

TEMA 7 – Análisis modal

Mikel Abasolo Bilbao
Ibai Coria Martínez
Iker Heras Miguel





- Cuando una pieza está sometida a cargas variables en el tiempo, su deformada también varía en el tiempo (vibraciones)
- Las fuerzas externas se equilibran además de con las fuerzas elásticas, las fuerzas disipativas y las fuerzas de inercia

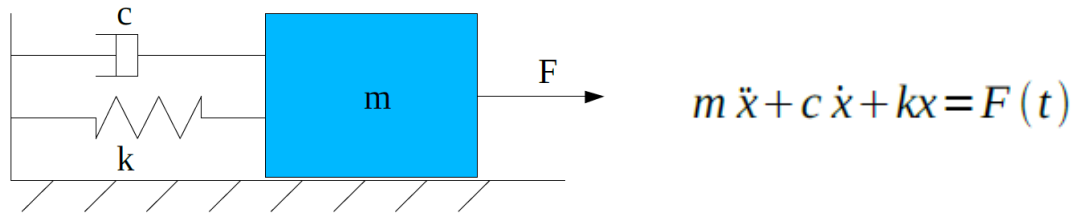
$$[K]\{\delta(t)\} + [C]\{\dot{\delta}(t)\} + [M]\{\ddot{\delta}(t)\} = \{F(t)\}$$

- Para empezar, se va a estudiar la respuesta de un sistema discreto de 1 gdl. Razones:
 - Comprender los conceptos básicos del análisis dinámico y sus implicaciones
 - Muchos casos reales se pueden estudiar mediante un sistema discreto de 1 gdl equivalente, lo que permite analizarlo de manera mucho más sencilla





- Vibraciones de un sistema discreto de 1 gdl

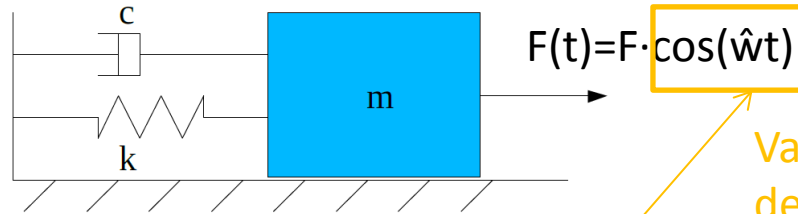


- Se trata de una ecuación diferencial de segundo grado, cuya solución es la suma de:
 - Solución homogénea: debida a las condiciones iniciales, desaparece al cabo de un tiempo por el amortiguamiento (por tanto se suele despreciar)
 - Solución particular: debida a la fuerza aplicada, se mantiene mientras dure la fuerza

$$x_p = D(\bar{\omega}) \frac{F}{k} \cos(\bar{\omega} t + \varphi(\bar{\omega}))$$

$$D(\bar{\omega}) = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + 4\delta^2 \bar{\omega}^2}}$$



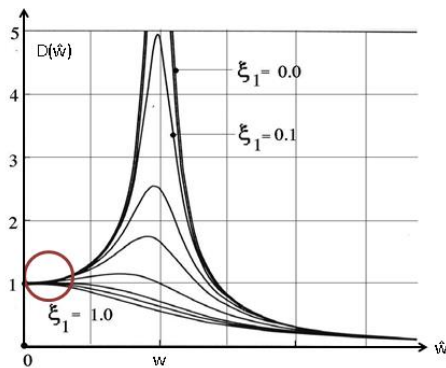


Variabilidad del desplazamiento según la forma y frecuencia de la fuerza (con un desfase)

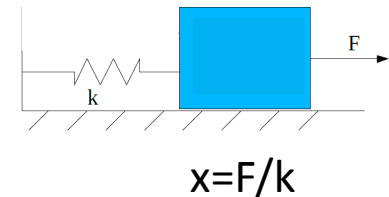
$$x_p = D(\bar{\omega}) \frac{F}{k} \cos(\bar{\omega}t + \varphi(\bar{\omega}))$$

Amplificación dinámica

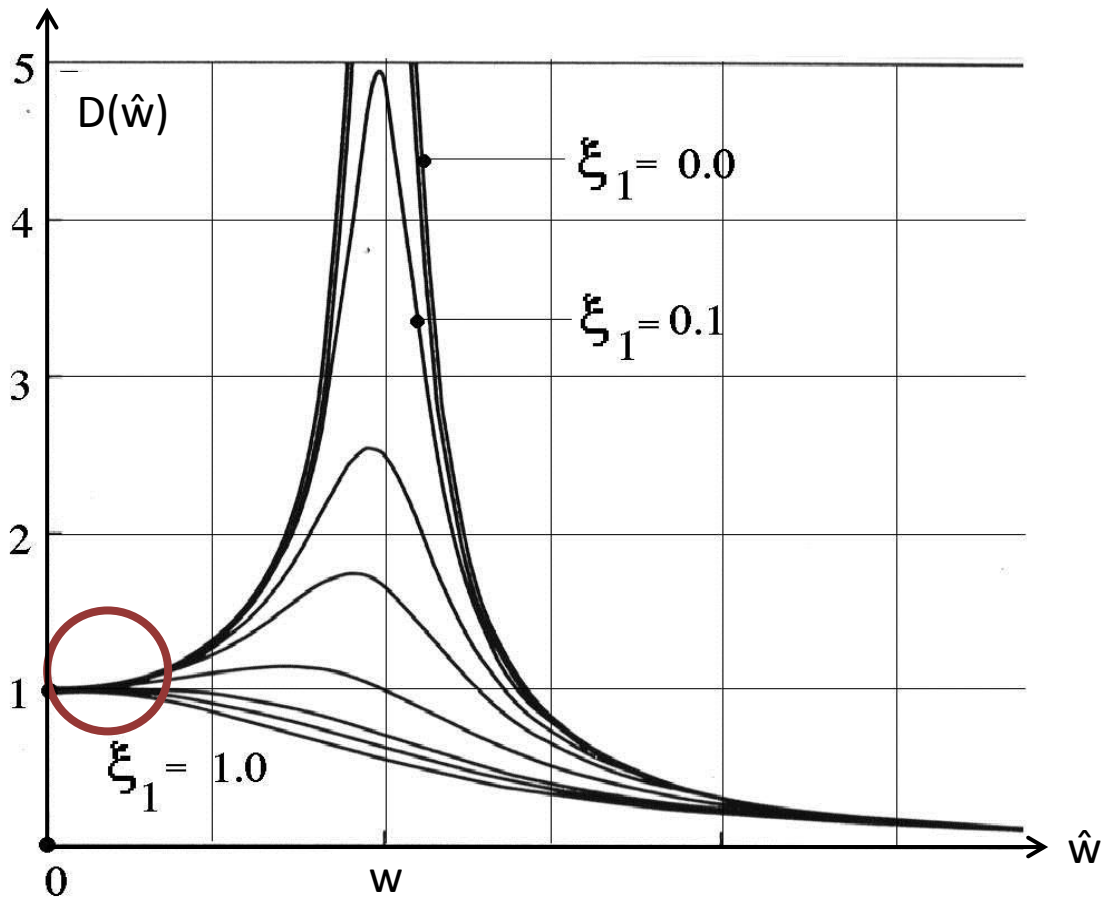
$$D(\bar{\omega}) = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + 4\delta^2 \bar{\omega}^2}}$$



Respuesta estática



- La amplitud de la respuesta dinámica es igual a la de la respuesta estática multiplicada por la amplificación dinámica, que depende de la frecuencia de la fuerza aplicada



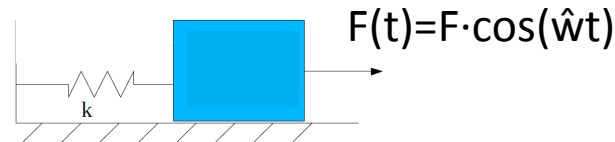
Si $\hat{w} \ll w$ (frecuencia de la fuerza aplicada \ll frecuencia natural del sistema), la amplificación dinámica vale 1, es decir no hay amplificación dinámica.

Por tanto, la amplitud de la respuesta será igual a la de la respuesta estática (obviamente la respuesta oscilará a la frecuencia \hat{w} de la fuerza)

$$x_p = \frac{F}{k} \cos(\bar{\omega} t + \varphi(\bar{\omega}))$$

En esta situación se dice que el sistema está trabajando en régimen cuasiestático (amplitud estática con variabilidad según la fuerza aplicada, es decir algo a medio camino entre estática y dinámica).

- Sabiendo que el sistema está trabajando en zona cuasiestática, el análisis dinámico se puede reducir a un simple análisis estático



$$x_p = \frac{F}{k} \cos(\bar{\omega} t + \varphi(\bar{\omega}))$$

- La explicación física es que, si la frecuencia de la fuerza es muy baja (en comparación con la frecuencia natural del sistema), la vibración (el desplazamiento) es tan lenta que la velocidad y la aceleración son muy bajas y se pueden despreciar

$$\cancel{m\ddot{x}} + \cancel{c\dot{x}} + kx = F(t)$$

0 0

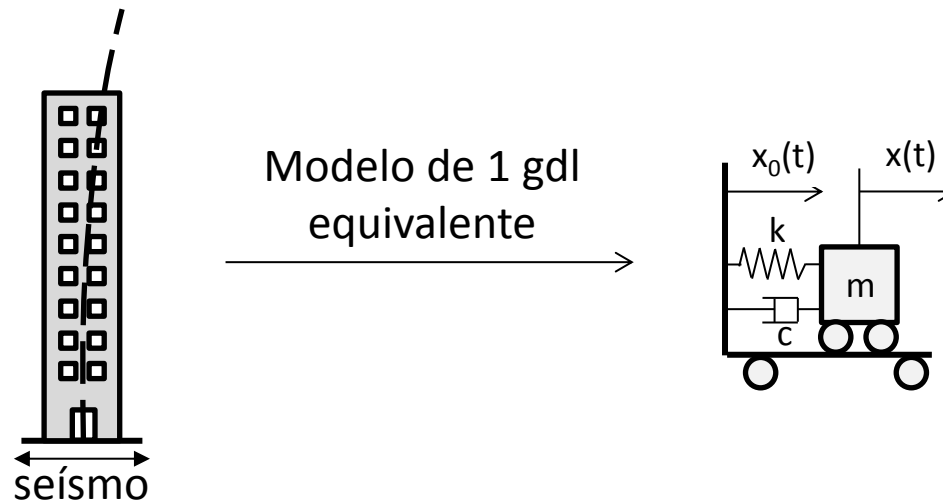




- Por tanto, hay que tratar de diseñar el sistema para que trabaje en zona cuasiestática, ya que:
 - Basta con hacer un análisis estático para conocer la amplitud de la respuesta (la variabilidad es directamente según la forma y frecuencia de la fuerza), lo que simplifica mucho el estudio del sistema. Un análisis dinámico tiene un coste mucho mayor, además el amortiguamiento es difícil de estimar y eso conlleva imprecisión
 - Se evita que el sistema trabaje cerca de la resonancia, y por tanto la amplitud de la respuesta se multiplique considerablemente aumentando las probabilidades de fallo (esta amplificación de resonancia se puede reducir aumentando el amortiguamiento modal)
- Para aumentar la frecuencia natural hay que aumentar la rigidez y/o disminuir la masa, lo cual no es fácil porque si se aumentan dimensiones para rigidizar, también aumenta la masa
- Se puede pensar en trabajar en $\hat{w} \gg w$, porque la amplificación dinámica tiende a cero, pero en sistemas reales de más de 1 gdl hay otros modos que pueden dar problemas



- Al diseñar una pieza real, el estudio de un sistema de 1 gdl es muy útil:
 - Muchas piezas vibran según un determinado modo, y gracias a ello su respuesta se puede calcular analizando un modelo de 1 gdl que corresponde a ese modo



- Los conceptos del modelo de 1gdl son directamente aplicables a piezas reales (en EF, la pieza real no es más que un modelo de n gdl). Es lo que se verá a continuación





- En una pieza real existen infinitos gdl. Al discretizarla en EF, el modelo la simula la pieza mediante n gdl
- El modelo tendrá tantos modos de vibración (y frecuencias naturales correspondientes) como gdl, es decir n
- Para calcular los modos y frecuencias, se plantea el problema de vibraciones libres no amortiguadas, al igual que para un sistema discreto de 1 gdl.
- En lugar de tener una masa y una rigidez como en el sistema de 1 gdl, en el modelo de EF se tiene una matriz de masa y una matriz de rigidez





- Se demuestra que la matriz de masa de un elemento finito se calcula como (nótese que la expresión indica sencillamente que la masa del elemento es igual a la densidad del material por el volumen del elemento)

$$[m]^e = \int_{v^e} \rho ([N(\{x\})]^e)^T [N(\{x\})]^e dv$$

- La matriz de masa del modelo completo de EF $[M]$ se obtiene mediante expansión y ensamblado de las matrices de cada elemento, igual que se hace con la matriz de rigidez $[K]$



- El problema de vibraciones libres no amortiguadas del que se obtienen los modos y frecuencias naturales es

$$[M]\{\ddot{\delta}(t)\} + [K]\{\delta(t)\} = \{0\}$$

- La solución de esta ecuación tiene la siguiente forma:

$$\{\delta(t)\} = \{\varphi\}\sin (wt + \theta)$$

- Y, derivando:

$$\begin{aligned}\{\dot{\delta}(t)\} &= w\{\varphi\}\cos (wt + \theta) \\ \{\ddot{\delta}(t)\} &= -w^2\{\varphi\}\sin (wt + \theta)\end{aligned}$$



- Sustituyendo

$$[M]\{\ddot{\delta}(t)\} + [K]\{\delta(t)\} = \{0\}$$

$$\downarrow \begin{cases} \{\delta(t)\} = \{\varphi\}\sin (wt + \theta) \\ \{\ddot{\delta}(t)\} = -w^2\{\varphi\}\sin (wt + \theta) \end{cases}$$

$$\{\ddot{\delta}(t)\} = -w^2\{\varphi\}\sin (wt + \theta)$$

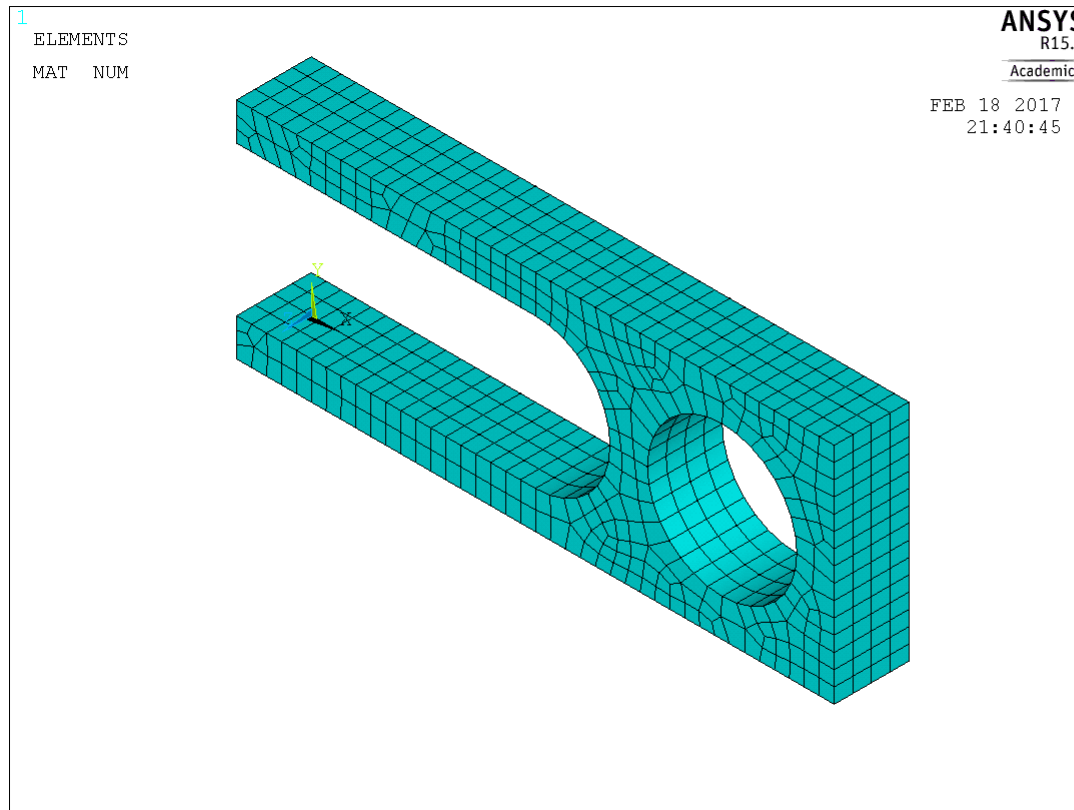
$$[K]\{\varphi\} - w^2[M]\{\varphi\} = \{0\}$$

$$\downarrow \det|[K] - w^2[M]| = 0$$

- Desarrollando, existen como solución n valores de frecuencia $w_1^2 < w_2^2 < \dots < w_n^2$ (frecuencia natural, en rad/seg)
- a cada w_i^2 le corresponde un $\{\varphi\}_i$ (modo de vibración i, asociado a la frecuencia natural i)



- Análisis modal de una pieza empotrada





- Análisis modal de una pieza empotrada

1 ELEMENTS
MAT NUM

ANSYS
R15.0
Academic

Results File: qfer.rst

Available Data Sets:

Set	Frequency	Load Step	Substep	Cumulative
1	30.063	1	1	1
2	43.062	1	2	2
3	92.894	1	3	3
4	204.43	1	4	4
5	251.34	1	5	5
6	309.28	1	6	6
7	369.52	1	7	7
8	399.55	1	8	8
9	434.53	1	9	9
10	553.81	1	10	10
11	649.69	1	11	11
12	692.72	1	12	12
13	711.07	1	13	13
14	807.07	1	14	14
15	883.71	1	15	15
16	906.08	1	16	16

Read Next Previous Close Help

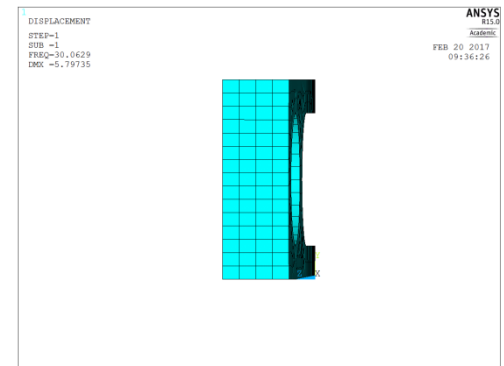
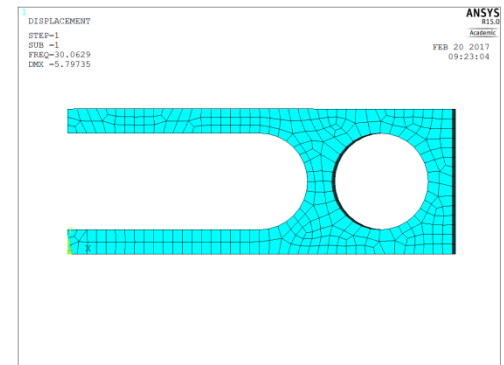
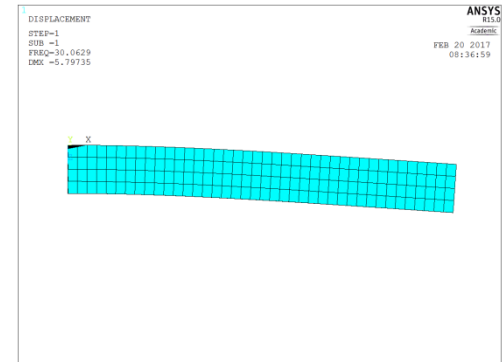
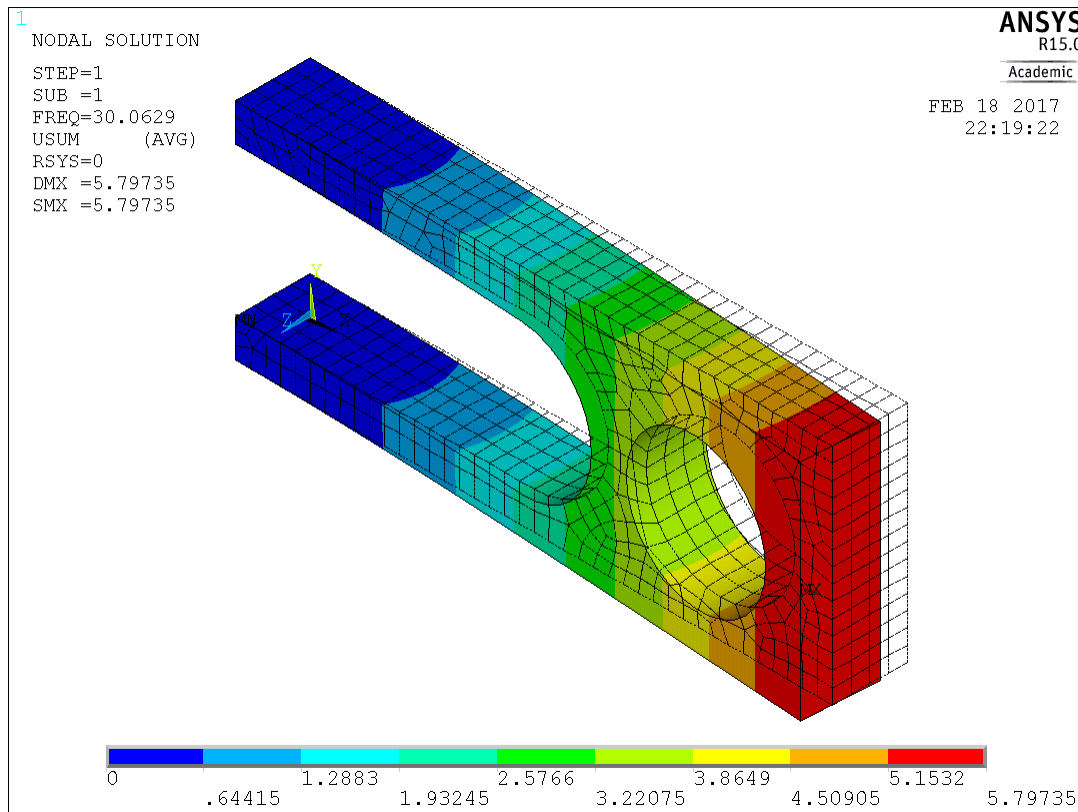




Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

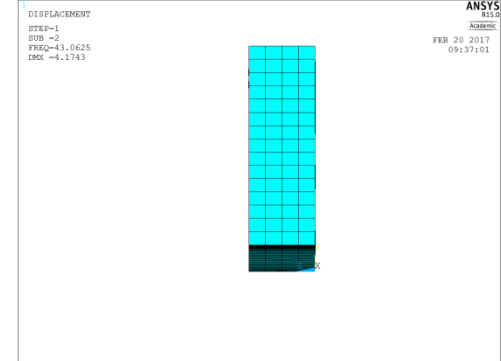
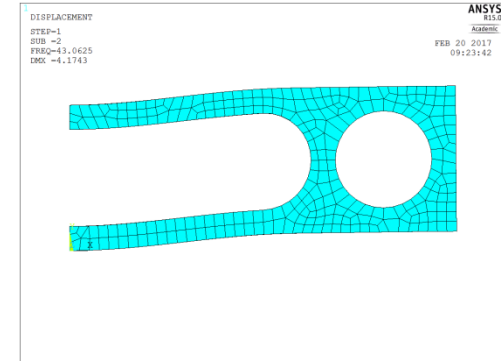
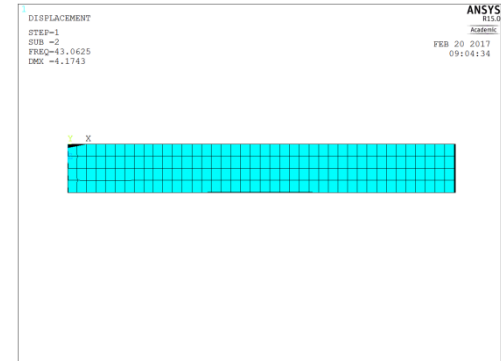
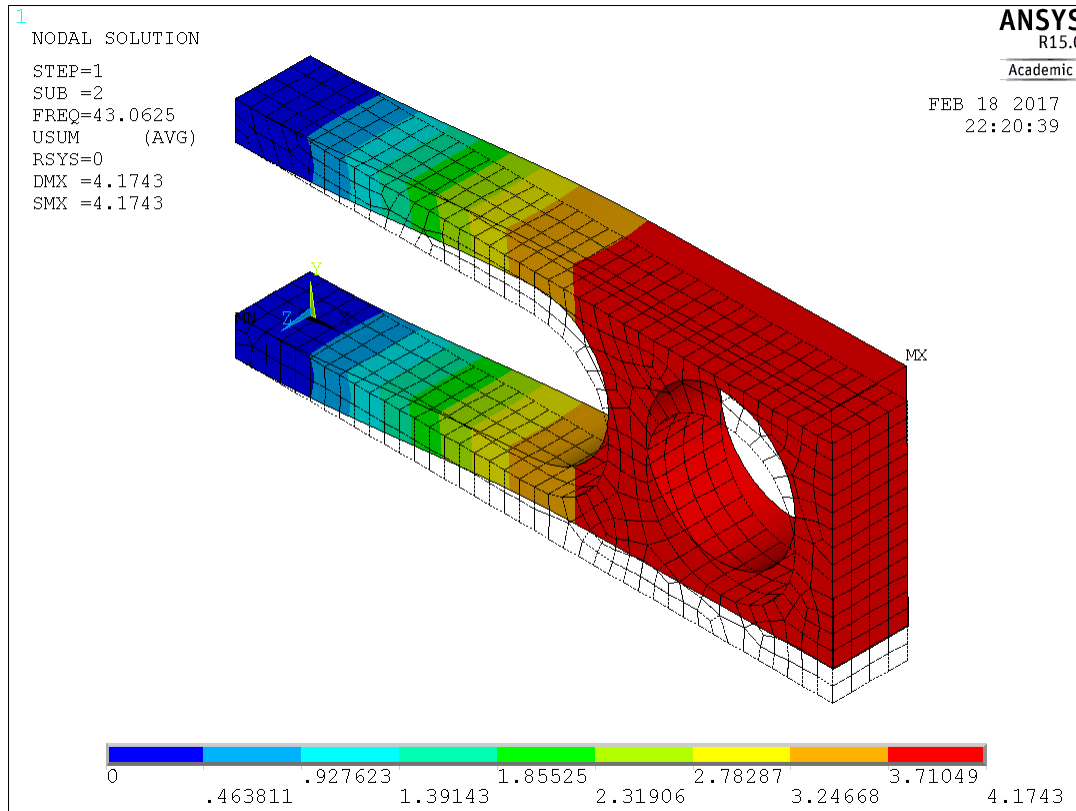


- Análisis modal de una pieza empotrada



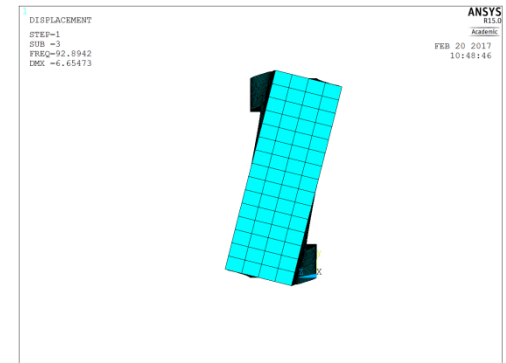
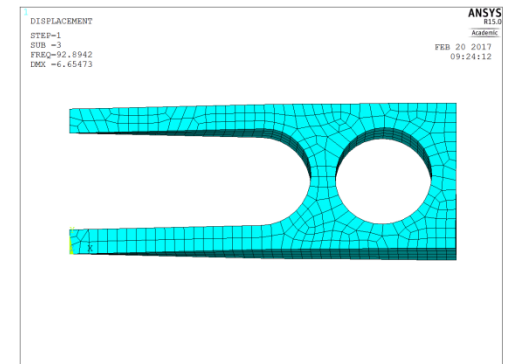
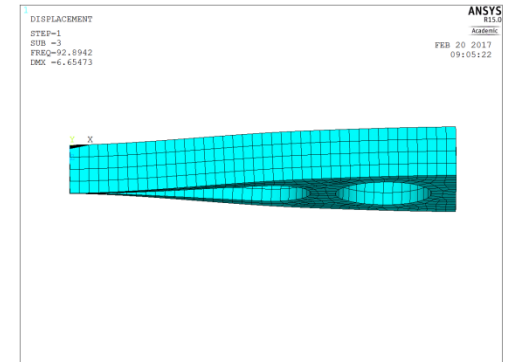
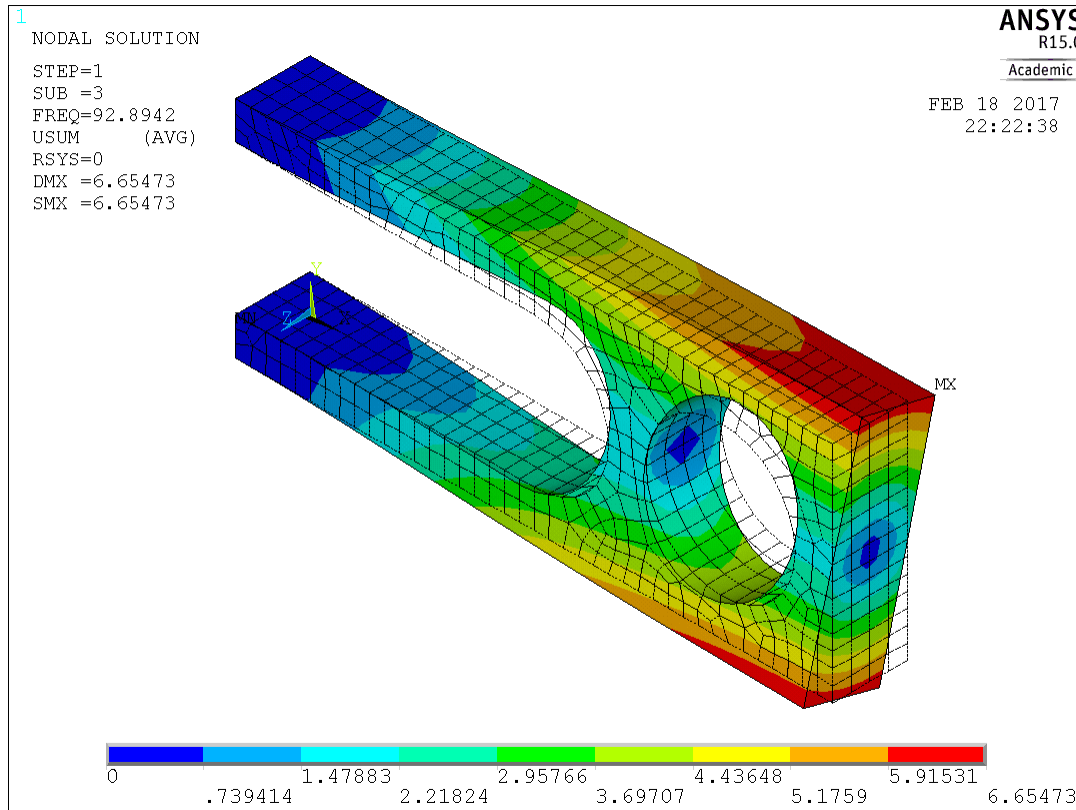


- Análisis modal de una pieza empotrada



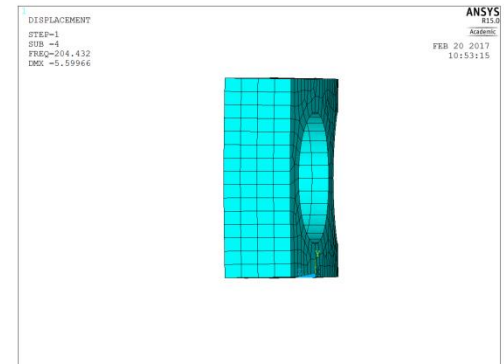
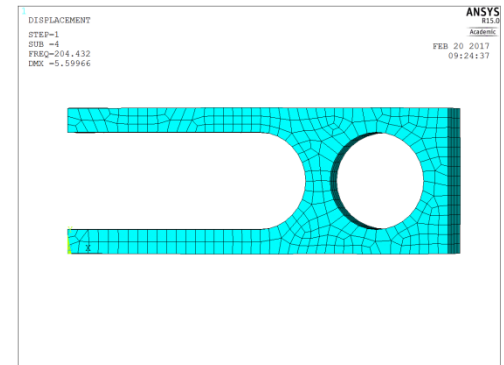
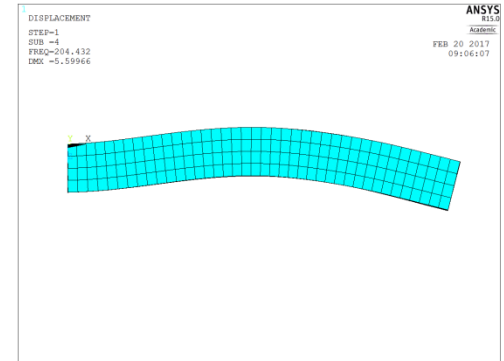
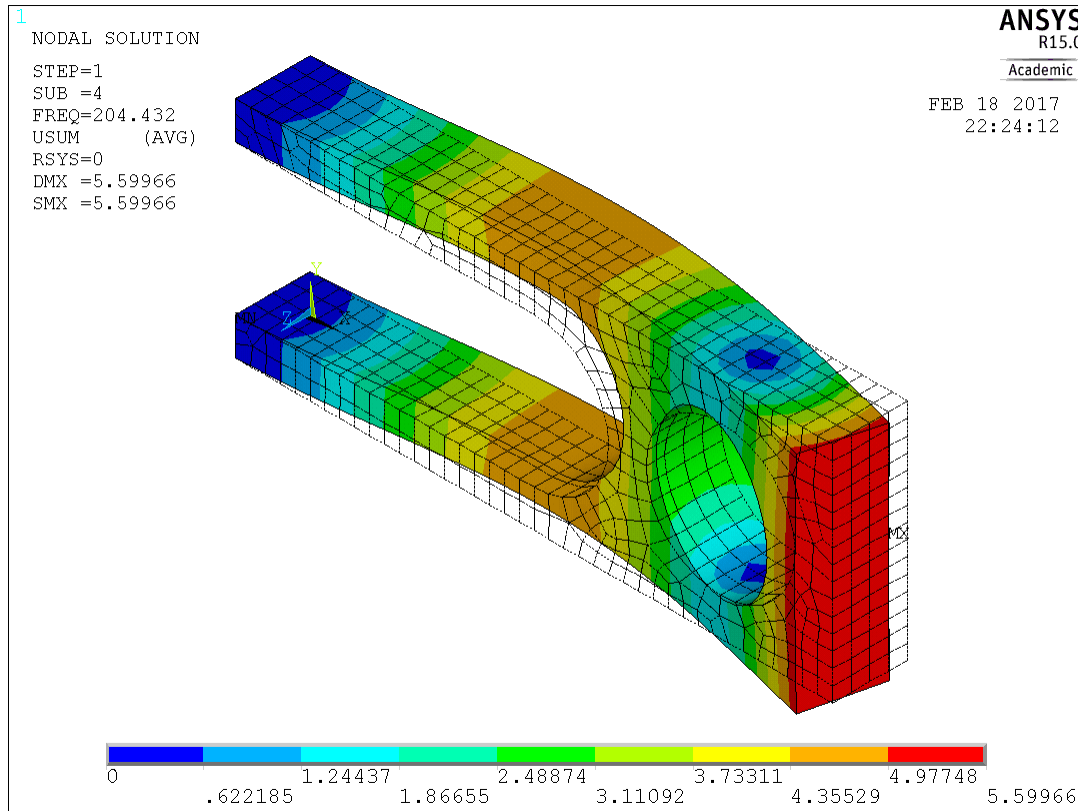


- Análisis modal de una pieza empotrada



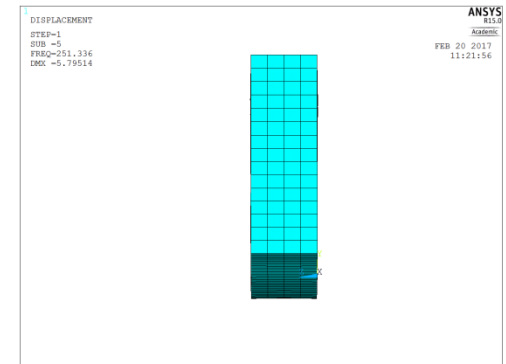
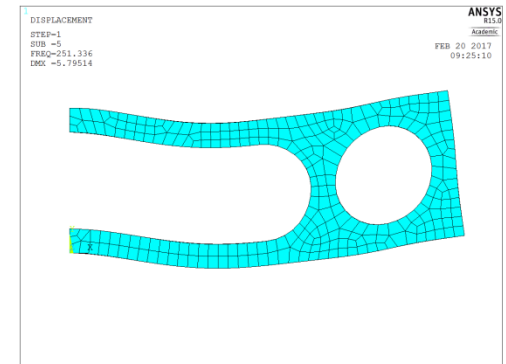
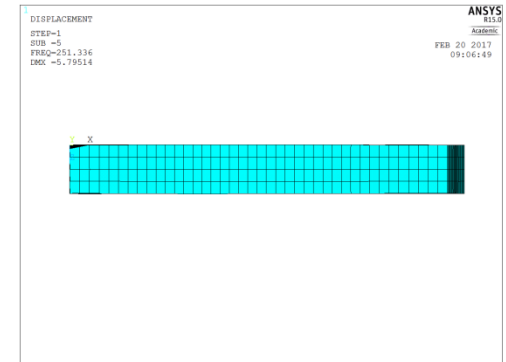
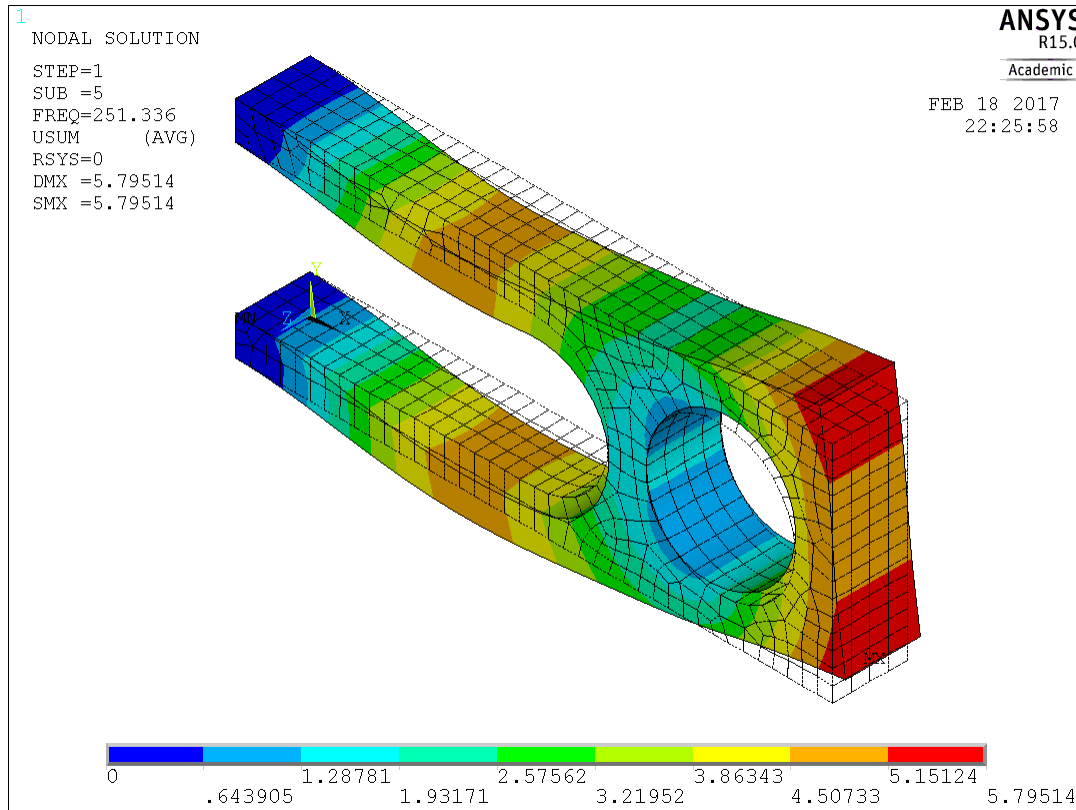


- Análisis modal de una pieza empotrada



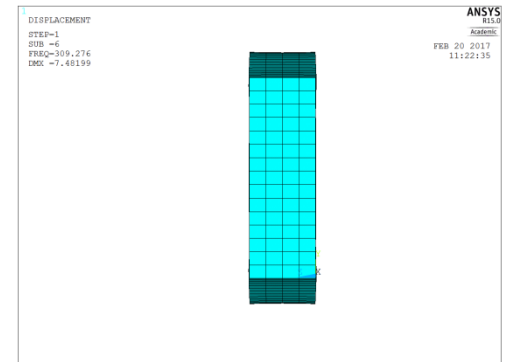
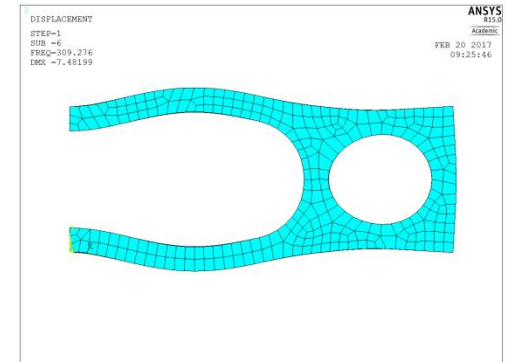
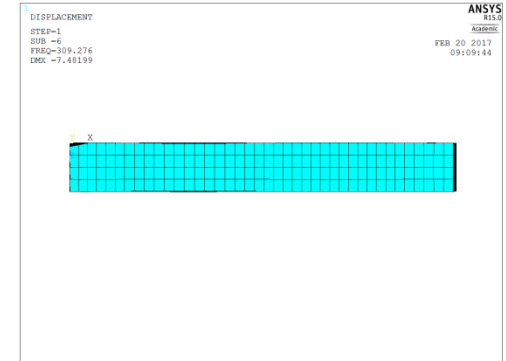
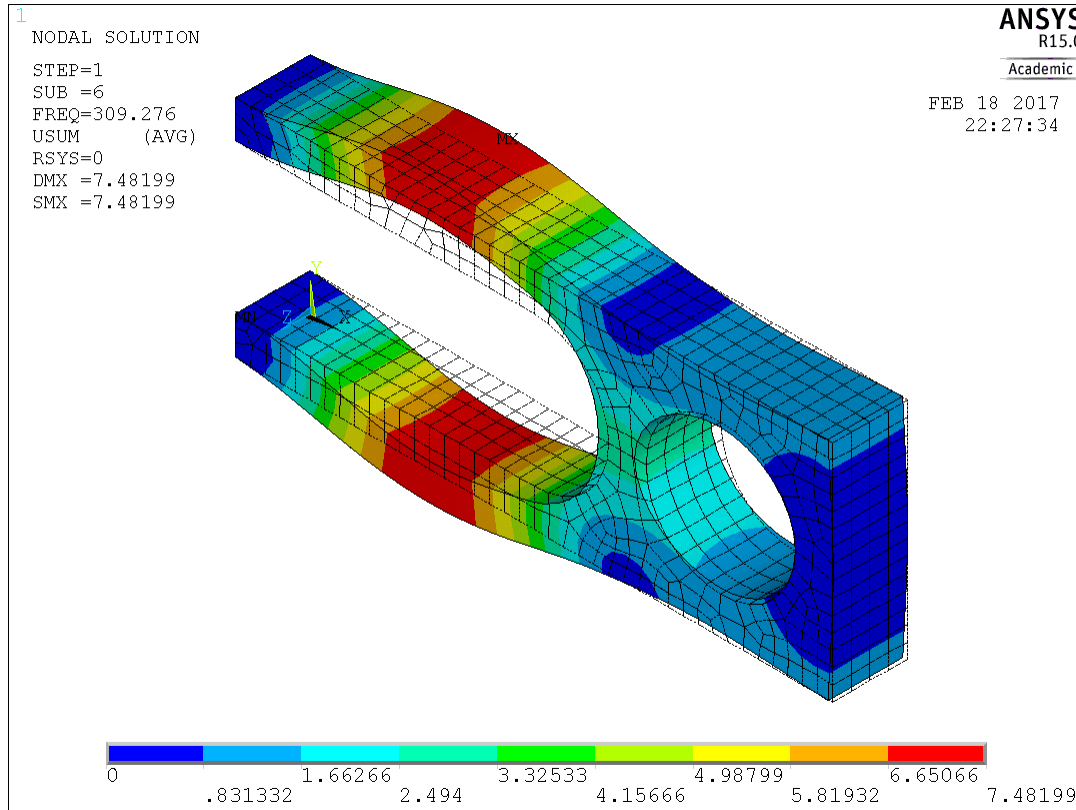


