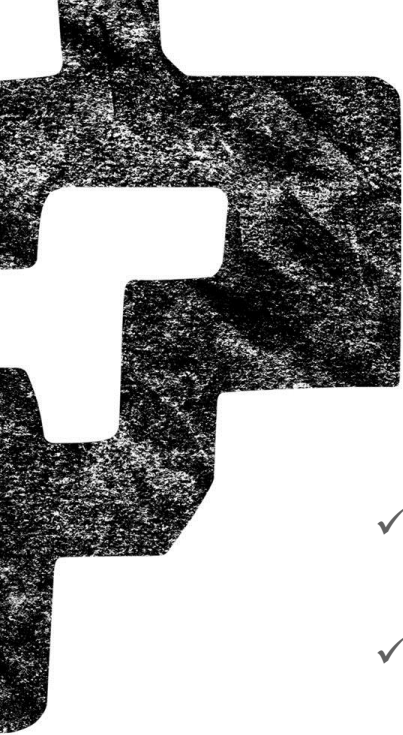


ZORIZKO ALDAGAI UNIDIMENTSIONALEN MOMENTUAK

1. GAIA

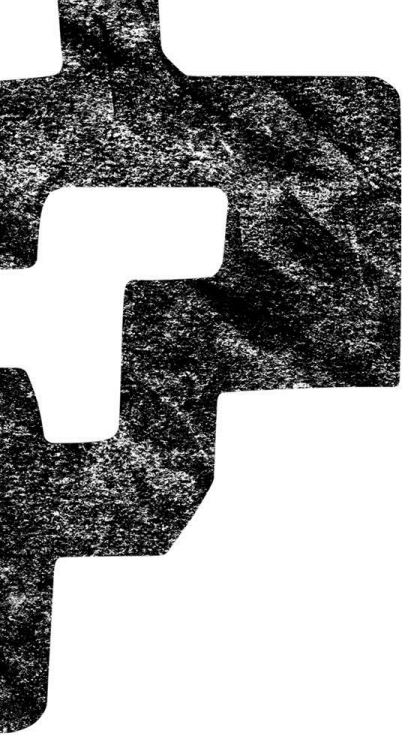
Xabier Erdocia
Itsaso Leceta





IKASKETA HELBURUAK

- ✓ Zorizko aldagai unidimentsionalen kontzeptua ulertzea eta barneratzea
- ✓ Zorizko aldagai baten momentuak eta batezbesteko balioa kalkulatzeko jakitea
- ✓ Momentuak erabiliz posizio eta dispersio neurriak kalkulatu eta modu egokian interpretatzea
- ✓ Tchebychev-en desberdintza erabiliz zorizko aldagaia tarte baten barruan egoteko gutxieneko probabilitatea aurkitzeko gai izatea



AURKIBIDEA

- 1.1. Zorizko aldagai unidimentsionalen kontzeptua
- 1.2. Batezbesteko balioa
- 1.3. Zorizko aldagaiaren momentuak
- 1.4. Posizio neurriak. Dispersio neurriak.
Fisher-en koefizienteak
- 1.5. Tchebychev-en desberdintzak



1.1. Zorizko aldagai unidimentsionalen kontzeptua

1.1. Zorizko aldagai unidimentsionalen kontzeptua

- Izan dadin E zorizko saiakuntza eta S bere lagin espazioa. **Zorizko aldagaia** funtzio bat da non S -ko emaitza posible bakoitzari zenbaki erreal bat esleitzen zaio.

$$X : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

- Zorizko aldagaia diskretua edo jarraitua izan daiteke:
 - **Diskretua**: irudien kopurua finitua edo infinitu zenbakigarria denean
 - **Jarraitua**: irudiak tarte bateko balio guztiak har ditzakenean

