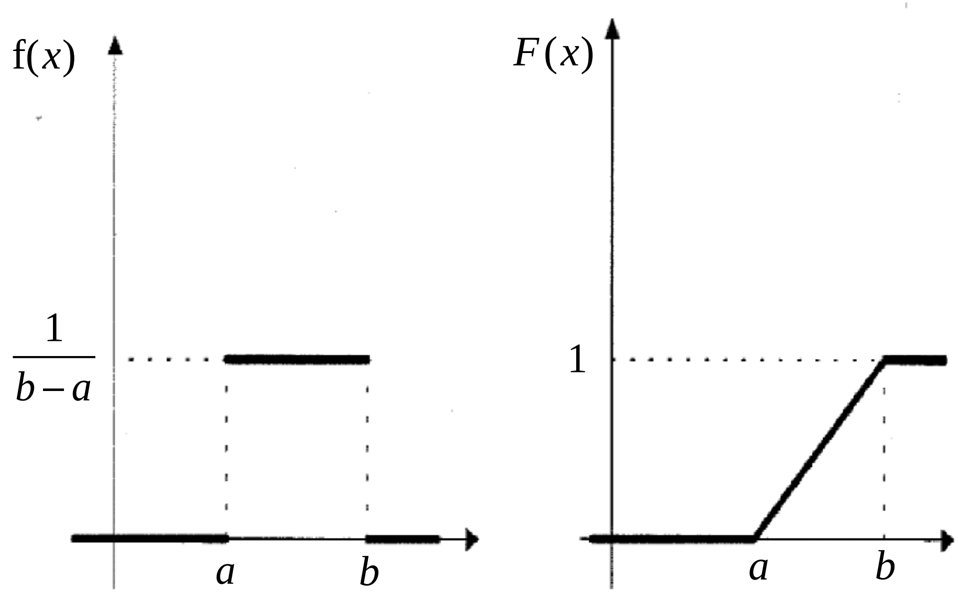
- Banaketa funtzioa honakoa da:

$$P(X \le x) = F(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

- (a,b) barneko edozein (x_1,x_2) azpitarteko probabilitatea kalkulatzeko:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2 - a}{b - a} - \frac{x_1 - a}{b - a} = \frac{x_2 - x_1}{b - a}$$

- f(x) dentsitate funtzioa eta F(x) banaketa funtzioa honakoak dira:



- Banaketa uniformea jarraitzen duen zorizko aldagai baten batezbestekoaren balioa honakoa da:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

- Dentsitate funtzioa ezagututa, beste momentu eta neurriak kalkulatu daitezke. Adibidez, bariantzaren balioa hau da:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

4.2. Banaketa esponentziala

- Banaketa esponentziala asko erabiltzen da gailu desberdinen bizi iraupena karakterizatzeko.

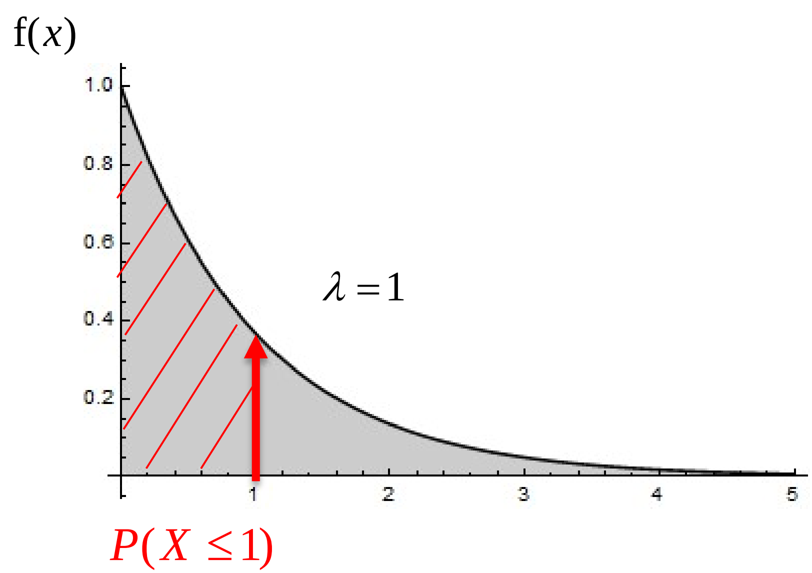
- Zorizko aldagaiak banaketa esponentziala jarraitzen duenean bere dentsitate funtzioa eta banaketa funtzioa honakoak dira:

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0 \quad \wedge \quad \lambda>0\\ 0 & \text{beste kasuetan}\end{cases}$$

$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0 \quad \wedge \quad \lambda>0\\ 0 & \text{beste kasuetan}\end{cases}$$

- Adibidez λ=1 kasuan honakoa izango litzateke dentsitate funtzioa.