- Análisis modal de una pieza empotrada



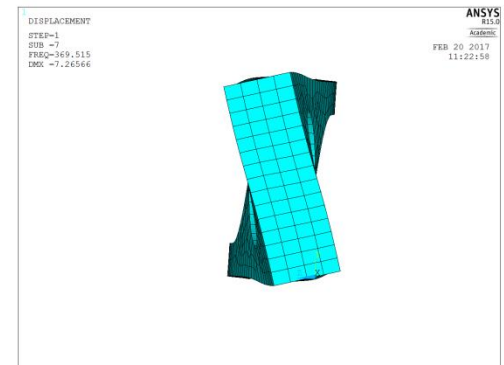
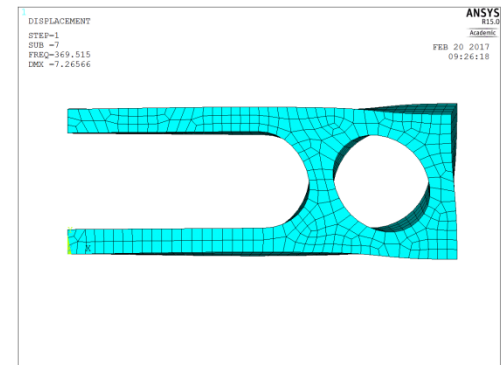
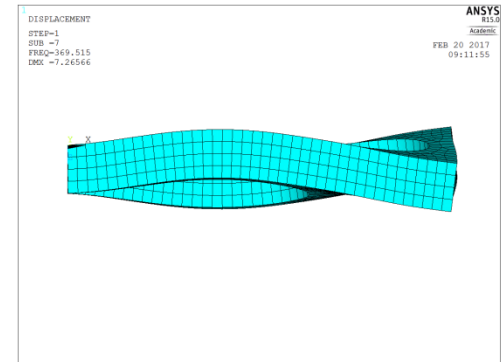
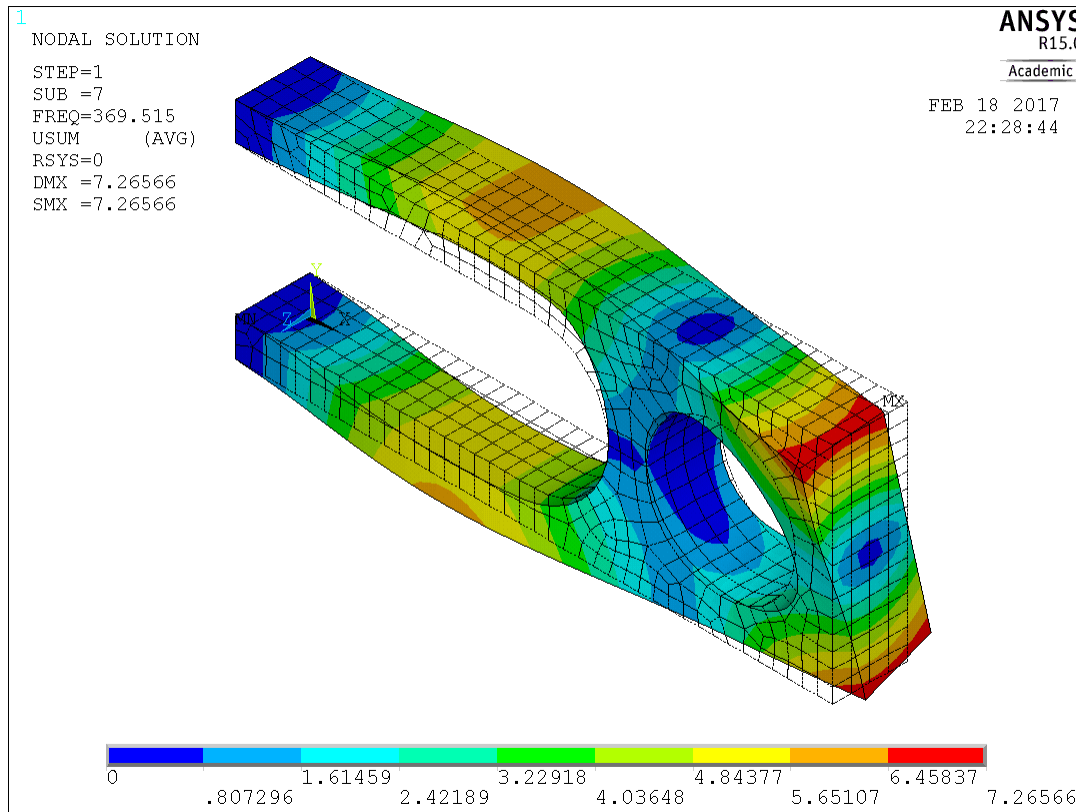


- Análisis modal de una pieza empotrada



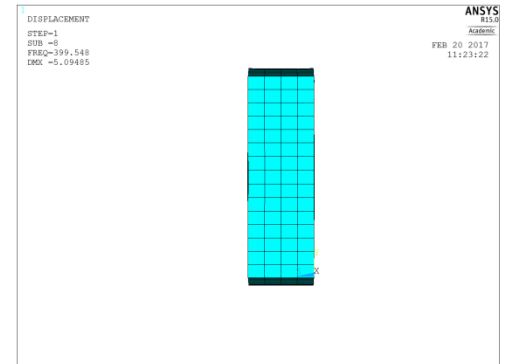
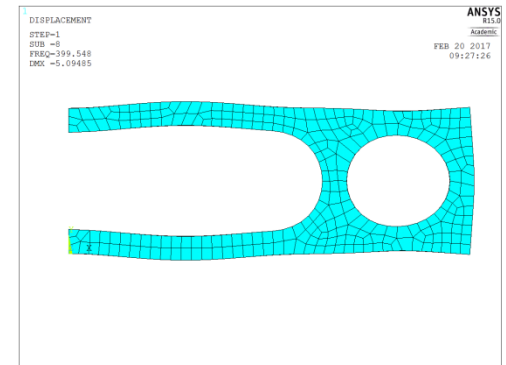
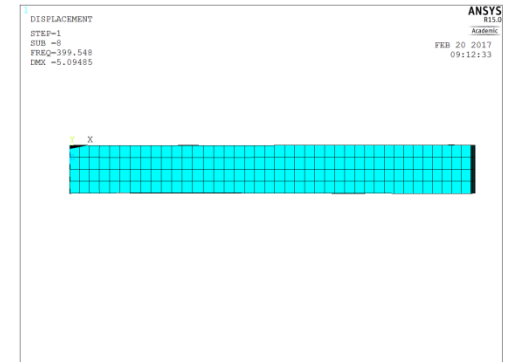
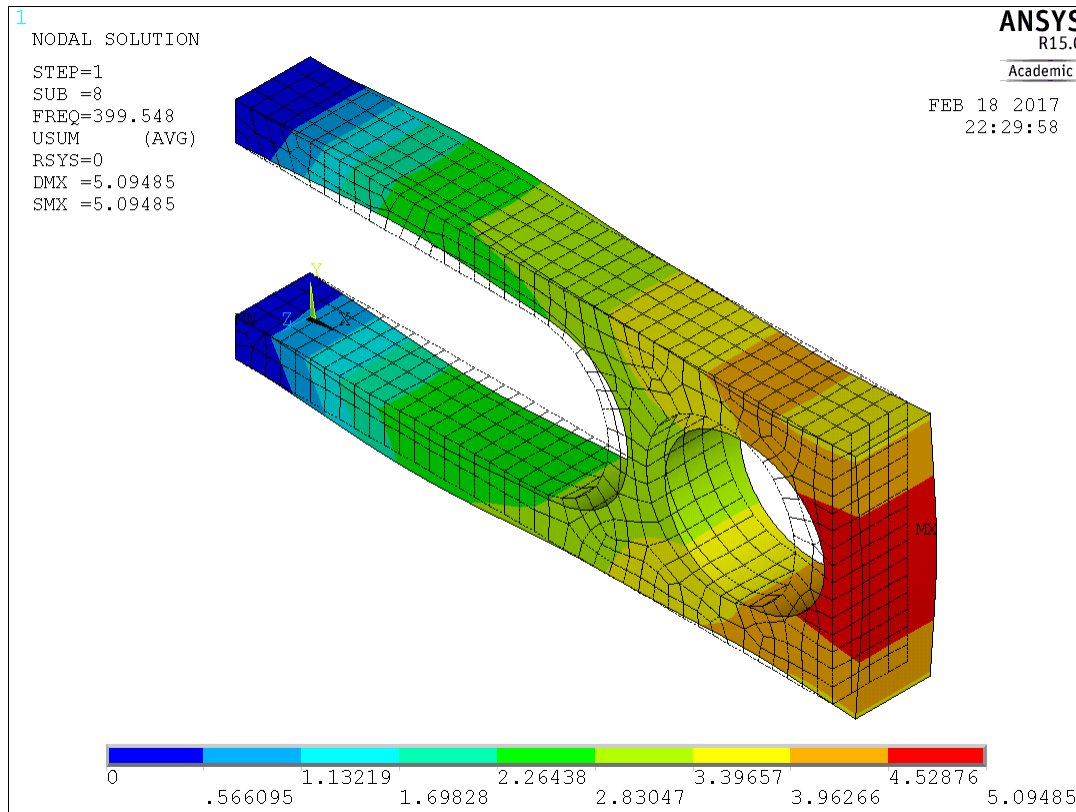


- Análisis modal de una pieza empotrada



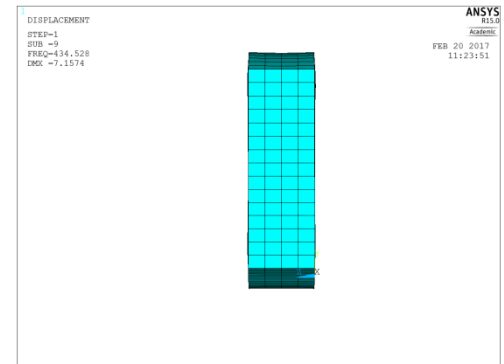
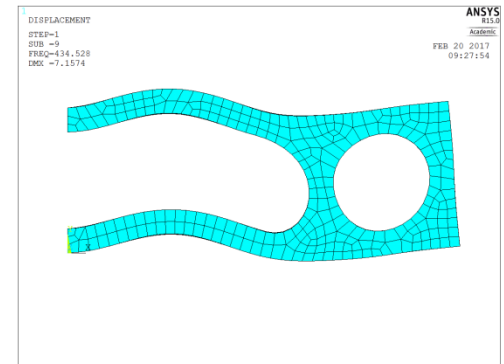
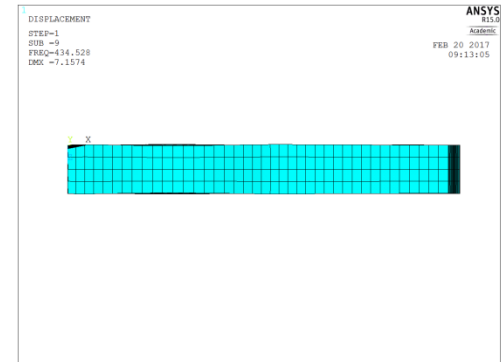
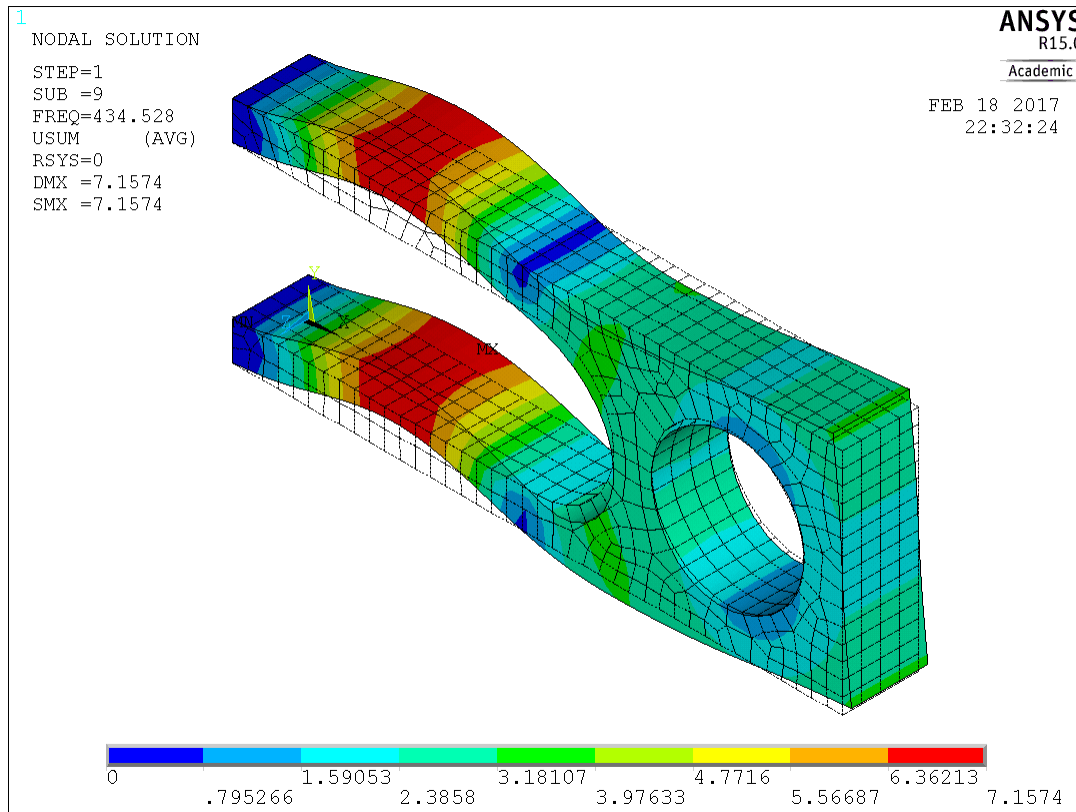


- Análisis modal de una pieza empotrada



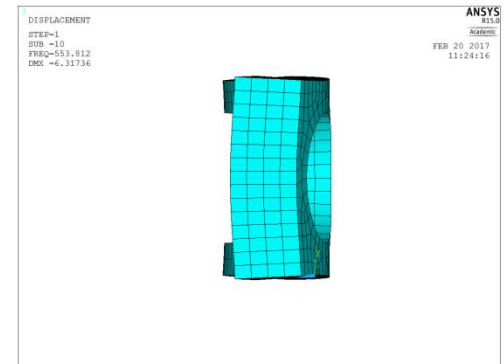
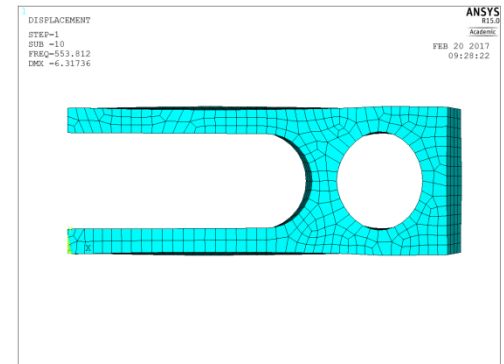
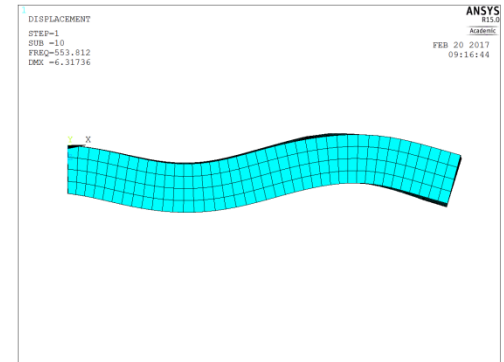
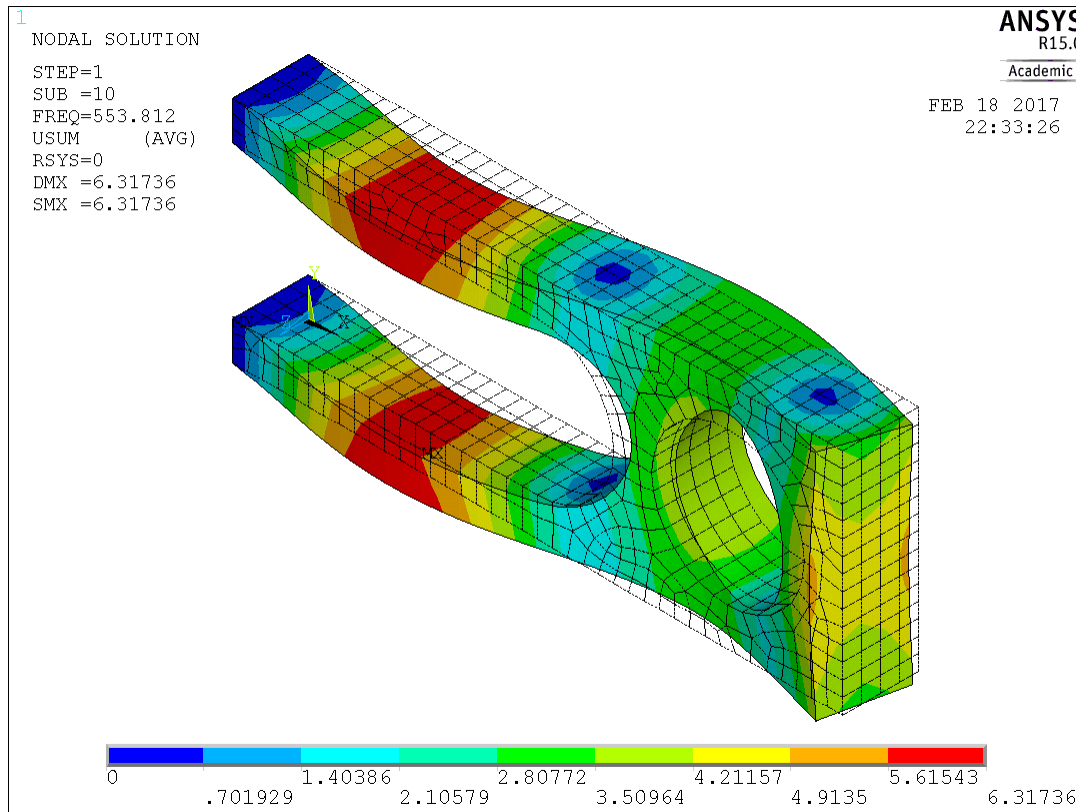


- Análisis modal de una pieza empotrada





- Análisis modal de una pieza empotrada

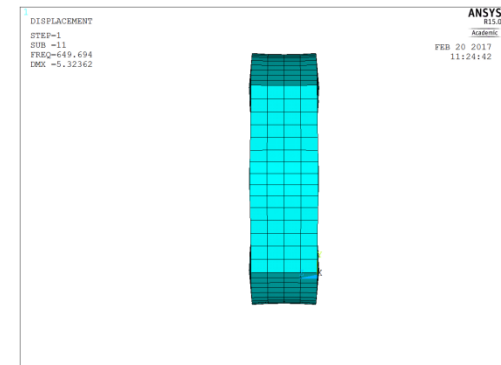
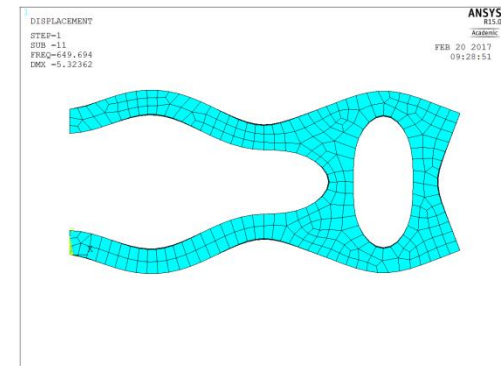
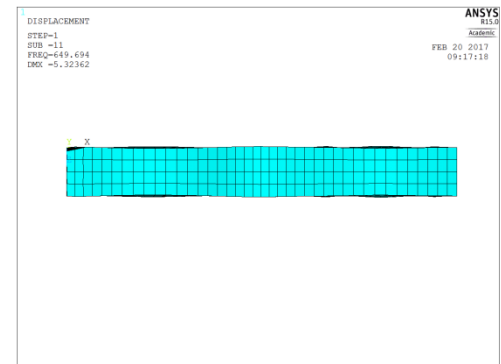
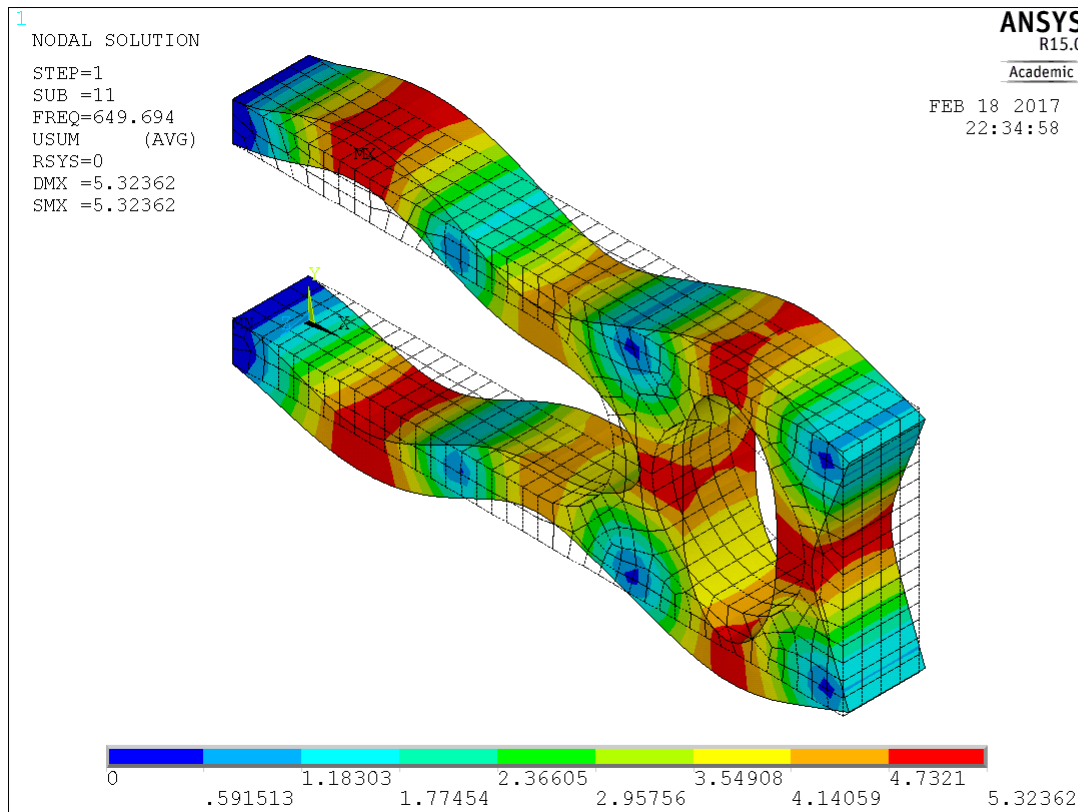




Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

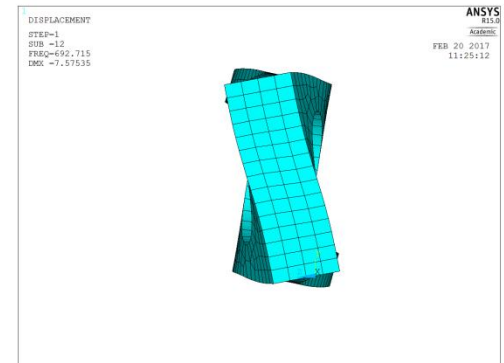
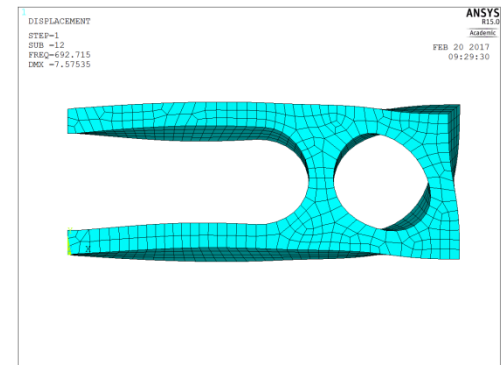
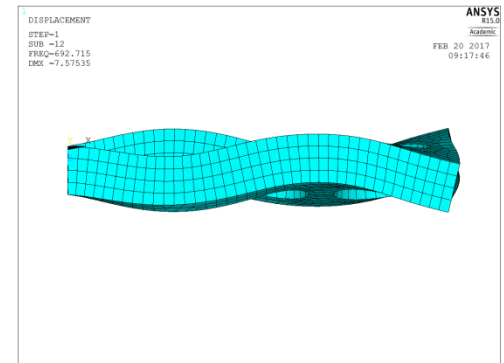
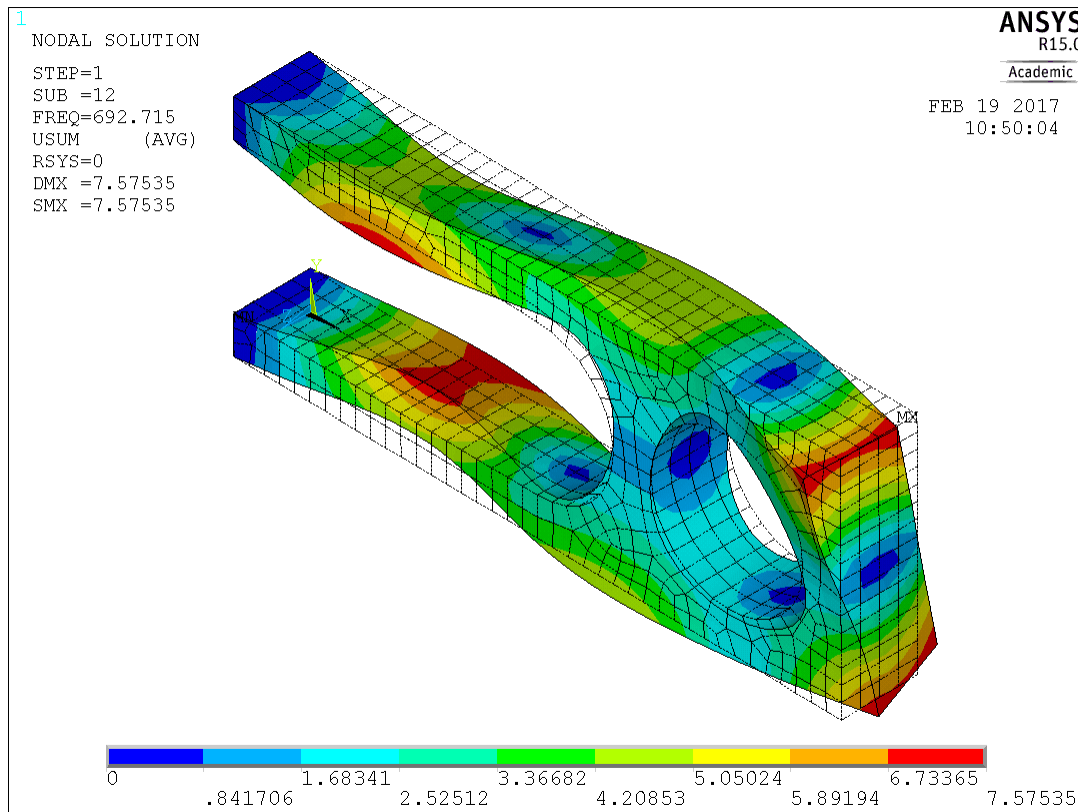


- Análisis modal de una pieza empotrada



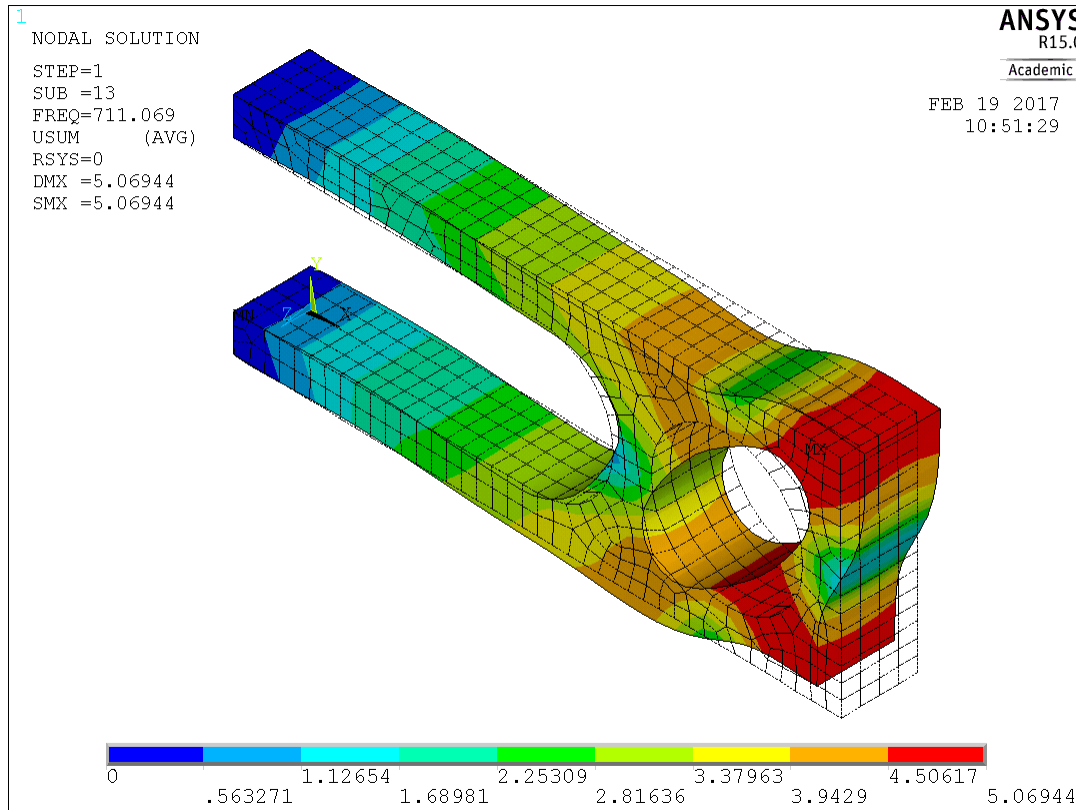


- Análisis modal de una pieza empotrada





- Análisis modal de una pieza empotrada



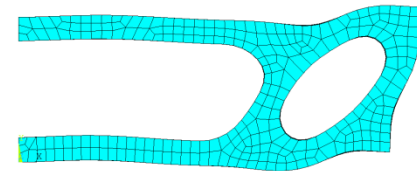
DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =13
FREQ=711.069
DMX =5.06944

ANSYS R15.0
Academic
FEB 20 2017
09:18:39



DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =13
FREQ=711.069
DMX =5.06944

ANSYS R15.0
Academic
FEB 20 2017
09:29:54



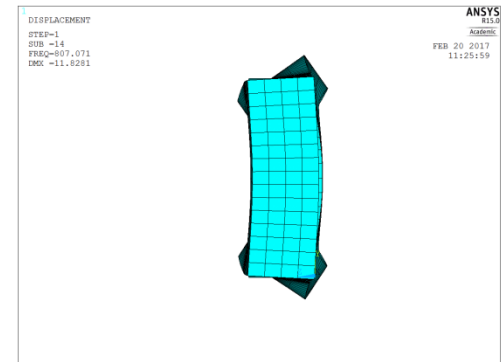
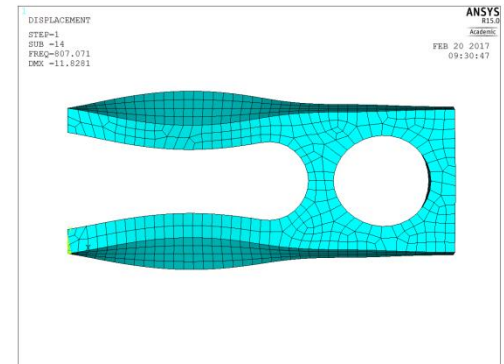
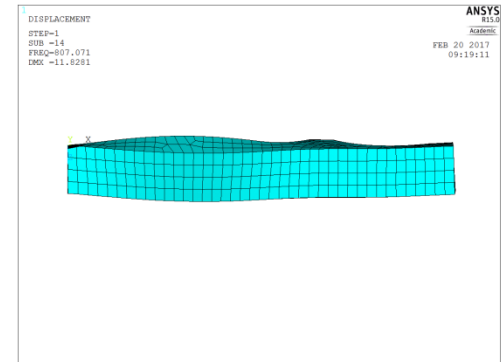
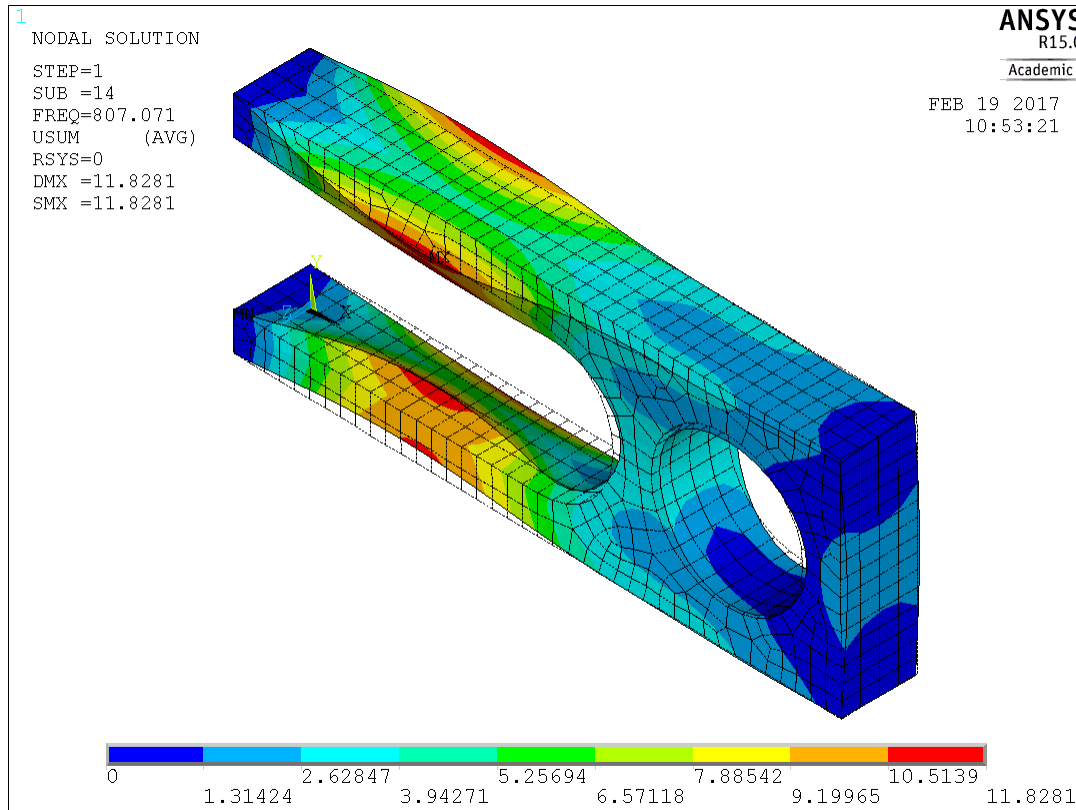
DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =13
FREQ=711.069
DMX =5.06944

ANSYS R15.0
Academic
FEB 20 2017
11:28:39



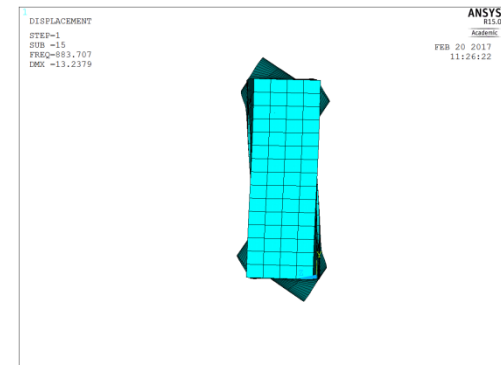
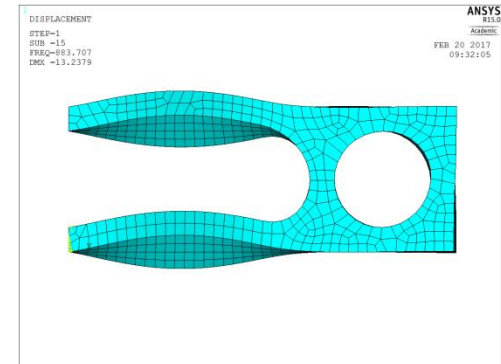
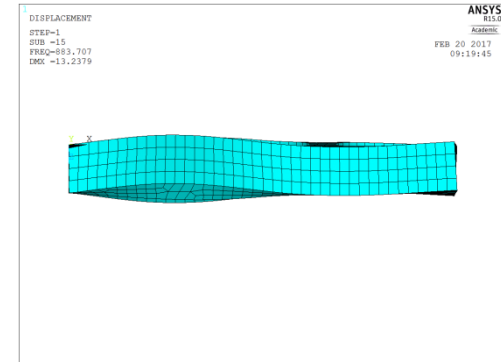
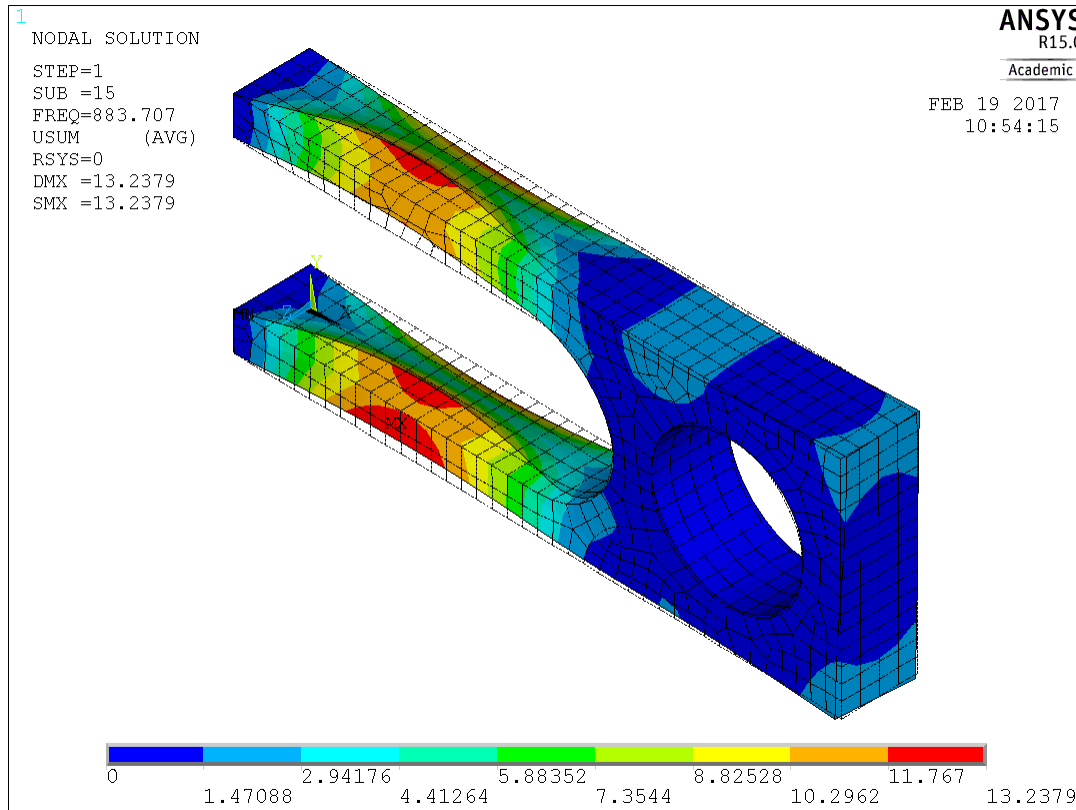


- Análisis modal de una pieza empotrada



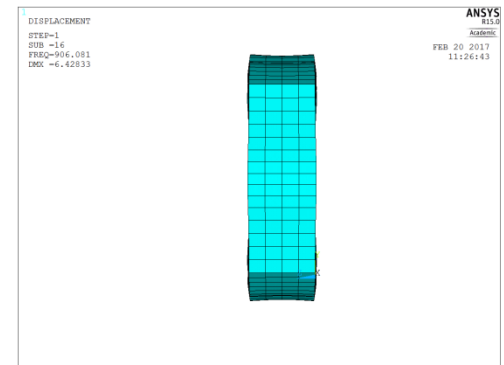
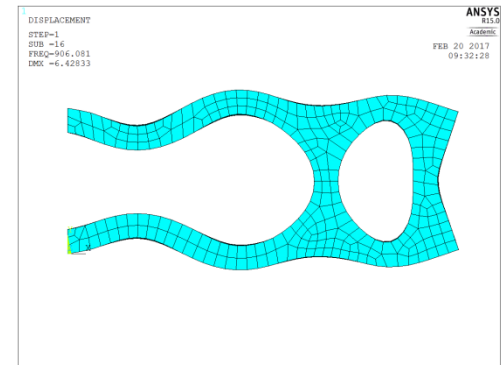
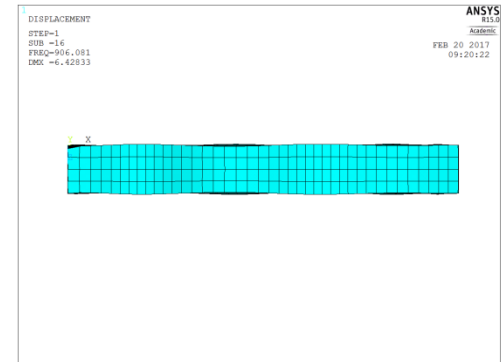
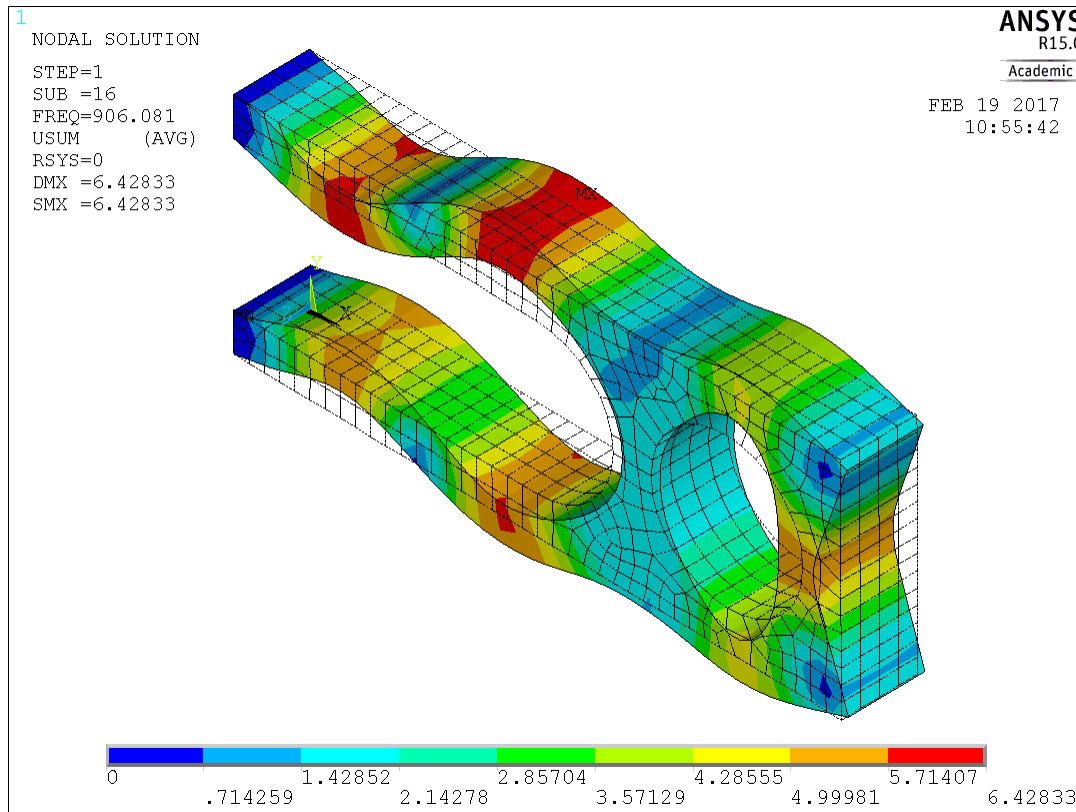