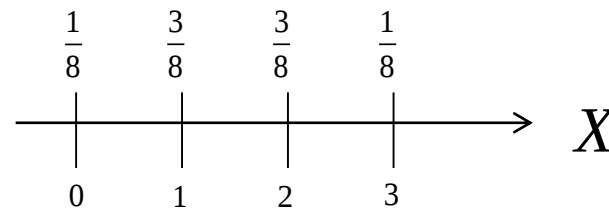
1.1. Zorizko aldagai unidimentsionalen kontzeptua

- Suposatu dezagun ondorengo saiakuntza: “txanpon bat jaurti 3 aldiz”.
- X zorizko aldagaia horrela definitu daiteke: “lortutako gurutze kopurua”. Zorizko aldagaiak balio erreal bat esleitzen die saiakuntzan lortutako emaitza posible guztiei.
- Zorizko aldagaiaren balio posibleak (gertaerak) honakoak dira:
 - $X=0 \longrightarrow$ 3 aurpegi jarraian lortu dira ○○○
 - $X=1 \longrightarrow$ gurutze 1 eta 2 aurpegi lortu dira
 ×○○ ○×○ ○○×
 - $X=2 \longrightarrow$ 2 gurutze eta aurpegi 1 lortu dira
 ××○ ○×× ×○×
 - $X=3 \longrightarrow$ 3 gurutze lortu dira ×××

1.1. Zorizko aldagai unidimentsionalen kontzeptua

- Kasu bakoitzaren probabilitatea kalkulatu daiteke:
- Guztira, emaitza posible guztien kopurua 8 da:

- $X=0 \longrightarrow \bigcirc \bigcirc \bigcirc \quad P(X=0) = \frac{1}{8}$
- $X=1 \longrightarrow \otimes \bigcirc \bigcirc \quad \bigcirc \otimes \bigcirc \quad \bigcirc \bigcirc \otimes \quad P(X=1) = \frac{3}{8}$
- $X=2 \longrightarrow \otimes \otimes \bigcirc \quad \bigcirc \otimes \otimes \quad \otimes \bigcirc \otimes \quad P(X=2) = \frac{3}{8}$
- $X=3 \longrightarrow \otimes \otimes \otimes \quad P(X=3) = \frac{1}{8}$



1.1. Zorizko aldagai unidimentsionalen kontzeptua

- **Probabilitate banaketa:** saiakuntza baten emaitza posible guztien artean probabilitatea nola banatzen den adierazten du definituriko zorizko aldagaiarentzat.

- Banaketa diskretuak aztertzeko *probabilitate funtzioa* definitzen da:

$$p(x) = P(X = x) / \forall x \in \mathbb{R}$$

- Hau da, aldagaiak balio konkretu bat hartzeko probabilitatea.

- Banaketa jarraituak aztertzeko probabilitate *dentsitate funtzioa* ($f(x)$) definitzen da A tarte batentzat:

$$P(X \in A) = \int_A f(x) dx$$

- Hau da, puntu bakoitzean probabilitatearen banaketa nolakoa den adierazten du luzera unitateko.
- Honakoa bete behar du:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

- Zorizko aldagaiak definitzeko (diskretu edo jarraituak) *banaketa funtzioa* ($F(x)$) erabiltzen da baita ere:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

1.2. Batezbesteko balioa

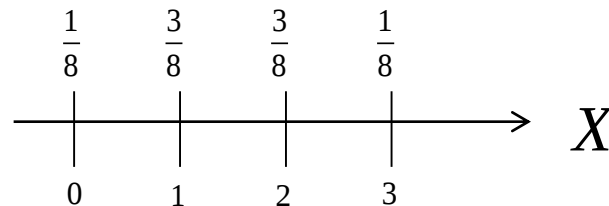
1.2. Batezbesteko balioa

- Aldagaia diskretua denean:**

- Izan bedi X , $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ balioak hartzen dituen zorizko aldagai unidimentsionala $p(x)$ probabilitate funtzioarekin. Definizioz batezbesteko balioa zenbakizko balio bat da eta horrela kalkulatzen da:

