ZORIZKO ALDAGAIEN BANAKETA DISKRETUAK

3. GAIA

Xabier Erdocia
Itsaso Leceta

IKASKETA HELBURUAK

- ✓ Zorizko aldagai batek jarraitzen duen banaketa diskretua identifikatzeko gai izatea
- ✓ Zorizko aldagai batek jarraitzen duen banaketa diskretua identifikatu ostean, probabilitate edo banaketa funtzioaren bidez probabilitate desberdinak kalkulatzen jakitea
- ✓ Banaketa diskretu desberdinen momentuak kalkulatu eta interpretatzeko gaitasuna edukitzea
- ✓ Banaketa hipergeometrikoa binomial baten bitartez, eta banaketa binomial bat Poisson-en bitartez hurbiltzeko bete beharrezko baldintzak ezagutzea eta hurbilketa modu egokian gauzatzeko gai izatea

AURKIBIDEA

3.1. Banaketa binarioa

- Zorizko entsegu bakar bat egiterakoan soilik bi emaitza posible ditugunean, zorizko aldagaiak jarraitzen duen banaketa binarioa edo Bernoulli-ren banaketa dela esan dezakegu.

- Bi emaitza posibleak, $X=1$ (Arrakasta) edo $X=0$ (Porrota) dira, $P(X=1)=p$ eta $P(X=0)=q=1-p$ izanik.

- Aldagaiak jarraitzen duen banaketa honela adierazten da:

$$X \sim \text{Binarioa}(p)$$

- Probabilitate funtzioa honakoa da:

$$p(x)=p^{x}(1-p)^{1-x}=p^{x}q^{1-x}$$

- Banaketa funtzioa honakoa da:

$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases} q & x=0 \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

- Banaketa binarioa jarraitzen duen zorizko aldagai baten batezbestekoaren balioa honakoa da:

$$E(X) = p$$

- Probabilitate funtzioa ezagututa, beste momentu eta neurriak kalkulatu daitezke. Adibidez, bariantzaren balioa hau da:

$$\sigma^2 = p \cdot q$$

3.2. Banaketa binomiala

- Banaketa binarioan egindako zorizko entsegua n alditan errepikatzerakoan (entsegu bakoitza bestearekiko independentea izanik), entsegu guztietan lortutako emaitzak kontuan hartzen dituen zorizko aldagaiak jarraitzen duen banaketa, binomiala dela esan dezakegu.

- Entsegu bakoitzean bi emaitza posibleak, "Arrakasta" p probabilitaterekin edo "Porrota" $q = 1 - p$ probabilitatearekin izanik.

- Aldagaiak jarraitzen duen banaketa honela adierazten da:

$$X \sim \mathrm{B}(n, p)$$

- Probabilitate funtzioa honakoa da:

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, n$$

- Banaketa funtzioa honakoa da:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} p(i) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

- Banaketa binomiala jarraitzen duen zorizko aldagai baten batezbestekoaren balioa honakoa da:

$$E(X) = n \cdot p$$

- Probabilitate funtzioa ezagututa, beste momentu eta neurriak kalkulatu daitezke. Adibidez, bariantzaren balioa hau da:

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$$

3.3. Banaketa geometrikoa

- Banaketa binarioan definitutako zorizko entsegua edukirik (entsegu bakoitza bestearekiko independentea izanik), lehenengo arrakasta lortu arte egindako entsegu kopurua (arrakastaren entsegua barne ez harturik) kontuan hartzen dituen zorizko aldagaiak jarraitzen duen banaketa, geometrikoa dela esan dezakegu.

- Entsegu bakoitzean bi emaitza posibleak, “Arrakasta” p probabilitaterekin edo “Porrota” $q = 1 - p$ probabilitatearekin izanik.

- Aldagaiak jarraitzen duen banaketa honela adierazten da:

$$X \sim \mathrm{G}(p)$$

- Probabilitate funtzioa honakoa da:

$$p(x) = q^x p \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

- Banaketa funtzioa honakoa da:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} p(i) = \sum_{i=0}^{x} q^i p$$

- Banaketa geometrikoa jarraitzen duen zorizko aldagai baten batezbestekoaren balioa honakoa da:

$$E(X) = \frac{q}{p}$$

- Probabilitate funtzioa ezagututa, beste momentu eta neurriak kalkulatu daitezke. Adibidez, bariantzaren balioa hau da:

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$$

3.4. Banaketa binomial negatiboa

- Banaketa binarioan definitutako zorizko entsegua edukirik (entsegu bakoitza bestearekiko independentea izanik), n arrakasta lortu arte egindako entsegu kopurua (n arrakasta entseguak barne ez harturik) kontuan hartzen dituen zorizko aldagaiak jarraitzen duen banaketa, binomial negatiboa dela esan dezakegu.