- Análisis modal de una pieza empotrada





- Análisis modal de una pieza empotrada

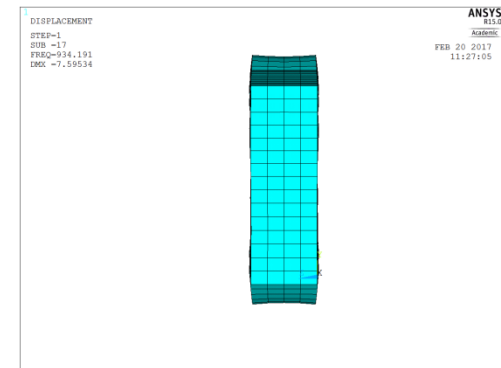
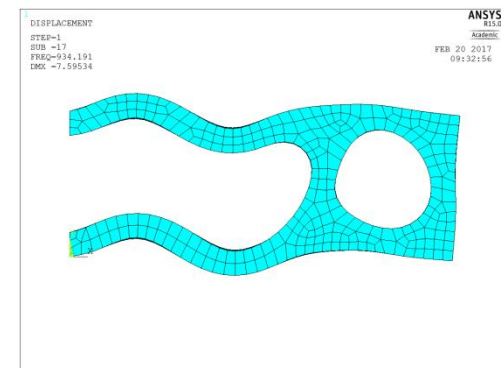
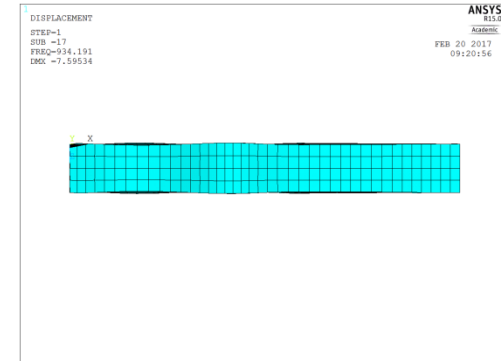
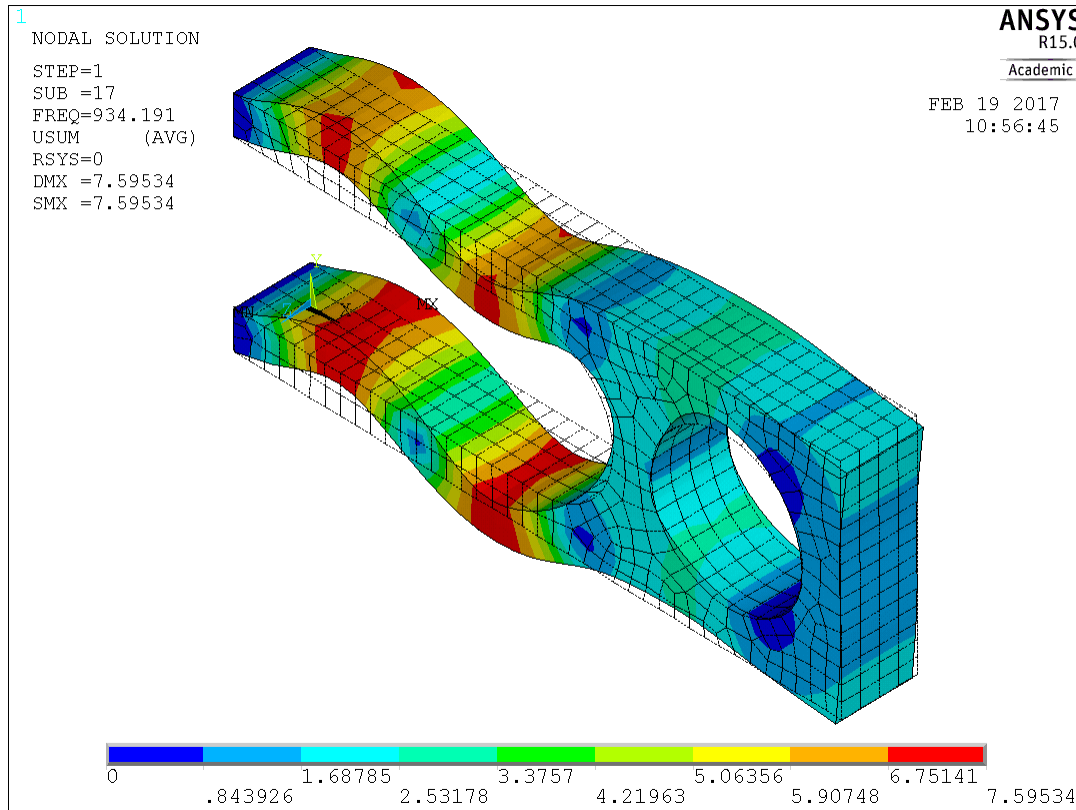




Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

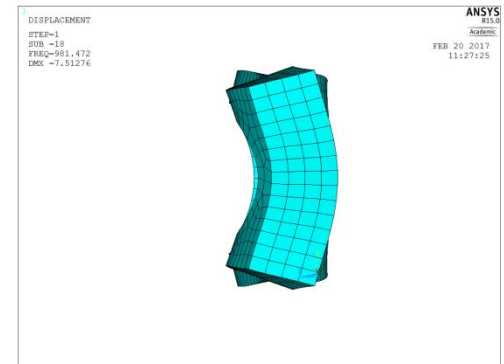
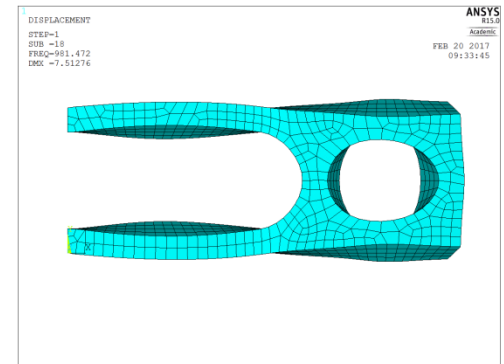
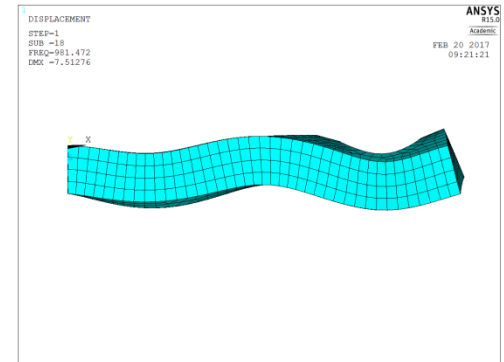
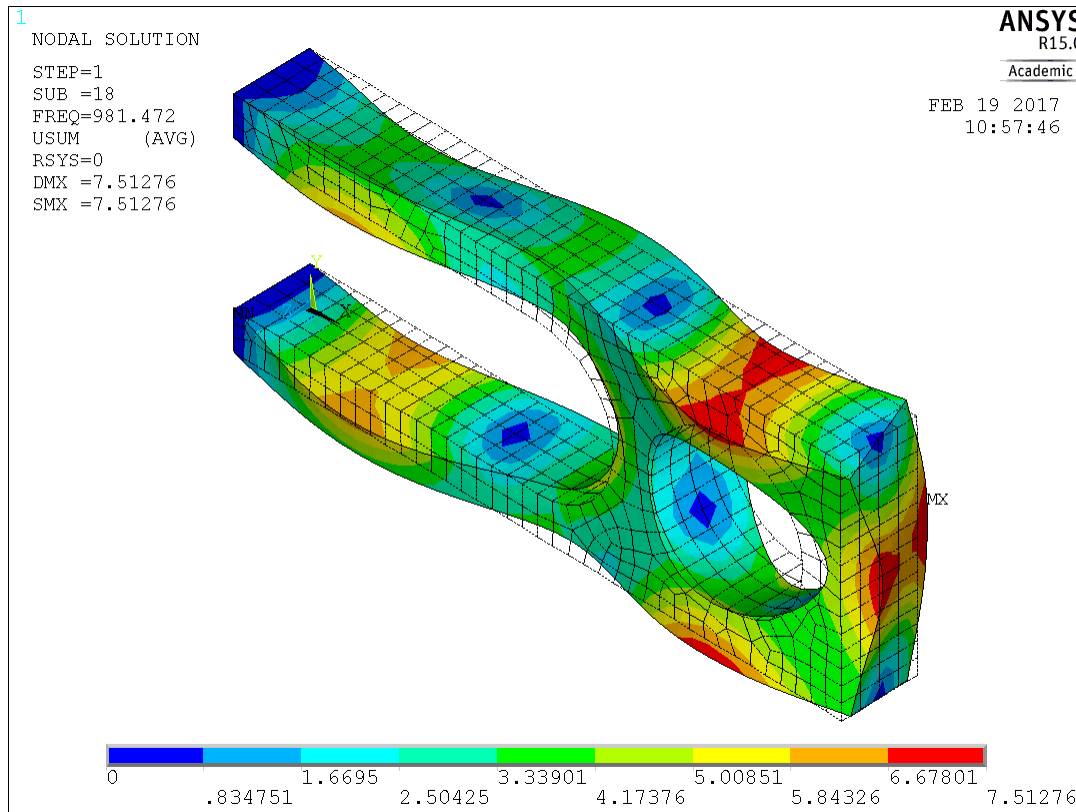


- Análisis modal de una pieza empotrada





- Análisis modal de una pieza empotrada

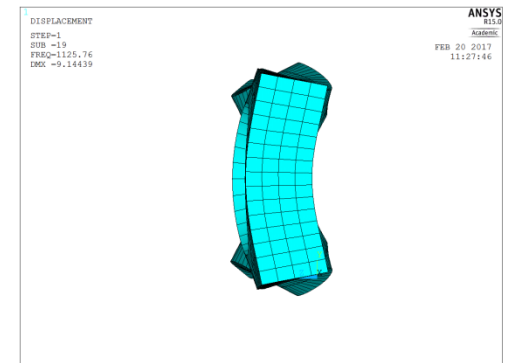
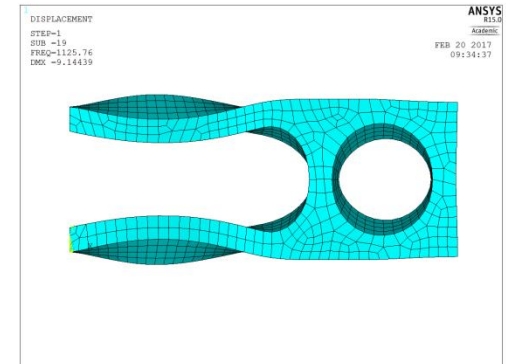
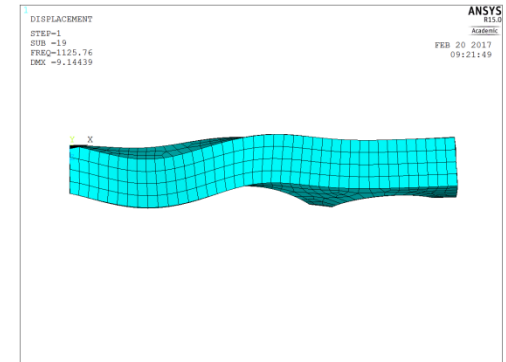
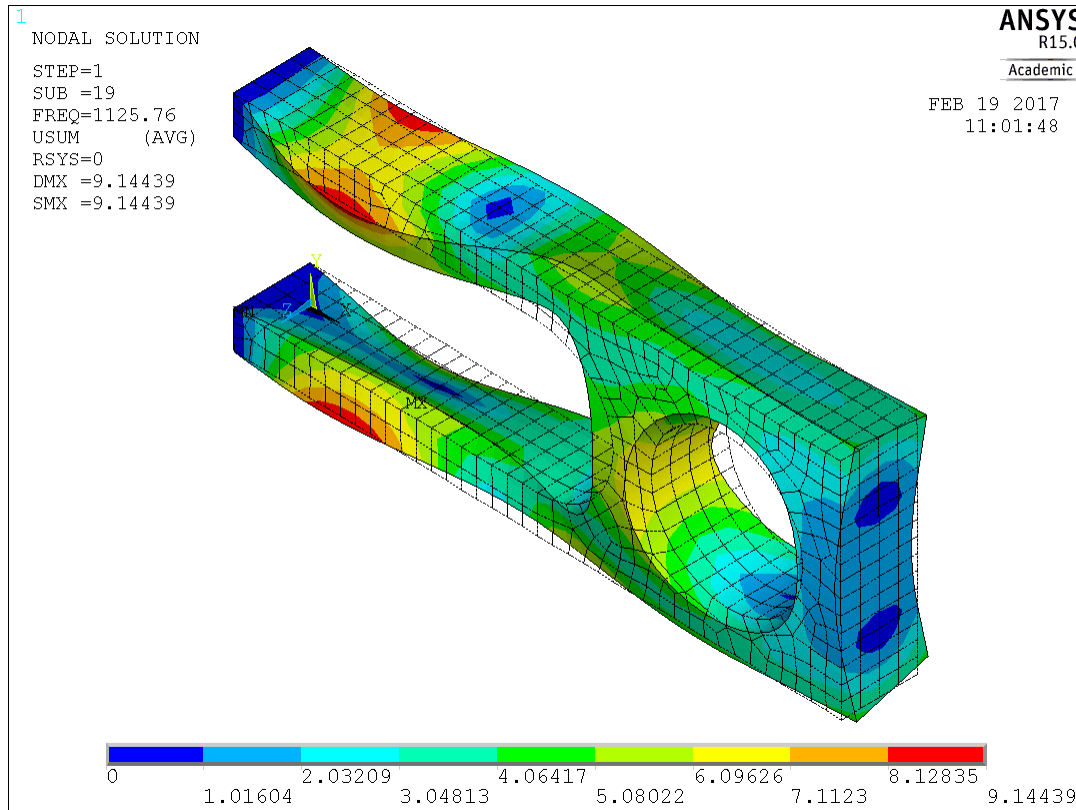




Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

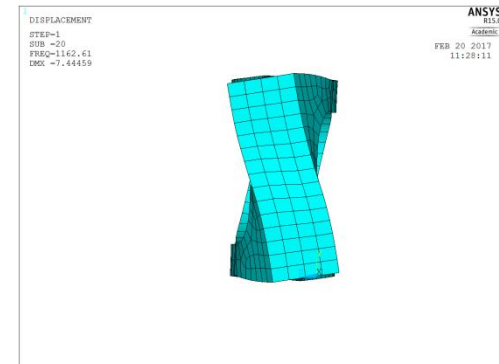
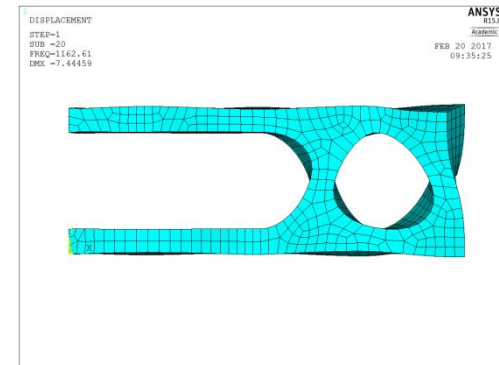
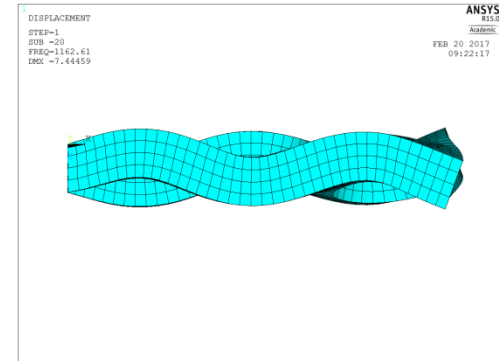
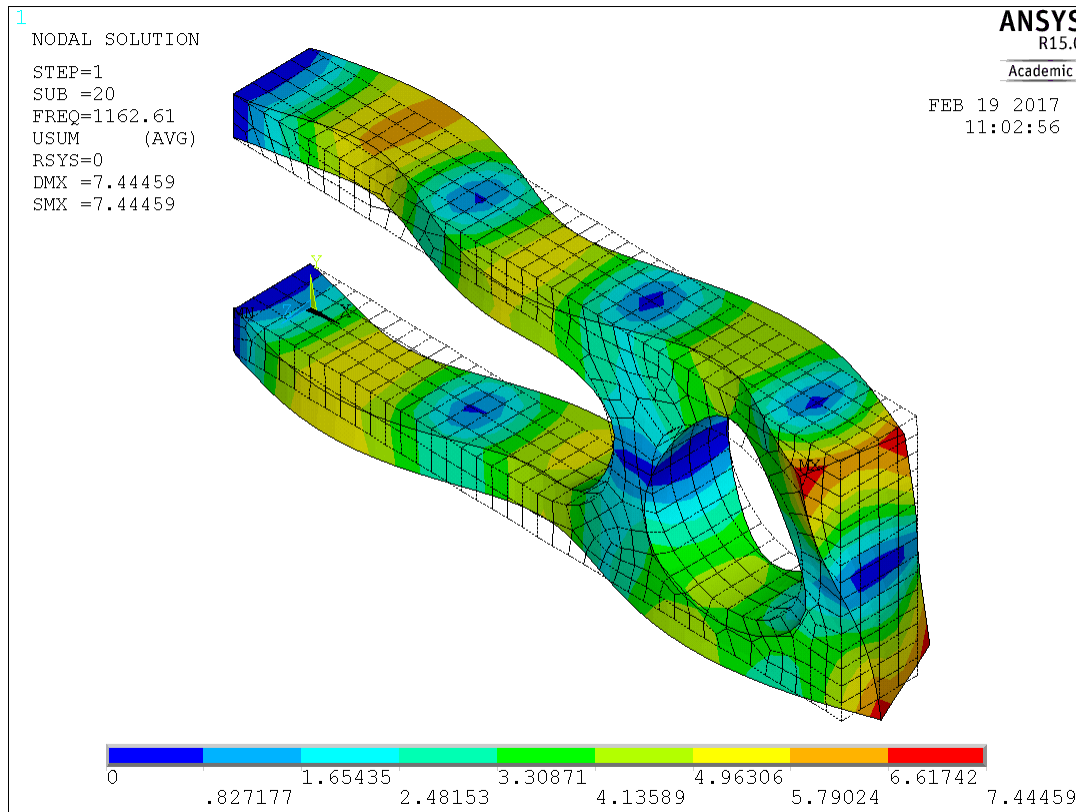


- Análisis modal de una pieza empotrada



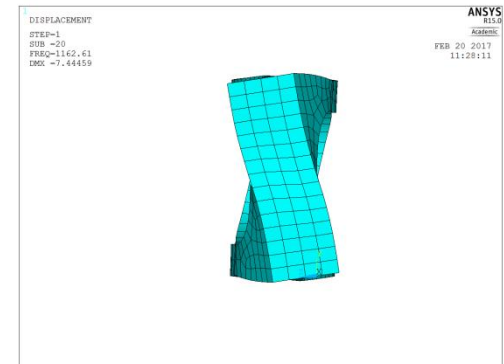
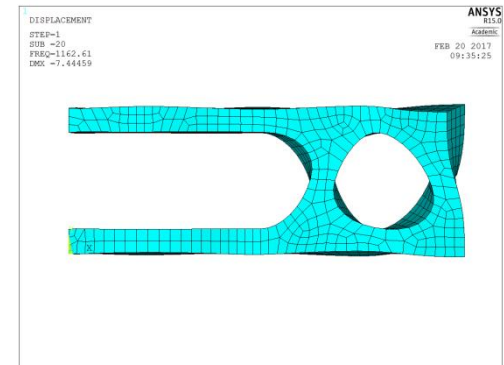
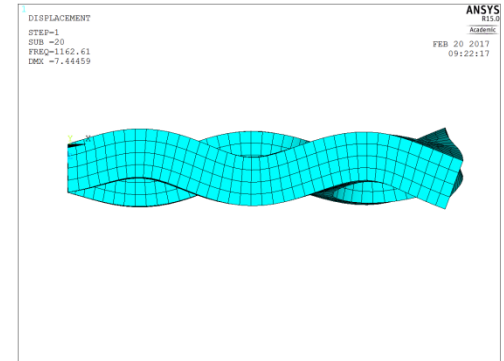
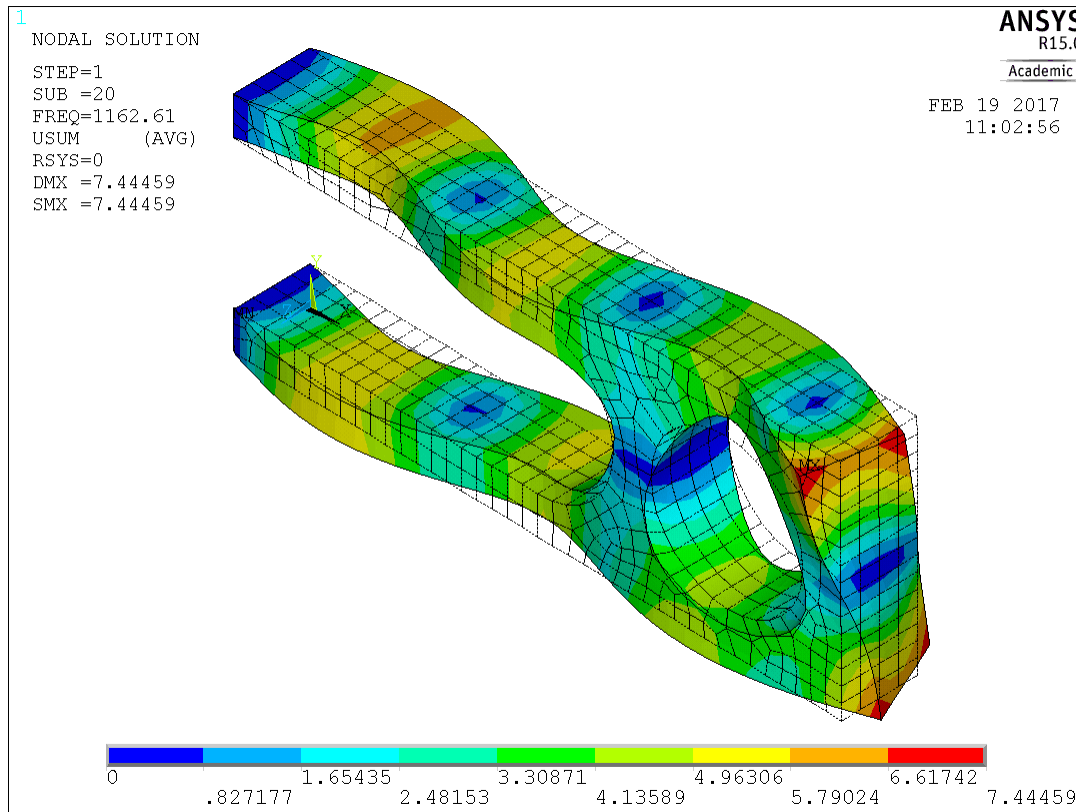