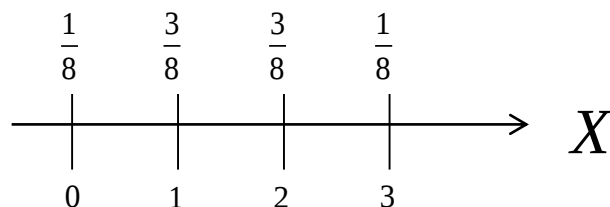
$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

- Batezbesteko balioari esperantza matematikoa edo itxarondako balioa esaten zaio baita ere.
- Adibidea: txanpon bat 3 aldiz jaurtitzearen aurreko adibidea hartuko dugu:



1.2. Batezbesteko balioa

- Adibidea: txanpon bat 3 aldiz jaurtitzearen aurreko adibidea hartuko dugu:



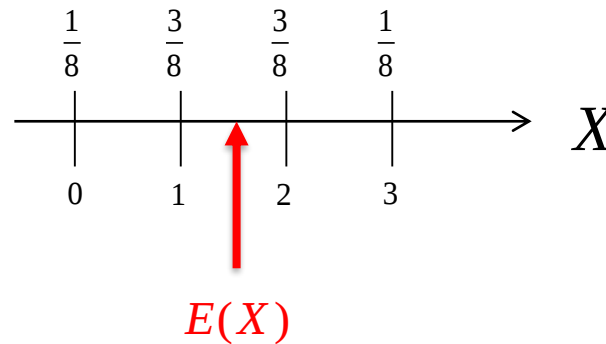
Batezbestekoaren balioa honakoa izango da:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

1.2. Batezbesteko balioa

- Ikus daiteke batezbesteko balioa, aldagaiaren banaketaren masaren **grabitate –zentrua** dela

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$



Suposatuko bagenu X ardatza pisu gabeko barra bat dela non $p(x)$ -ren berdina diren masak ipintzen diren eta barra $E(X)$ puntuan eusten den, barra hori orekan egongo litzateke.

1.2. Batezbesteko balioa

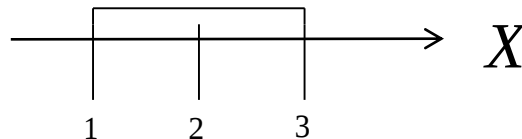
- **Aldagaia jarraitua denean:**

- Izan bedi X zorizko aldagai unidimentsionala $f(x)$ dentsitate funtzioarekin. Definizioz batezbesteko balioa zenbakizko balio bat da eta horrela kalkulatzen da:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- Adibidea: X aldagaia bere dentsitate funtzioarekin definituta dago:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