- Entsegu bakoitzean bi emaitza posibleak, “Arrakasta” p probabilitaterekin edo “Porrota” $q = 1 - p$ probabilitatearekin izanik.

- Aldagaiak jarraitzen duen banaketa honela adierazten da:

$$X \sim \mathrm{BN}(n, p)$$

- Probabilitate funtzioa honakoa da:

$$p(x) = \binom{n+x-1}{x} q^x p^n \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

- Banaketa funtzioa honakoa da:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} p(i) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n+i-1}{i} q^i p^n$$

- Banaketa binomial negatiboa jarraitzen duen zorizko aldagai baten batezbestekoaren balioa honakoa da:

$$E(X) = \frac{nq}{p}$$

- Probabilitate funtzioa ezagututa, beste momentu eta neurriak kalkulatu daitezke. Adibidez, bariantzaren balioa hau da:

$$\sigma^2 = \frac{nq}{p^2}$$

3.5. Banaketa hipergeometrikoa

- Banaketa hipergeometrikoa, banaketa binomialaren antzekoa da baina laginketa ez da independentea, hau da, populazio finitu batean behaketak egiten dira birjarpenik gabe.

- Populazio finitua izateagatik, elementu bat behatu ondoren populaziora ez itzultzean, ondorengo behaketan eragina du. Proportzioak ez dira konstante mantentzen behaketak aurrera egiten diren ala.

- N tamainako populazio batean egindako behaketa bakoitzean bi emaitza posibleak, "Arrakasta" edo "Porrota" dira, lehenengo behaketan (entseguan) arrakastaren probabilitatea p eta porrotaren probabilitatea $q = 1 - p$ izanik.

- Aldagaiak jarraitzen duen banaketa honela adierazten da:

$$X \sim \mathrm{H}(N, n, p)$$

- Probabilitate funtzioa honakoa da:

$$p(x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \max(0, n - Nq) \le x \le \min(n, Np)$$

- Banaketa funtzioa honakoa da:

$$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{i=\max(0,n-Nq)}^{x} p(i)=\sum_{i=\max(0,n-Nq)}^{x} \frac{\binom{Np}{i}\binom{Nq}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

- Banaketa hipergeometrikoa jarraitzen duen zorizko aldagai baten batezbestekoaren balioa honakoa da:

$$E(X)=n\cdot p$$

- Probabilitate funtzioa ezagututa, beste momentu eta neurriak kalkulatu daitezke. Adibidez, bariantzaren balioa hau da:

$$\sigma^2=n\cdot p\cdot q\frac{(N-n)}{(N-1)}$$

Banaketa hipergeometrikoaren hurbilketa binomialaren bitartez:

- Banaketa hipergeometrikoa jarraitzen duen zorizko aldagai batean, populazioaren tamaina, N, behaketa kopurua, n, baino askoz handiagoa bada, banaketa hipergeometriko hori binomial batera hurbil daiteke.
- Beraz, $N \to \infty$ eta $n \to 0$ bada $H(N,n,p) \cong B(n,p)$
- Hurbilketa hau onargarria da ondoko baldintza ematen denean:

$$N > 10 \cdot n$$

3.6. Poisson-en banaketa

- X zorizko aldagai batek gertakari bat, tarte jarrai batean (denbora, espazioa...) zenbatetan errepikatzen den definitzen duenean Poisson-en banaketa bat jarraitzen du . Tarte batean egondako gertakariak beste tarte batean egondako gertakariekiko independenteak dira, baldin eta tarteak ez diren gainezartzen.

- Gertakari kopurua beti positiboa izango da λ parametroak tarte jakin batean esperotako gertakari kopurua definituko du.

- Aldagaiak jarraitzen duen banaketa honela adierazten da:

$$X \sim \mathscr{P}(\lambda)$$

- Probabilitate funtzioa honakoa da:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!} \qquad \lambda, x \geq 0$$

- Banaketa funtzioa honakoa da:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} p(i) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{i}}{i!}$$

- Poisson-en banaketa jarraitzen duen zorizko aldagai baten batezbestekoaren balioa honakoa da:

$$E(X) = \lambda$$

- Probabilitate funtzioa ezagututa, beste momentu eta neurriak kalkulatu daitezke. Adibidez, bariantzaren balioa hau da:

$$\sigma^2 = \lambda$$

Banaketa binomialaren hurbilketa Poisson-en banaketaren bitartez:

- Banaketa binomiala jarraitzen duen zorizko aldagai batean, n behaketa edo entsegu kopurua oso handia denean eta p arrakastaren probabilitatea baxua denean, banaketa binomial hori Poisson-en banaketa batera hurbil daiteke.

- Beraz, $n \to \infty$ eta $p \to 0$ bada $B(n, p) \cong \mathscr{P}(n \cdot p = \lambda)$

- Hurbilketa hau onargarria da ondoko baldintzak ematen direnean:

$$n > 30 \text{ eta } p \leq 0{,}1$$