- Análisis modal de una pieza empotrada



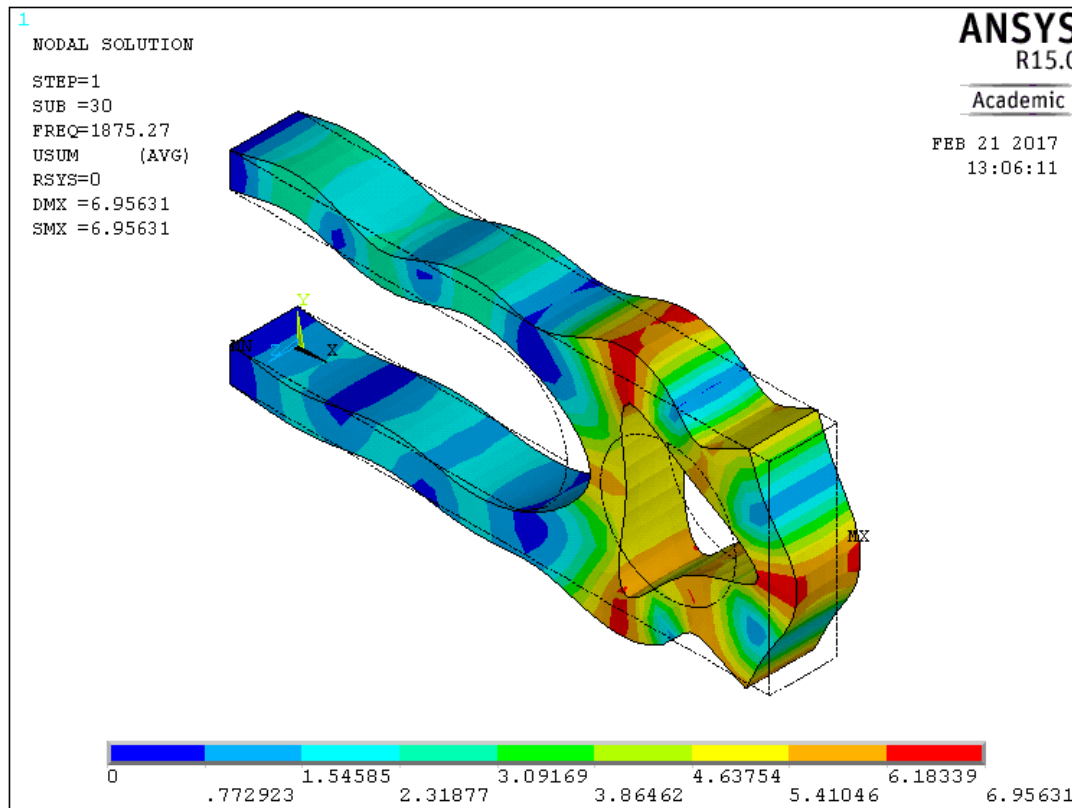


- Análisis modal de una pieza empotrada



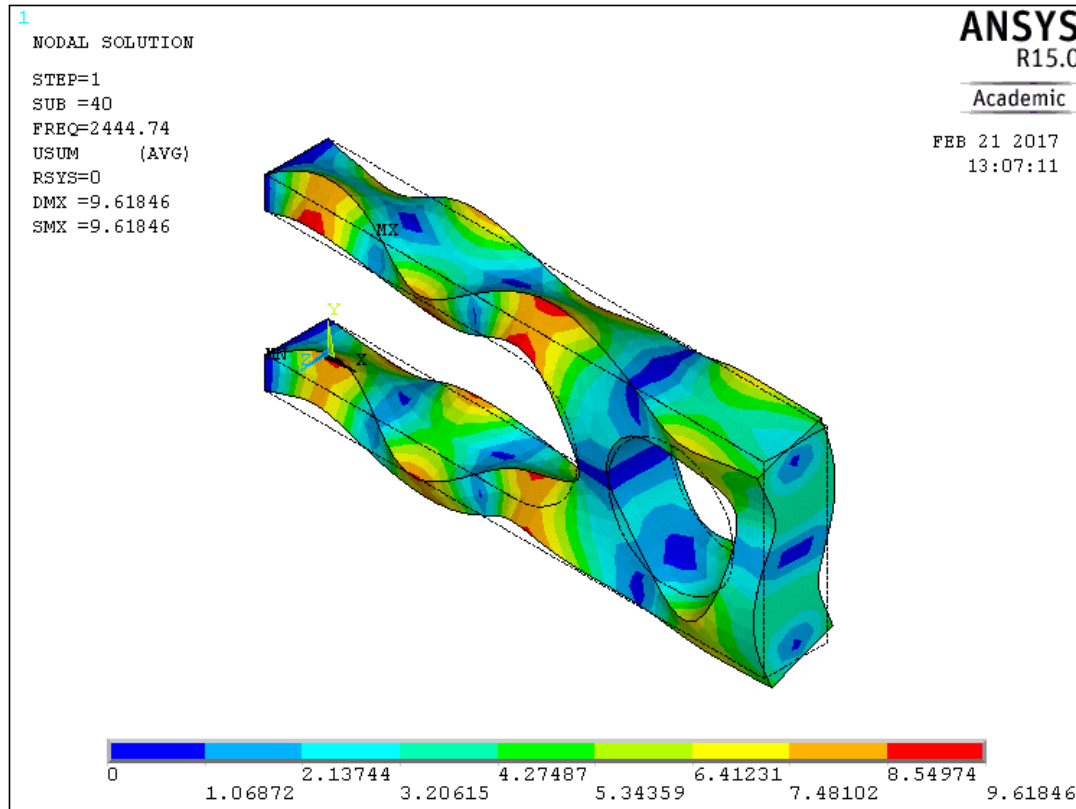


- Análisis modal de una pieza empotrada



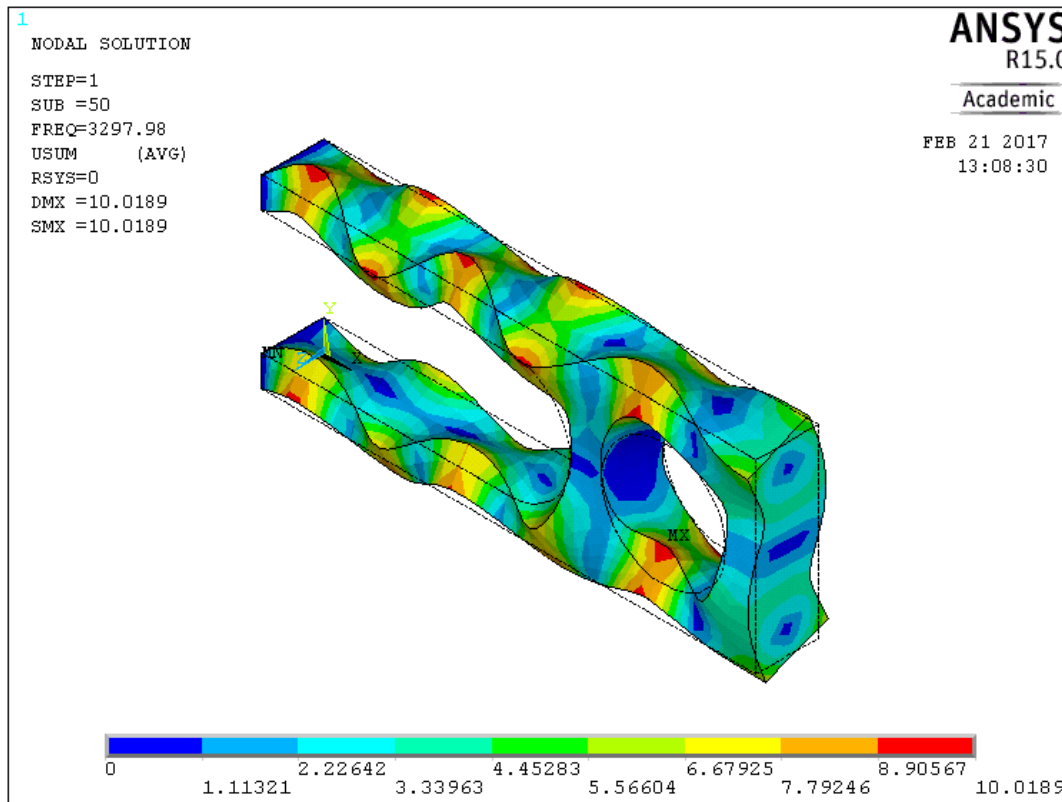


- Análisis modal de una pieza empotrada



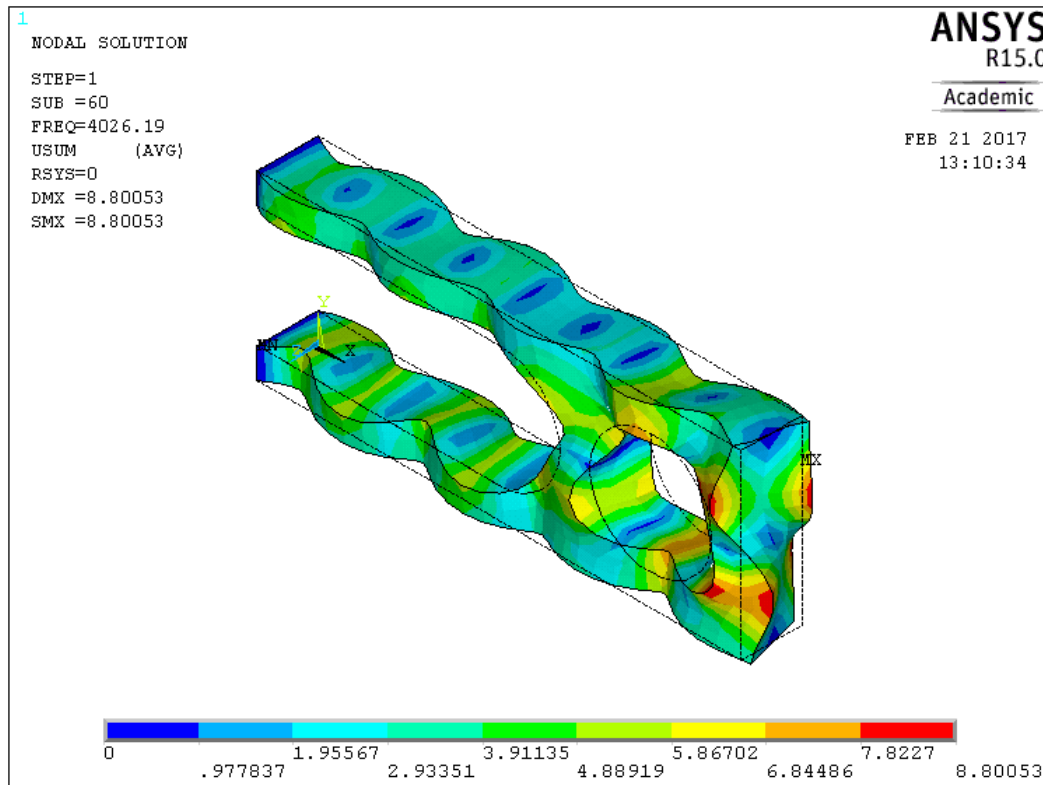


- Análisis modal de una pieza empotrada



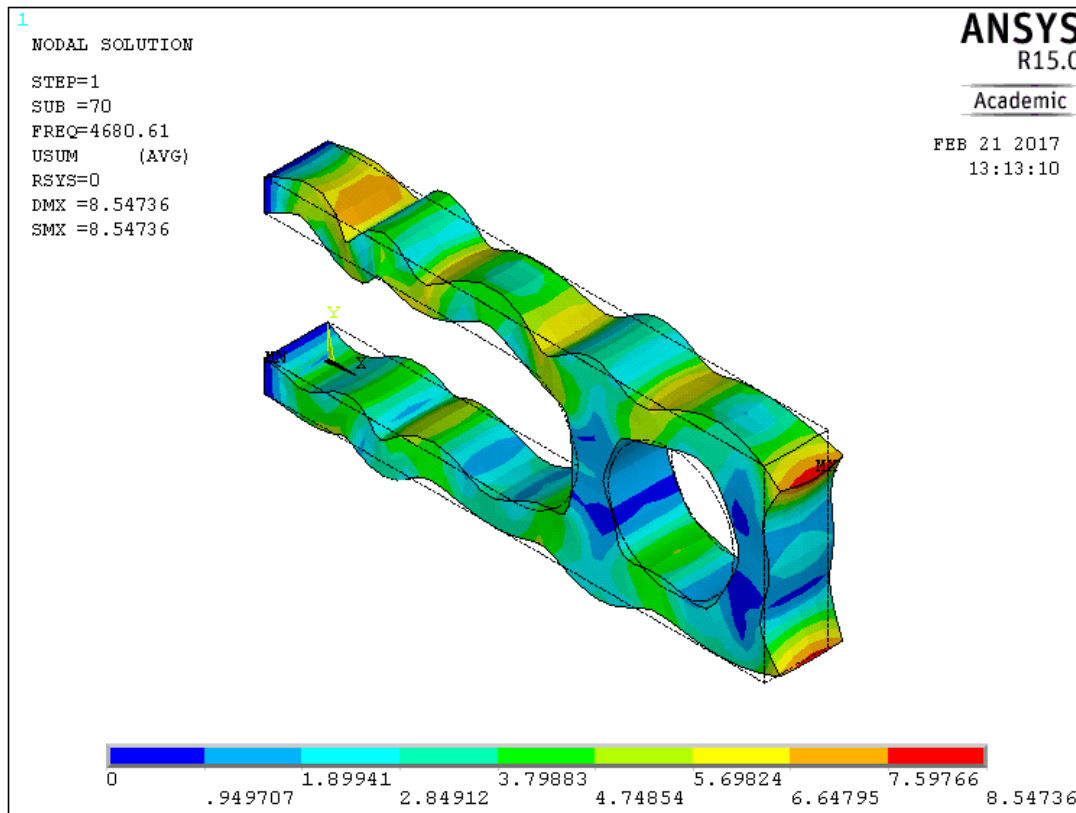


- Análisis modal de una pieza empotrada





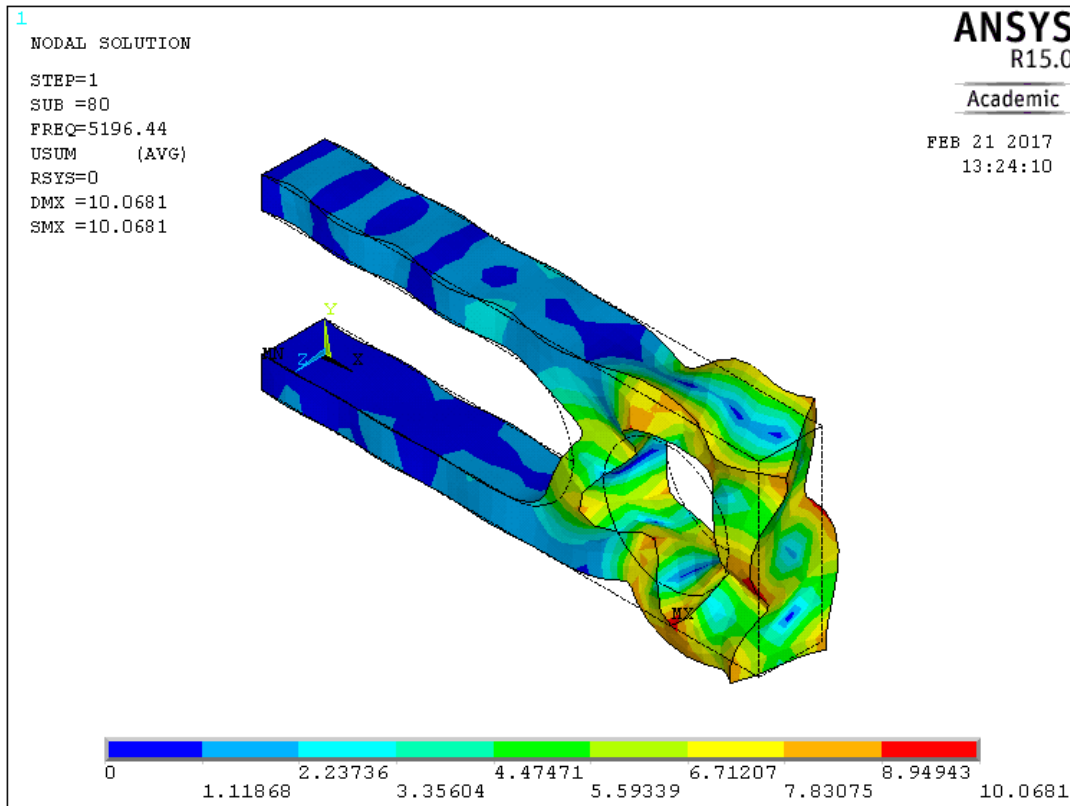
- Análisis modal de una pieza empotrada



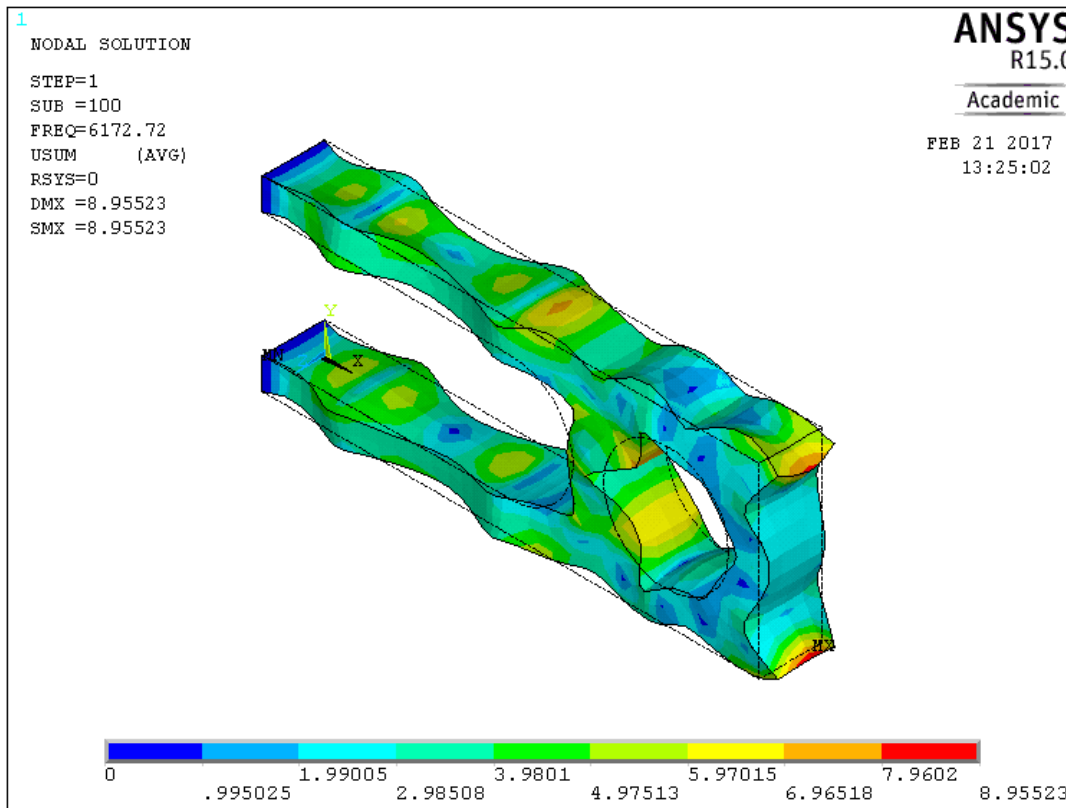
- Además de una geometría complicada, los modos altos tienen una frecuencia natural muy alta, por lo que es muy difícil que existan fuerzas que las exciten porque haría falta demasiada energía. Si existen esas fuerzas, serán de una magnitud tan pequeña que implicarían vibraciones de amplitud despreciable.
- Por ello, al hacer un análisis modal sólo se suelen estudiar los modos más bajos (unos pocos, su cantidad depende de las fuerzas a las que vaya a estar sometido el sistema). A veces incluso puede ser suficiente con uno
- Así, al realizar un análisis modal, se debe especificar cuántos modos se quieren calcular. El programa no calcula todos los demás, consiguiendo ahorro de coste computacional