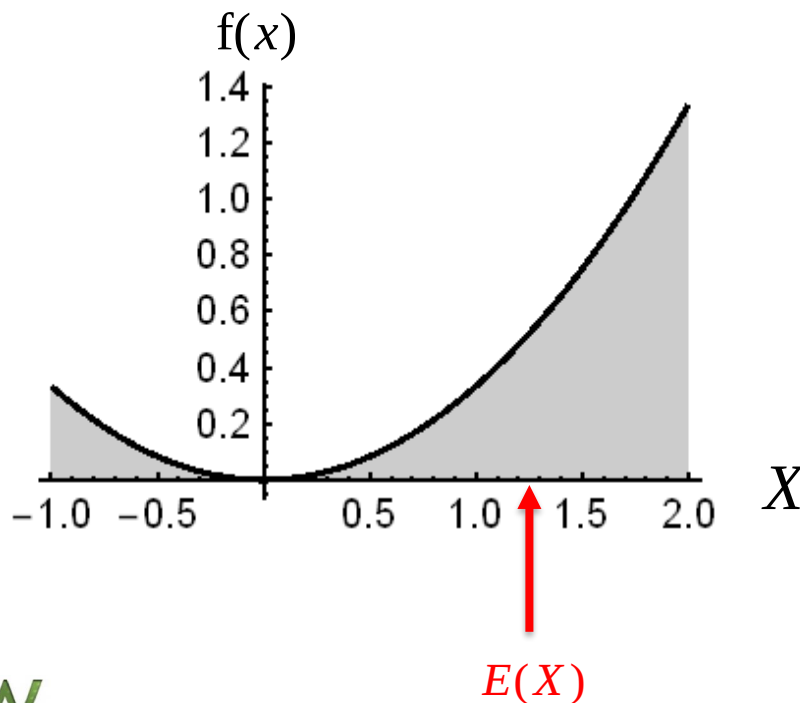


1.2. | Batezbesteko balioa

- Batezbestekoaren balioa honakoa izango litzateke:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-1}^2 x \frac{x^2}{3} dx = \frac{5}{4}$$



Aldagai jarraituetan interpretazioa berdina da, masa modu jarraian doa aldatzen eta $E(X)$ grabitate-zentrua da



1.3. Zorizko aldagaiaren momentuak

1.3. Zorizko aldagaien momentuak

- Zorizko aldagai baten momentu estatistiko oro *maila* eta *aplikazio-puntua*-ren bidez adierazten da,

$$\alpha_{k,a}$$

non k maila den eta a aplikazio puntua.

- Momentu estatistikoa aldagaiaren eta aplikazio puntuaren arteko diferentziaren batezbesteko balioa da, mailara berretuta.

$$\alpha_{k,a} = E(X - a)^k$$

- Banaketa bat ezezaguna denean, ezaugarri desberdinek honen ikuspegi orokor bat eman dezakete. Momentuak banaketaren ezaugarri horiek dira.

1.3. Zorizko aldagaien momentuak

Beraz,

- Aldagai diskretuentzat:

$$\alpha_{k,a} = E(X - a)^k = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^k p(x_i)$$

- Aldagai jarraituentzat:

$$\alpha_{k,a} = E(X - a)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^k f(x) dx$$

1.3. | Zorizko aldagaien momentuak

- Momentu estatistikoak aplikazio puntuaren arabera sailkatu daitezke:

- **Zentratu gabeko** momentuak

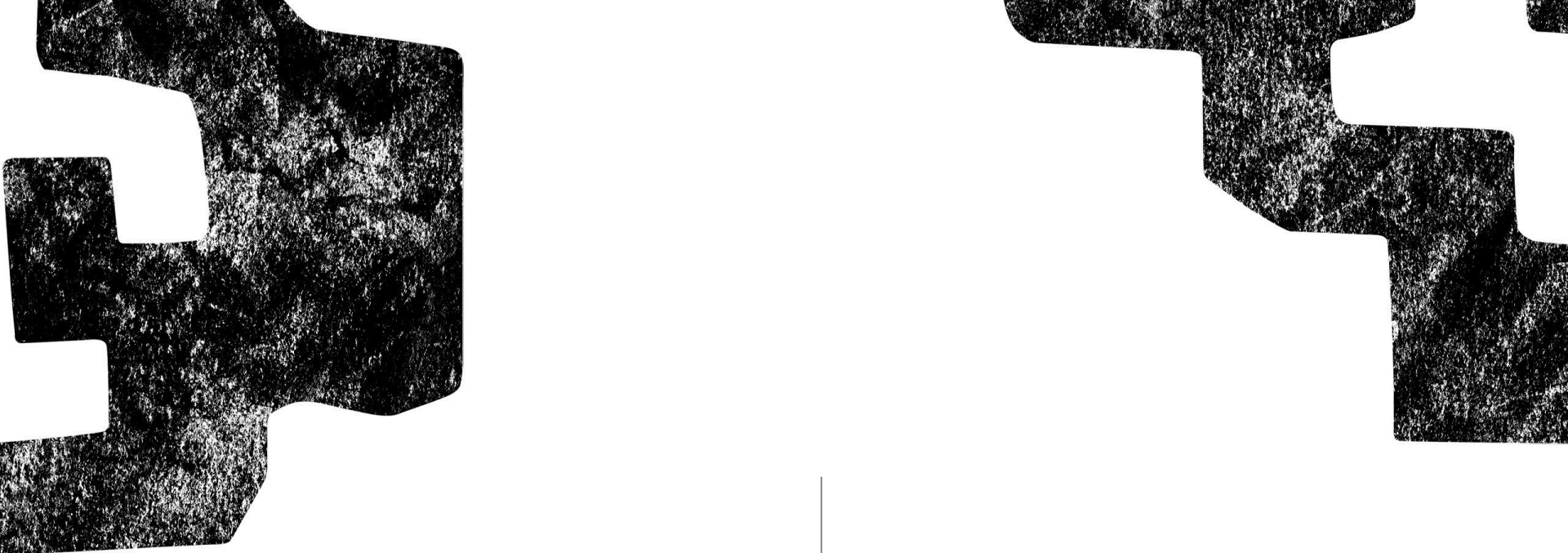
$$a = 0 \Rightarrow \alpha_{k,0} = \alpha_k \qquad \alpha_k = E(X)^k$$