- Bestalde, adibidez, gorriz markaturiko azalerak P(X≤1) probabilitatea adierazten du.



- Banaketa esponentziala jarraitzen duen zorizko aldagai baten batezbestekoaren balioa honakoa da:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

- Dentsitate funtzioa ezagututa, beste momentu eta neurriak kalkulatu daitezke. Adibidez, bariantzaren balioa hau da:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

4.3. Banaketa normala

- Banaketa normala banaketa garrantzitsuenetako bat da. Inferentzia estatistikoan funtsezkoa da, izan ere lagin ugarik banaketa normala jarraitzeko joera baitute.

- Zorizko aldagaiak banaketa normal bat jarraitzen du bere dentsitate funtzioa honakoa bada:

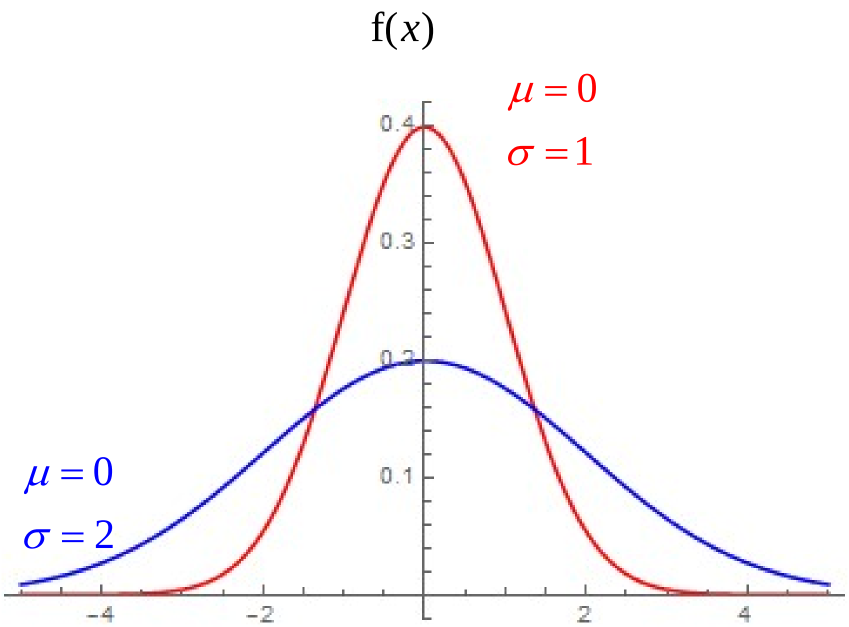
$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

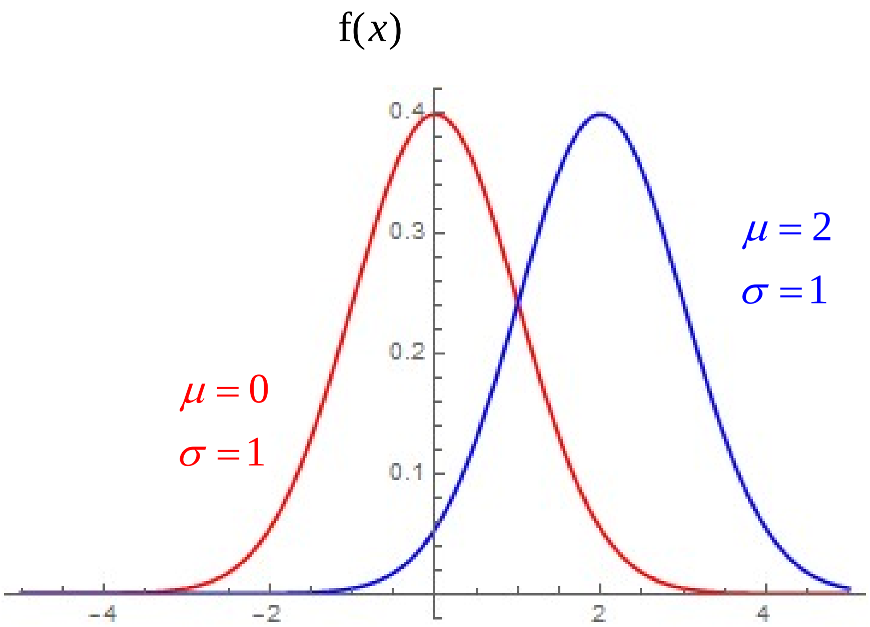
- Banaketa normalaren dentsitate funtzioa μ eta σ parametroek determinatzen dute.