- Análisis modal de una pieza empotrada



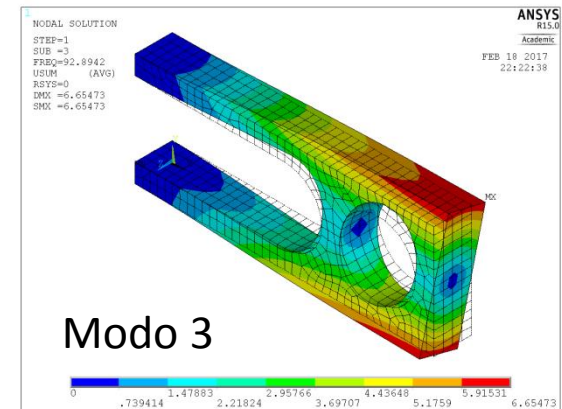
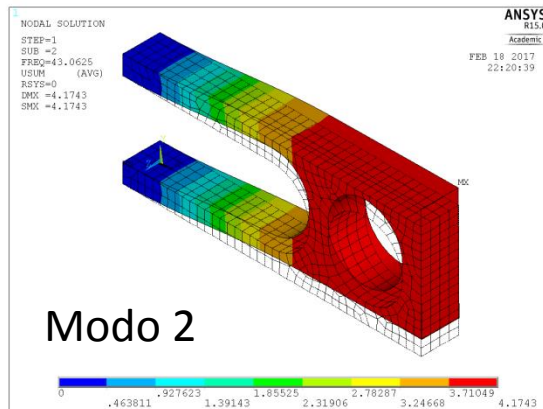
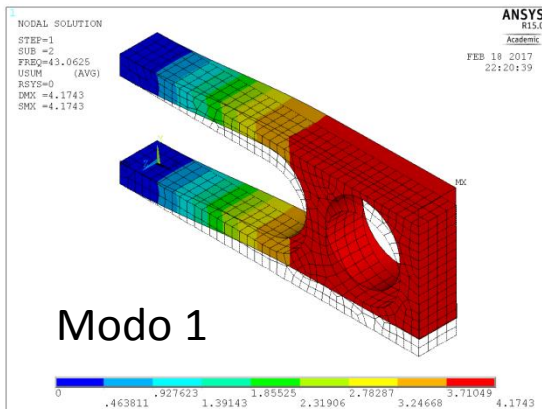
- Análisis modal de una pieza empotrada



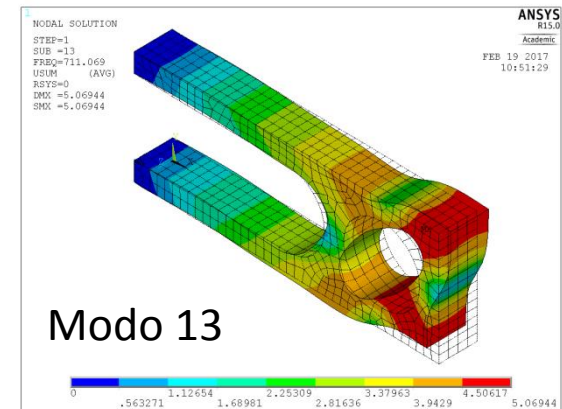
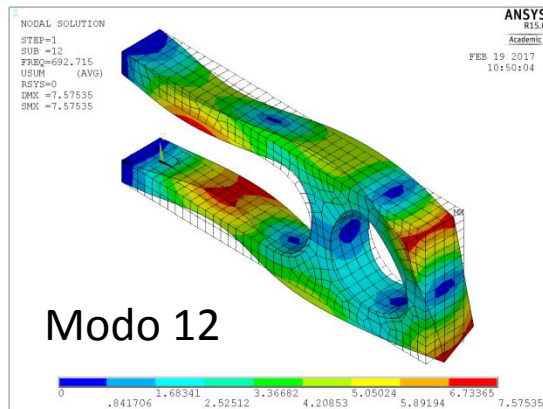
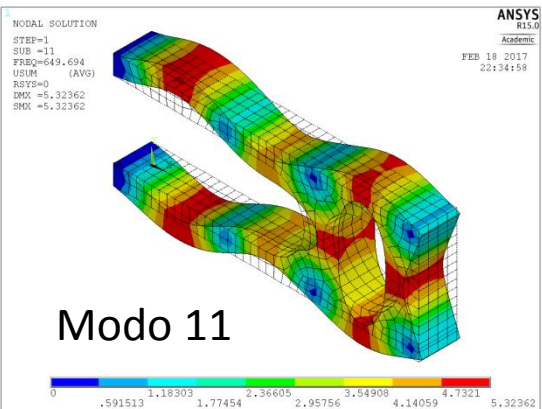


- Los modos bajos tiene geometrías sencillas, y los modos altos geometrías complicadas

MODOS BAJOS

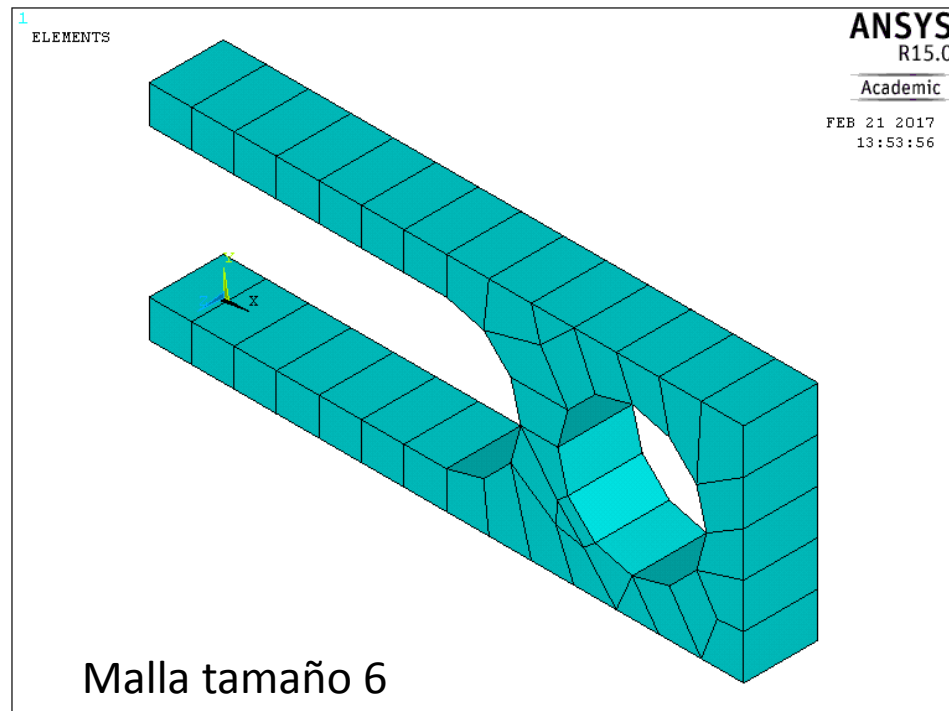
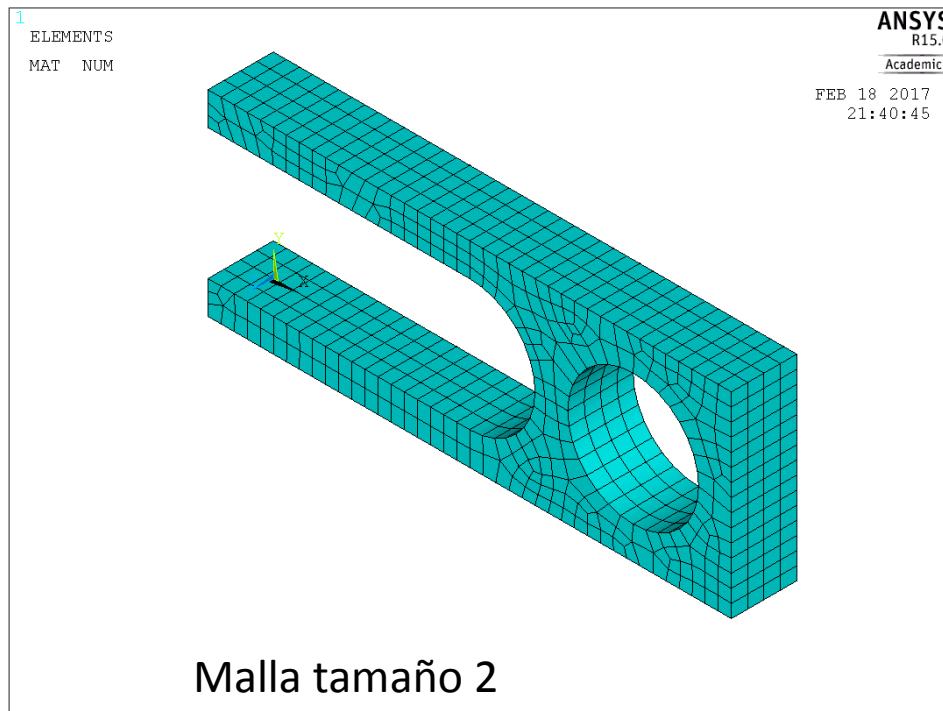


MODOS ALTOS





- Para un análisis modal, teniendo en cuenta que sólo se van a calcular los modos más bajos, la malla puede ser densa, ya que con pocos elementos se “capta” bien su geometría





- Se observa que los resultados para modos bajos son muy similares en ambos modelos

Results File: qfer.rst

Available Data Sets:

Set	Frequency	Load Step
1	30.063	1
2	43.062	1
3	92.894	1
4	204.43	1
5	251.34	1
6	309.28	1
7	369.52	1
8	399.55	1
9	434.53	1
10	553.81	1
11	649.69	1
12	692.72	1
13	711.07	1
14	807.07	1
15	883.71	1
16	906.08	1

Read

Close

Malla tamaño 2

Results File: qfer111.rst

Available Data Sets:

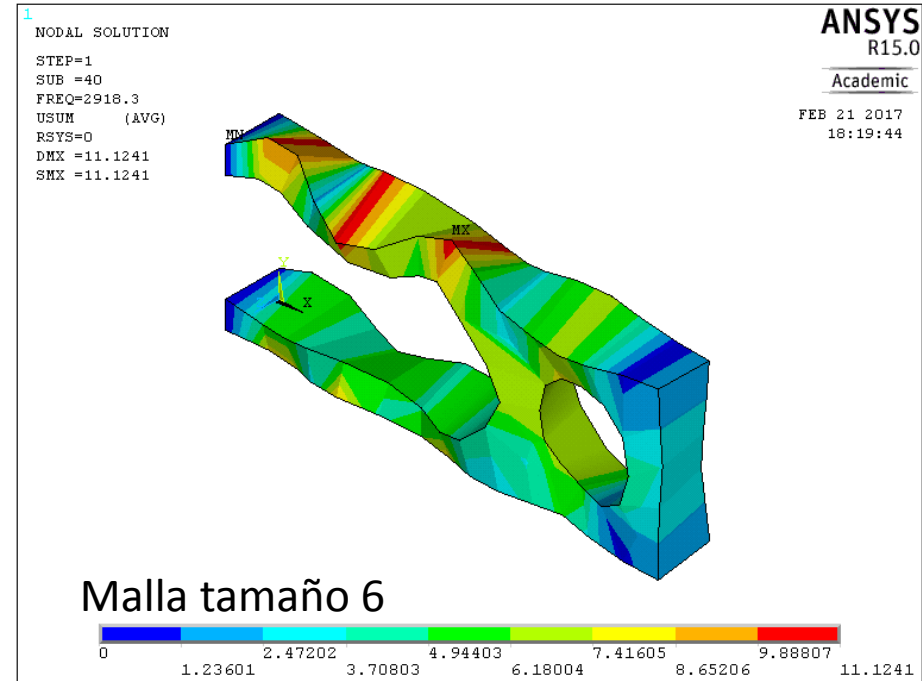
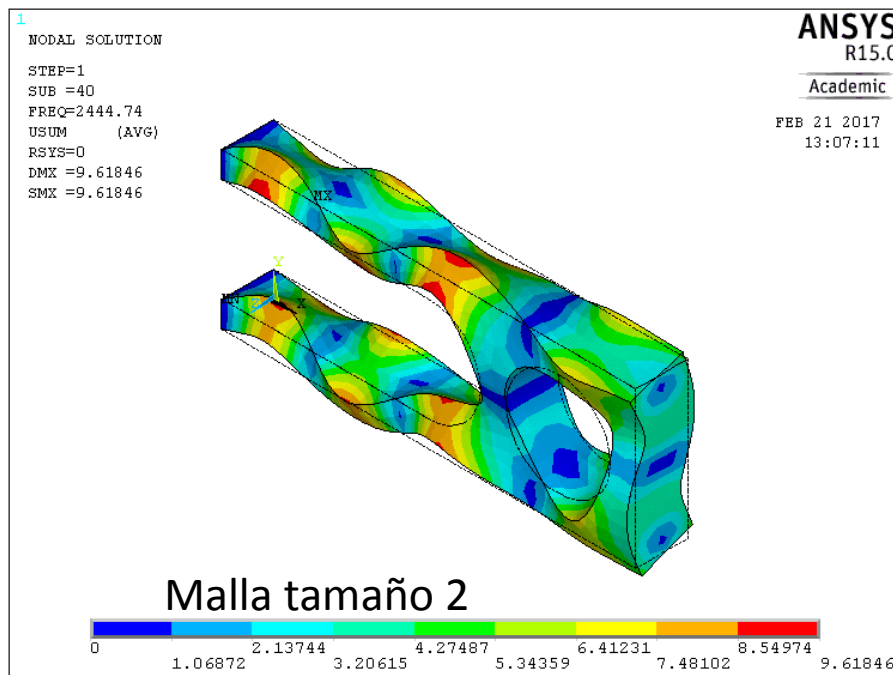
Set	Frequency	Load Step
1	29.821	1
2	43.995	1
3	98.193	1
4	210.39	1
5	257.23	1
6	333.00	1
7	402.54	1
8	404.63	1
9	461.66	1
10	584.88	1
11	731.07	1
12	750.15	1
13	771.86	1
14	868.95	1
15	952.99	1
16	994.44	1

Read

Close

Malla tamaño 6

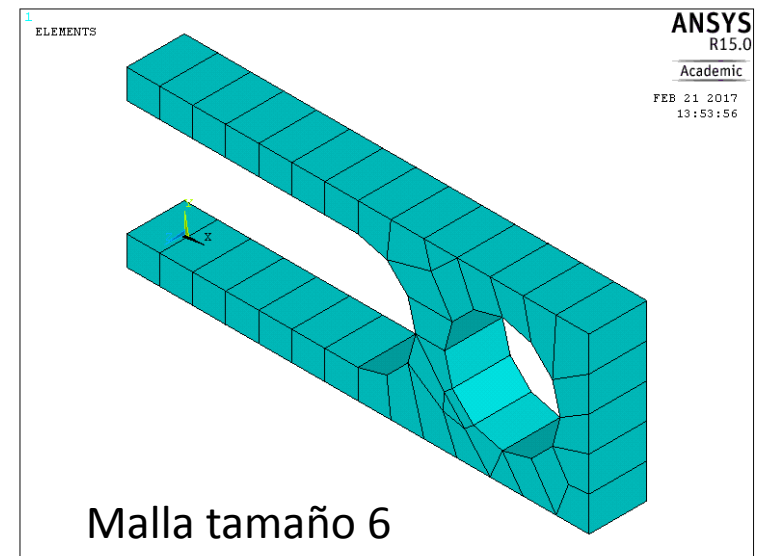
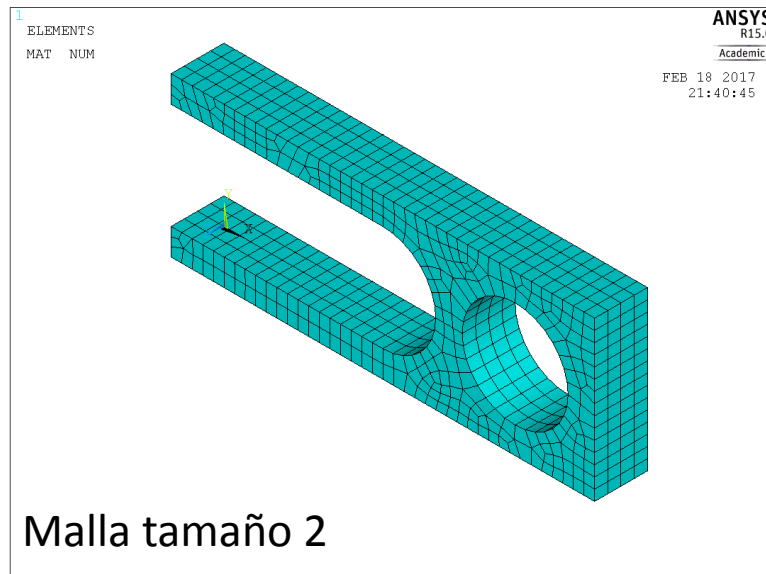
- Para los modos altos, los resultados del modelo con malla basta no son precisos, ya que no puede “captar” bien su geometría (la frecuencia tampoco se calcula bien), pero esto no es un problema ya que los modos altos no interesan



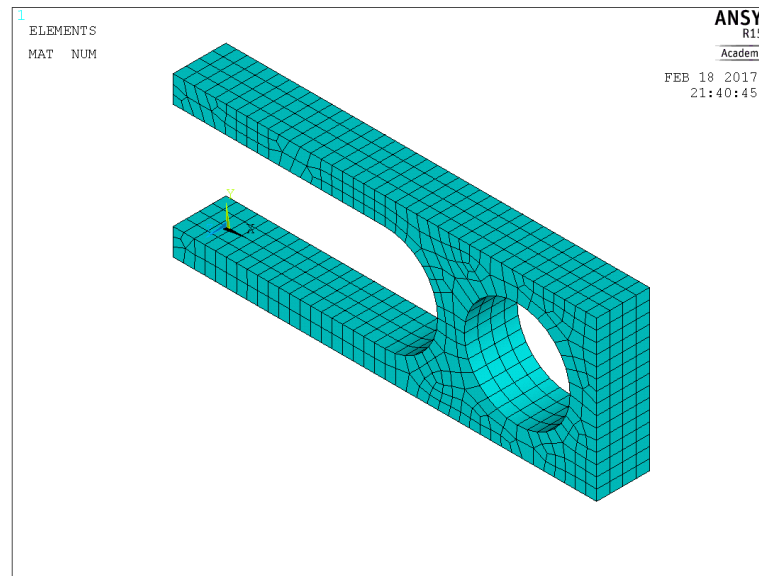


- En conclusión, con la malla de la derecha hubiera valido para obtener los primeros modos.

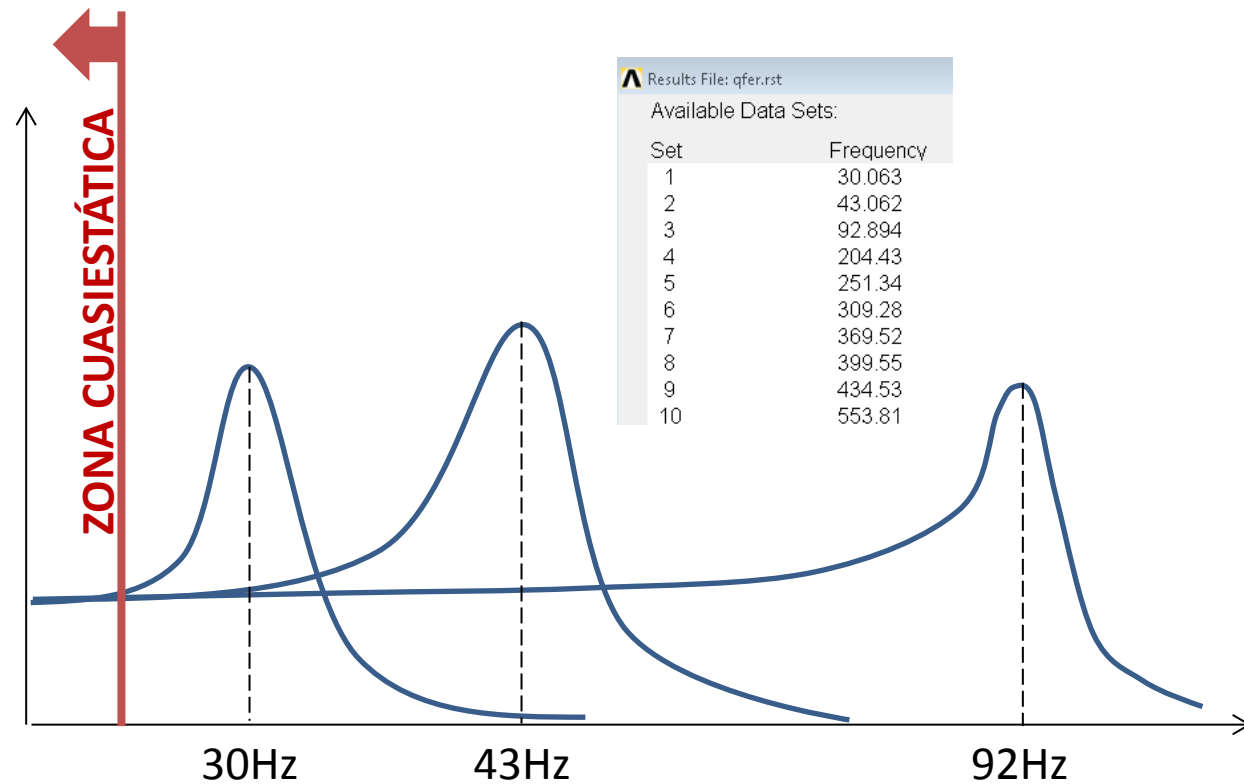
Para no “apurar” tanto, a modo orientativo, se puede decir que en el análisis modal basta con usar un tamaño de elemento medio, similar al que se usaría en un análisis estático.