- **Batezbestekoan zentraturiko** momentuak

$$a = E(X) \Rightarrow \alpha_{k,E(X)} = \mu_k \qquad \mu_k = E(X - E(X))^k$$

- Momentu **absolutuak**

$$a \neq 0 \wedge a \neq E(X) \Rightarrow \alpha_{k,a} \qquad \alpha_{k,a} = E(X - a)^k$$



1.4.

Posizio neurriak.
Dispertsio neurriak.
Fisher-en koefizienteak

1.4. | Posizio neurriak. Dispersio neurriak. Fisher-en koefizienteak

- Momentuen balioak kuantifikatuz, neurriak lortu ditzazkegu: posiziokoak, dispersiokoak edo formakoak.

POSIZIO NEURRIAK:

➤ Batezbestekoa

Batezbestekoa lehen mailako zentratu gabeko momentua da.

$$a = 1 \Rightarrow \alpha_{1,0} = \alpha_1$$

$$\alpha_1 = E(X)^1 = E(X)$$

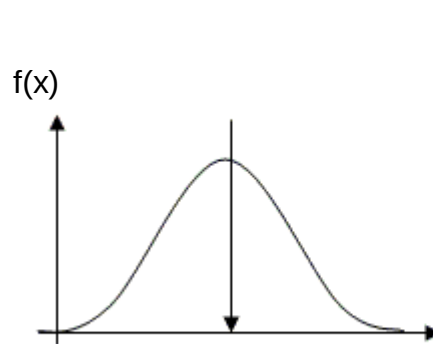
Esan bezela, batezbestekoak banaketaren masaren grabitate-zentruak duen posizioa adierazten du.

1.4. Posizio neurriak. Dispersio neurriak. Fisher-en koefizienteak

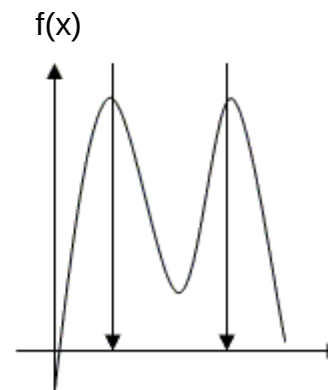
➤ Moda

Banaketa batean maiztasun gehiagorekin agertzen den balioa da moda.