- Aldagaiak banaketa normal bat jarraitzen duenean horrela adierazten da:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- Dentsitate funtzioak honako itxura du:





- Ikusi daiteke kurbak kanpai itxura duela. Banaketa honi ere Gauss-en banaketa deritzo. Parametroen balio desberdinetarako kurbaren aldakuntza ikusi daiteke.

- Irudian ikusi daitekeen bezala, dentsitate funtzioaren kurba simetrikoa da. Maximoa x=μ balioarentzat ematen da, eta inflexioa puntuak x=μ±σ puntuetan daude.

- Banaketaren batezbestekoa:

$$E(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx=\mu$$

- Banaketaren bariantza

$$Bariantza(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx=\sigma^2$$

- Beraz, banaketaren parametroak μ eta σ dira, non μ banaketaren batezbestekoaren balioa den eta σ desbideratze tipikoa.

- Banaketa funtzioa honakoa izango da:

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

- Integral hau ez denez oinarrizko funtzioen konbinazio lineal bat, zenbakizko metodoak erabiliz ebatzi behar da *x* bakoitzarentzat μ eta σ bikote bakoitzerako. Lan hau errazteko, ondorengo aldagai aldaketa egiten da:

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

- Z aldagai tipifikatu bat da non batezbestekoaren balioa 0 den eta desbideratze tipikoa 1.

$$F(x) = P(X \le x) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz$$

- X aldagaia normalki banatuta badago μ batezbestekoarekin eta σ desbideratze tipikoarekin, Z baita ere normalki banatuta0 dago batezbestekoarekin eta 1 desbiazio tipikoarekin. Beraz,

$$P(X \le x) = P(Z \le z)$$

- F(z) banaketa funtzio tipifikatua deritzo eta tabulatua dago (taula hau atxikia dago). Modu honetan, banaketa funtzio tipifikatuaren balioak taulan begiratu daitezke zuzenean.

- Taularen erabilera: P(Z≤0,23)=0,5910
  Horretarako taularen 3. lerroan begiratzen dugu eta bigarren hamartarra hartzeko 4. zutabera jo beharko dugu.

- Simetria dela eta:

$P(Z \geq z)=1-P(Z \leq z)$

$P(Z \leq -z)=P(Z \geq z)$

$P(z_1 \leq Z \leq z_2)=P(Z \leq z_2)-P(Z \leq z_1)$

- Banaketa binomialaren hurbilketa normalaren bitartez:
  - X zorizko aldagai diskretu unidimentsionala bada, banaketa binomiala jarraitzen duena eta $n \to \infty$, orduan banaketa binomiala banaketa normalaren bitartez hurbildu daiteke.

$$B(n, p) \cong N(\mu = np, \sigma^2 = npq)$$

Hurbilketa ona da hau ematen denean:

$$n \geq 30$$

$$np \geq 5$$

$$nq \geq 5$$

- Banaketa binomialaren hurbilketa normalaren bitartez:
    - Aldagai diskretu bat aldagai jarraitu batekin hurbiltzen ari denez eta 2. gaian azaldu bezela zorizko aldagai jarraitu batek balio zehatz bat hartzeko probabilitatea 0 da, puntu-erdiko zuzenketa jarraitzen da hurbilketan:

$$P(X_{diskretuan} \le a) = P(X_{jarraituan} \le a + 0,5) = P(X_{jarraituan} < a + 0,5)$$
$$P(X_{diskretuan} \ge a) = P(X_{jarraituan} \ge a - 0,5) = P(X_{jarraituan} > a - 0,5)$$
$$P(X_{diskretuan} < a) = P(X_{jarraituan} \le a - 0,5) = P(X_{jarraituan} < a - 0,5)$$
$$P(X_{diskretuan} > a) = P(X_{jarraituan} \ge a + 0,5) = P(X_{jarraituan} > a + 0,5)$$