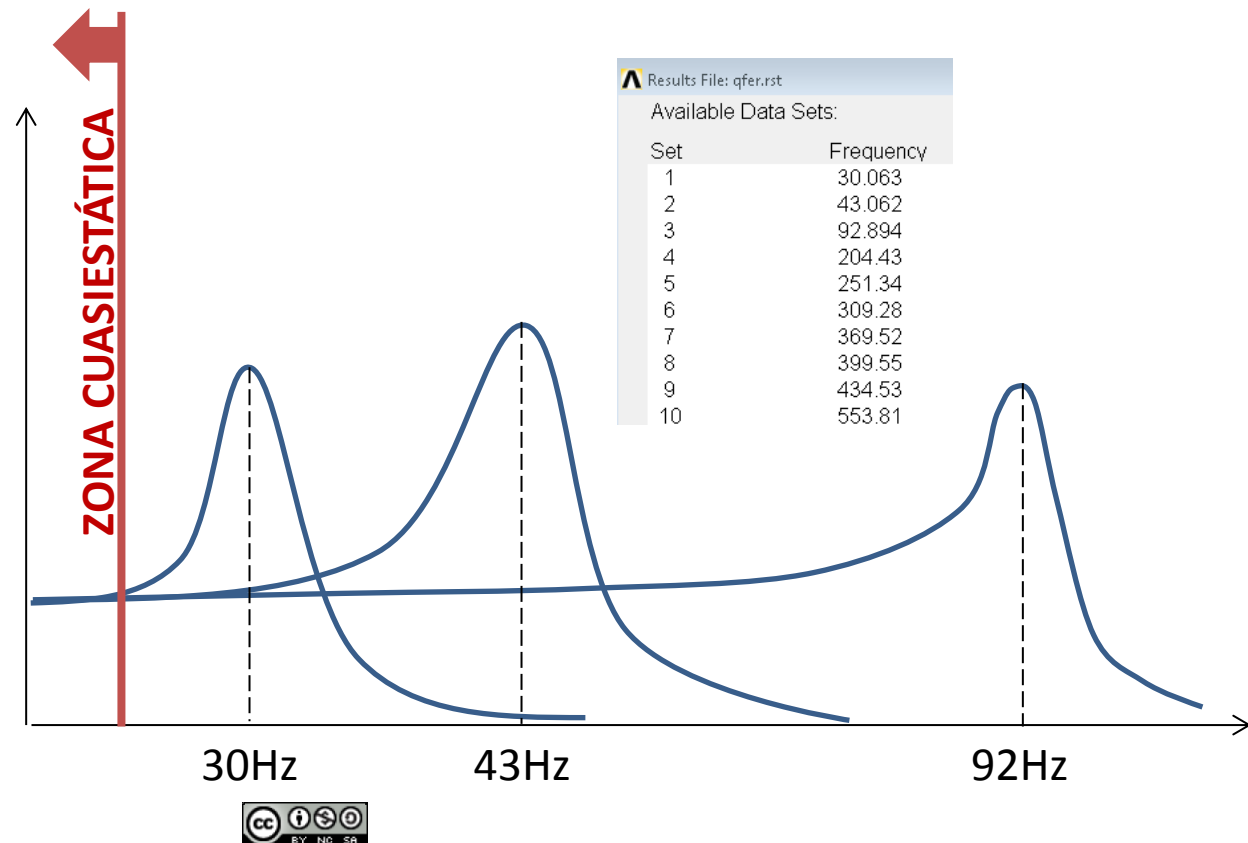
- Como se habrá observado en el ejemplo, en análisis modal nunca se refina la malla en zonas de concentración de tensiones, porque no es un análisis para calcular tensiones de una zona crítica local de la pieza (como sería el caso de un análisis estático o dinámico para determinar el fallo estático o a fatiga, respectivamente)



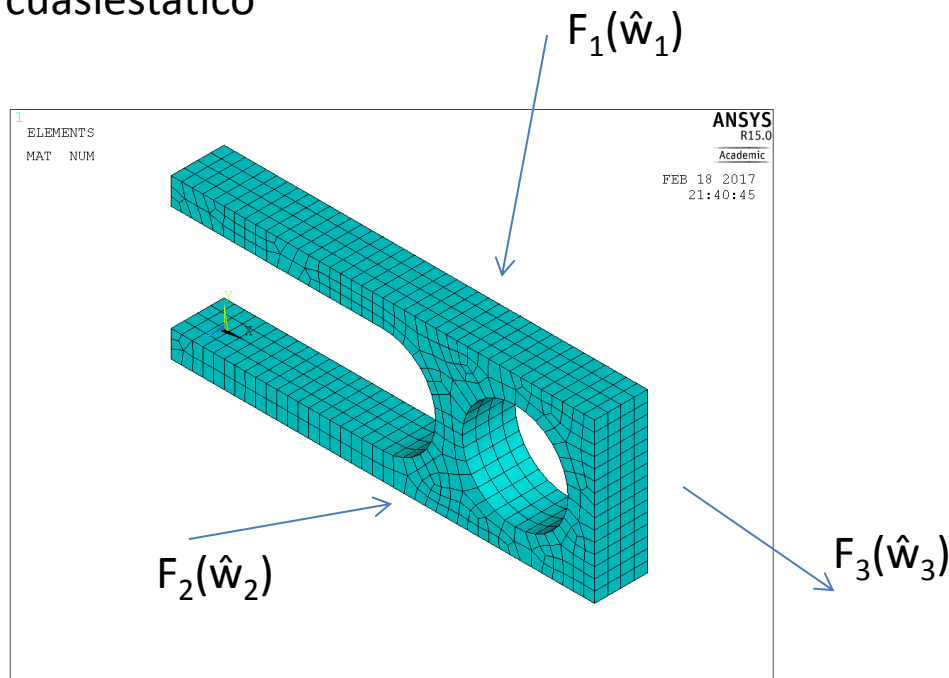
- Al igual que en el modelo de 1 gdl, en el modelo EF se trata de buscar que las frecuencias de las fuerzas externas estén por debajo de la primera (y por tanto de todas) las frecuencias naturales



- Típicamente, se asume que se está en la zona cuasiestática si el máximo de las frecuencias de la fuerzas es al menos 2-4 veces inferior a la primera frecuencia natural



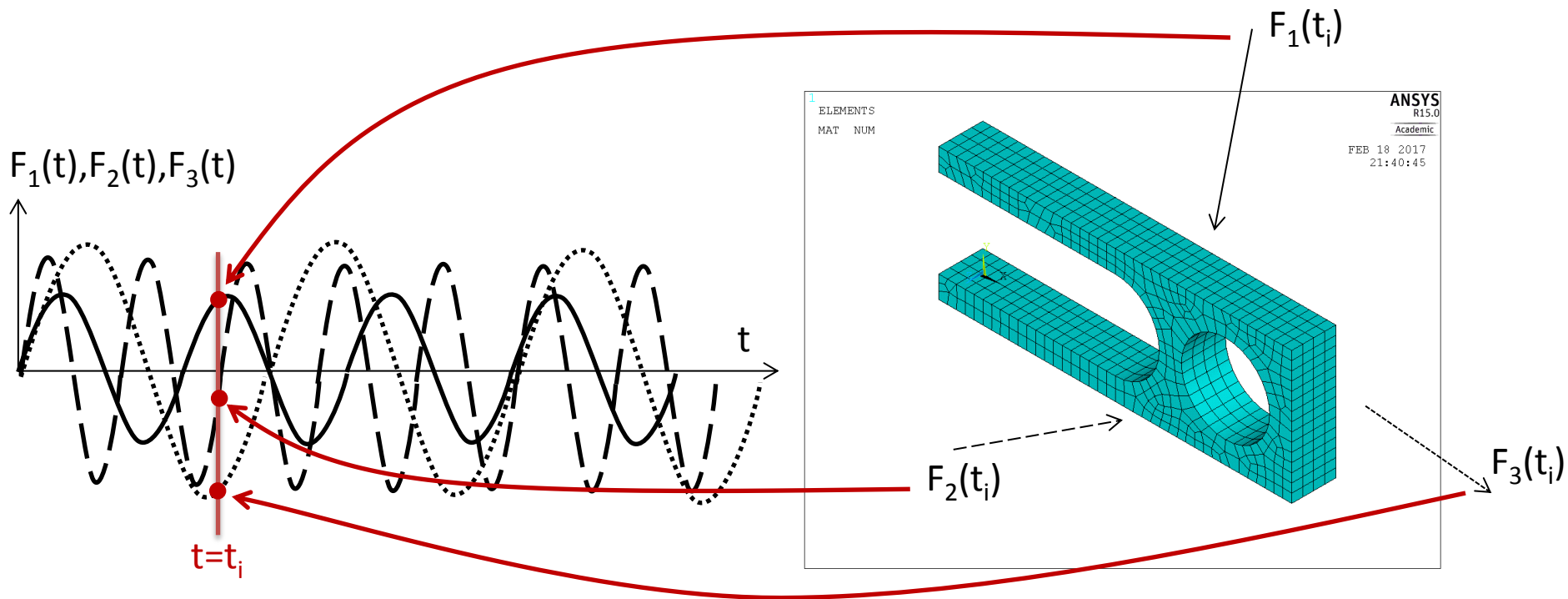
- En el ejemplo, la máxima frecuencia de todas las fuerzas sobre la pieza no debería ser superior a 10-15Hz (aprox.) para poder considerar que la pieza trabaja en estado cuasiestático



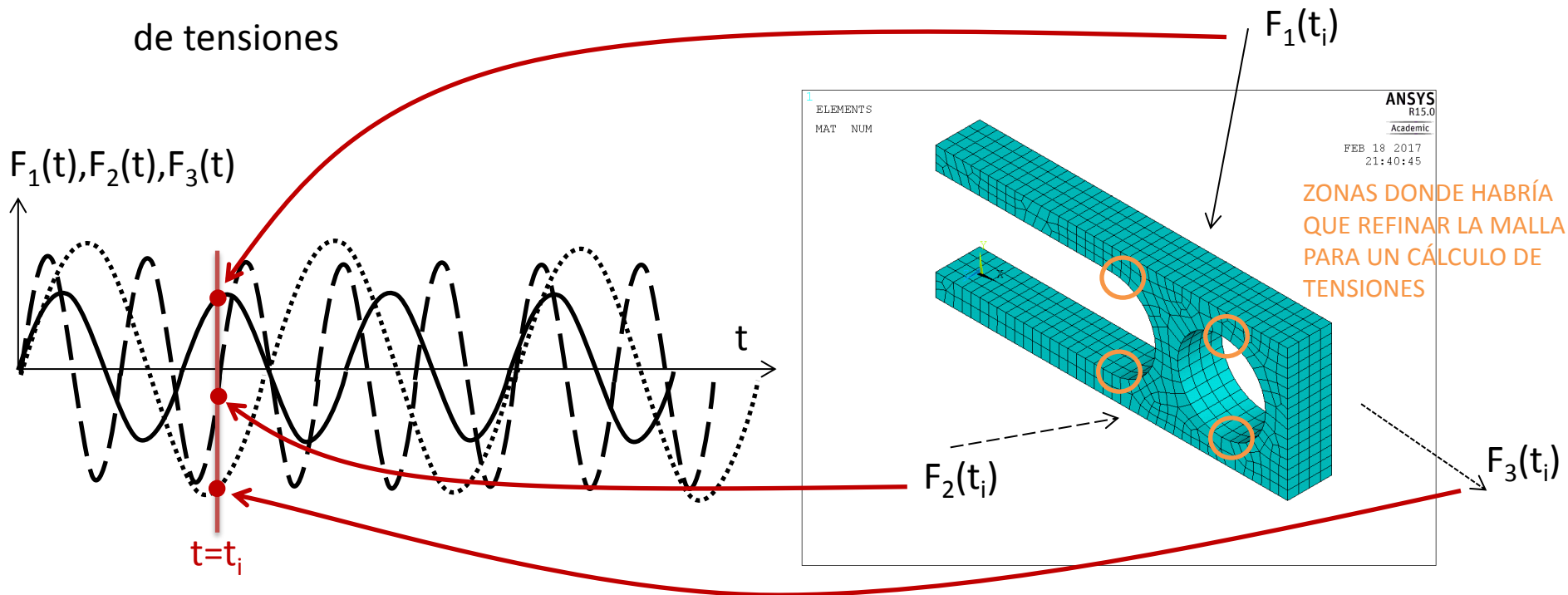
$$\max(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3) < 10-15\text{Hz}$$



- Así, la solución se puede calcular mediante análisis estático, ya que la respuesta en cada instante t_i es igual a la respuesta estática bajo las cargas $F_1(t_i)$, $F_2(t_i)$, $F_3(t_i)$

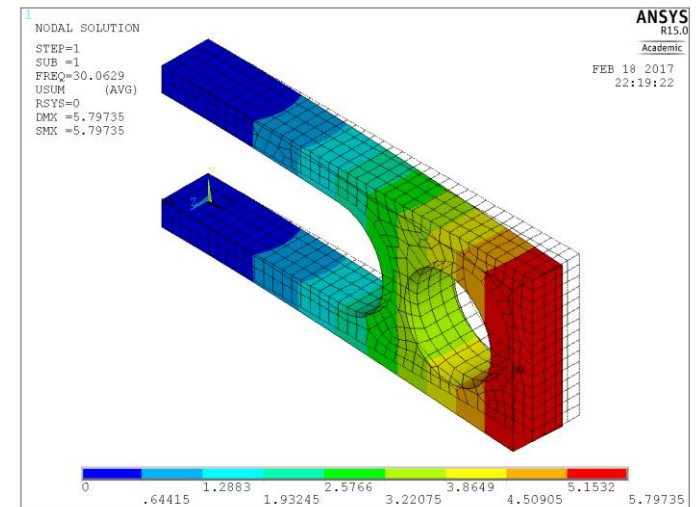
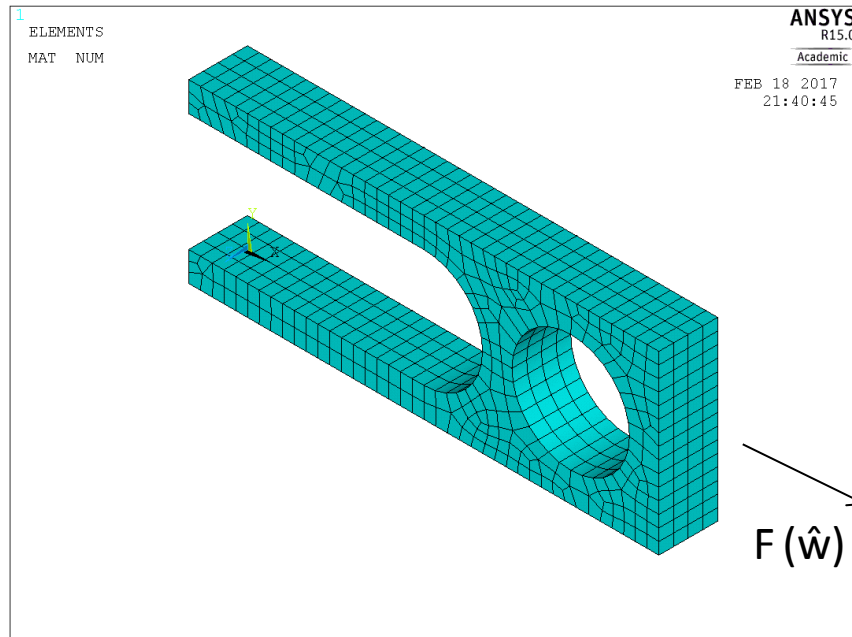


- Lógicamente, si el resultado buscado no es la deformada sino las tensiones (para un cálculo posterior a fatiga), será necesario refinar la malla en las zonas de concentración de tensiones

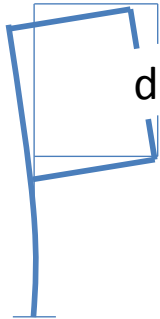


- Según cómo sea el funcionamiento del sistema, existen ciertos modos que, aun siendo bajos, pueden dejarse fuera del estudio

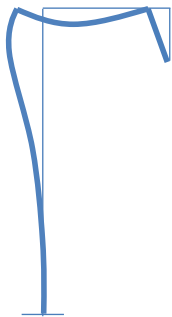
Si la pieza estará sometida a carga axial, nunca excitará modos de flexión lateral pura o de torsión pura, y por tanto no habrá que tenerlas en cuenta



- Según el funcionamiento del sistema, existen ciertos modos que, aun siendo bajos, podrían dejarse fuera del estudio

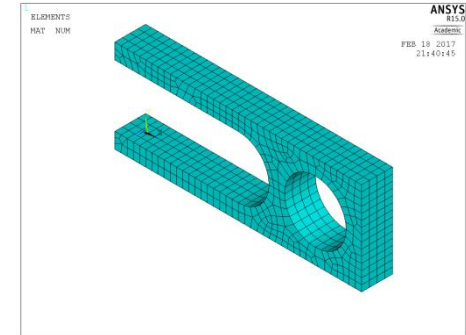
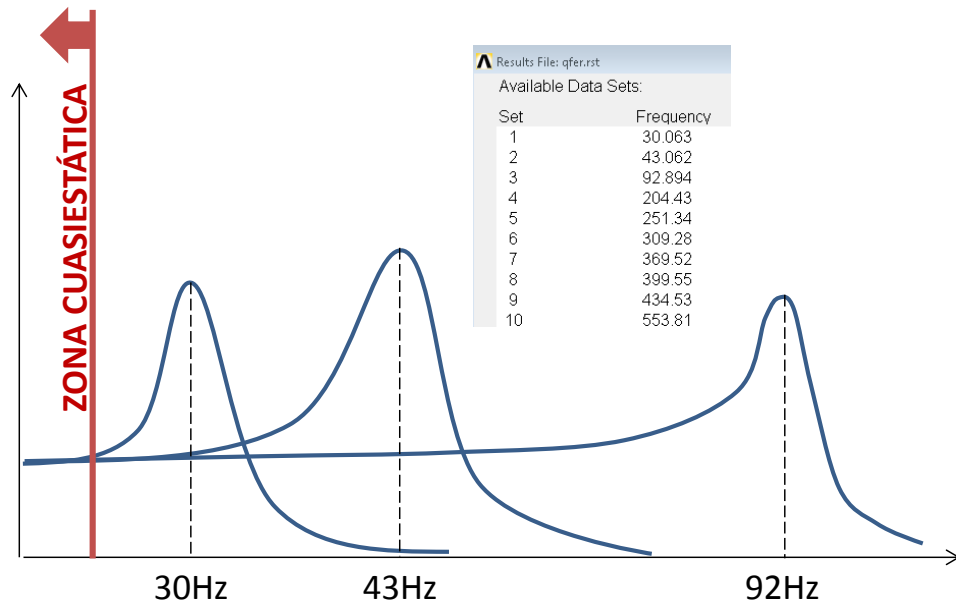


Si en el sistema el objetivo principal es que una distancia permanezca constante (por ejemplo para sujetar una pieza en MH), los modos cuya geometría mantengan esa distancia no son problemáticos



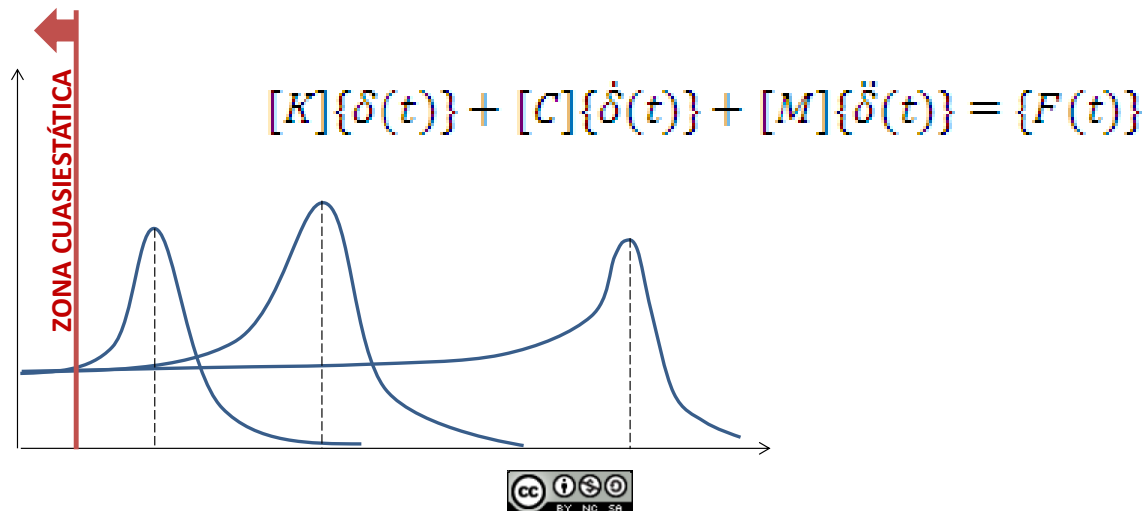
Si en el sistema el objetivo principal es que un punto permanezca fijo (por ejemplo para mecanizar una pieza en MH), los modos cuya geometría mantengan ese punto fijo no son problemáticos

- Si existe una fuerza con frecuencia no cuasiestática y que pueda provocar problemas dinámicos, la solución pasa por modificar la frecuencia natural (cambiando la geometría para variar la rigidez y/o masa modal)



Por ejemplo, cambiando la forma de la sección de las patas, se varía su inercia a flexión y con ello el valor de las frecuencias de vibración de flexión de la pieza

- Muchas veces no es posible diseñar la pieza para que trabaje en zona cuasiestática (por ejemplo por limitaciones de peso) o puede que incluso interese que trabaje en zona no cuasiestática (en aplicaciones muy particulares)
- En esos casos, será necesario realizar un análisis dinámico, en el que se resuelve la ecuación completa (sin despreciar fuerzas disipativas e inerciales)



- El análisis dinámico es más costoso que el cuasiestático porque la ecuación es más compleja y además hay que resolverla paso a paso en pequeños incrementos de tiempo:

$$[K]\{\delta(t)\} + [C]\{\dot{\delta}(t)\} + [M]\{\ddot{\delta}(t)\} = \{F(t)\}$$

- Además, el análisis dinámico es menos preciso que el análisis cuasiestático:
 - las fuerzas disipativas (el amortiguamiento) son difíciles de evaluar y por tanto será fuente de error en los resultados
 - Al ser un análisis más costoso, para reducir de alguna forma el coste se suele utilizar un tamaño de elemento finito mayor, y por tanto el error de discretización será mayor

- Por todo ello, en análisis dinámico (a diferencia de en análisis cuasiestático) es habitual recurrir a una fase posterior de ensayo por prototipos
- Además de para validar los resultados EF, los resultados experimentales también servirán para realimentar el modelo EF con datos más precisos (p.ej. amortiguamiento)
- En cualquier caso, el análisis EF habrá servido para:
 - alcanzar un buen diseño inicial, reduciendo la necesidad de ensayos
 - Probar mejoras en el diseño antes de ensayarlas en el prototipo.