Hau da, probabilitate funtzioa edo dentsitate funtzioa (zorizko aldagaiaren arabera, diskretua edo jarraitua) maximoa egiten duen aldagaiaren balioa. Adibidez kasu jarraitu batean:



Moda bakarra



Bi moda

1.4. | Posizio neurriak. Dispersio neurriak. Fisher-en koefizienteak

➤ Mediana

Banaketa bitan banatzen duen zorizko aldagaiaren balioa da mediana. Mediana, honakoa betetzen duen edozein x -ren balioa da:

$$P(X \leq x) = 0,5 \quad \text{eta} \quad P(X \geq x) = 0,5$$

1.4. | Posizio neurriak. Dispertsio neurriak. Fisher-en koefizienteak

DISPERTSIO NEURRIAK:

Posizioko neurriek nolabait banaketaren zentrua deskribatzen dute. Dispertsioko neurriek ordea aldagaiaren balioak zeinen banatuta dauden deskribatzen dute.

➤ **Bariantza**

Zorionko aldagai baten bariantza, batezbestekoan zentraturiko bigarren mailako momentua da.

$$a = E(X) \Rightarrow \alpha_{2,E(X)} = \mu_2$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = E(X - E(X))^2$$

1.4. Posizio neurriak. Dispersio neurriak. Fisher-en koefizienteak

- Aldagaia jarraitua bada:

$$\sigma^2 = E(X - E(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

- Aldagaia diskretua bada:

$$\sigma^2 = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 p(x_i)$$

Bariantza, banaketaren inertzia momentua bezela interpretatu daiteke batezbestekoarekiko. Bariantzaren balio baxuek aldagaiaren masa batezbestekoaren inguruan kontzentratuta dagoela adierazten du. Ordea, bariantza balio altuek masa banatuta dagoela adierazten du.

1.4. | Posizio neurriak. Dispertsio neurriak. Fisher-en koefizienteak

➤ Desbideratze tipikoa

Desbideratze tipikoari desbideratze estandarra izendatzen zaio baita ere. Bariantzaren erro karratu positiboa da.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

1.4. | Posizio neurriak. Dispertsio neurriak. Fisher-en koefizienteak

FISHER-EN KOEFIZIENTEAK EDO FORMA NEURRIAK:

Fisher-en koefizienteak edo formako neurriak banaketaren forma deskribatzen dute.

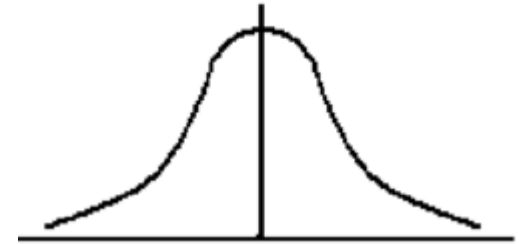
➤ **Asimetria** koefizientea

Banaketaren alborapenaren inguruan ematen du informazioa, hau da, banaketa simetrikoa den edo ez. Simetrikoak ez diren banaketak alborapena dutela esaten da.

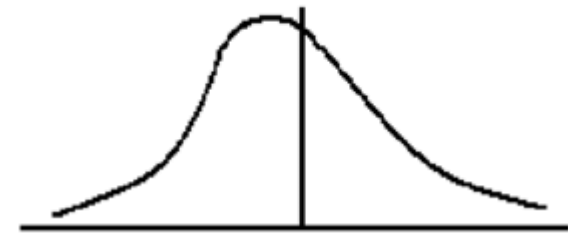
$$\gamma_1 = \frac{1}{\sigma^3} E(X - E(X))^3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

1.4. Posizio neurriak. Dispertsio neurriak. Fisher-en koefizienteak

- Banaketa simetrikoa denean: $\gamma_1 = 0$



- Banaketa asimetriko positiboa denean: $\gamma_1 > 0$



- Banaketa asimetriko negatiboa denean: $\gamma_1 < 0$



1.4. Posizio neurriak. Dispersio neurriak. Fisher-en koefizienteak

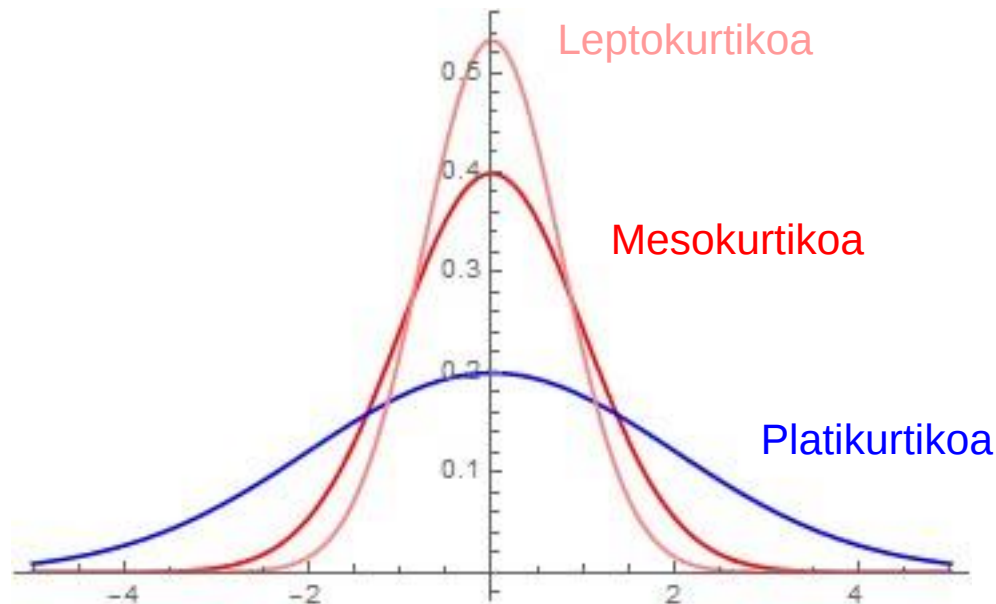
➤ **Kurtosi** koefizientea

Banaketaren zapaltasun maila adierazten du

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

1.4. Posizio neurriak. Dispertsio neurriak. Fisher-en koefizienteak

- Banaketa mesokurtikoa denean: $\gamma_2 = 0$
- Banaketa leptokurtikoa denean: $\gamma_2 > 0$
- Banaketa platikurtikoa denean: $\gamma_2 < 0$





1.5. Tchebychev-en desberdintza

1.5. Tchebychev-en desberdintza

- Izan bedi X zorizko aldagaia $E(X)$ batezbesteko eta σ^2 bariantza balio finituekin. Markov-en desberdintzan oinarrituriko Tchebychev-en desberdintza honakoa da:

$$P(E(X) - k\sigma < X < E(X) + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad \forall k > 0$$

$$P(|X - E(X)| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad \forall k > 0$$

- Aldagaiaren banaketa ezezaguna denean, Tchebychev-en desberdintza erabiliz zorizko aldagaiak tarte baten barnean egoteko gutxieneko probabilitatea kalkulatu dezakegu. Probabilitatearen behe-borne hori kalkulatu daiteke. Horretarako zorizko aldagaiaren batezbestekoa eta bariantza ezagutu behar ditugu.
- Desberdintza honen bitartez informazio ez-nabaria lortuko dugu soilik $\forall k > 1$ denean.

1.5. Tchebychev-en desberdintza

- Adibidea: Izan bedi batezbestekoa 50 eta bariantza 16 duen zorizko aldagaia. Kalkula ezazu aldagaia (42, 58) tarte barruan egoteko gutxieneko probabilitatea edo behe-bornea.

$$P(E(X) - k\sigma < X < E(X) + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad \forall k > 0$$

$$P(42 < X < 58) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad \forall k > 0$$

$$42 = E(X) - k\sigma \quad 42 = 50 - k4 \quad k = 2 \quad \text{edo}$$

$$58 = E(X) + k\sigma \quad 58 = 50 + k4 \quad k = 2$$

$$P(42 < X < 58) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = 0,75$$

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

