TEMA 3 – Matriz de rigidez

Mikel Abasolo Bilbao
Ibai Coria Martínez
Iker Heras Miguel

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

- En el Tema anterior se ha explicado cómo el MEF calcula la solución en cualquier punto del modelo a partir de las soluciones nodales
- Obviamente, previamente se habrán tenido que calcular las soluciones nodales despejando la ecuación de equilibrio estático del modelo

$$\{F\} = [K] \cdot \{\delta\}$$

- Donde:
  - [K]: matriz de rigidez del modelo
  - {F}: vector de fuerzas nodales
  - {δ}: vector de soluciones nodales, es decir los desplazamientos de los nodos según sus grados de libertad.

- {F} y {δ} tienen dimensiones nx1, siendo n el número de gdl del modelo de EF:
  - En {F}, el valor de algunos elementos será conocido (fuerzas externas aplicadas al modelo) y otros serán desconocidos (reacciones en los apoyos)
  - En {δ}, el valor de los desplazamientos según algunos gdl serán conocidos (condiciones de ligadura del modelo), y otros serán incógnita
- Para resolver la ecuación se debe calcular la matriz de rigidez [K] del modelo, que se obtiene combinando las rigideces de los distintos elementos finitos que lo componen
- Por tanto, el primer paso en el cálculo de [K] consiste en calcular la matriz de rigidez de cada elemento finito

- Se va a hacer un breve repaso de las relaciones fundamentales entre deformaciones, extensiones y tensiones en un elemento, según la teoría clásica de la Elasticidad

- Del Tema anterior, la solución δ({x}) en cualquier punto de coordenadas {x} dentro de un elemento, se expresa mediante interpolación de los desplazamientos nodales

$$\delta(\{x\}) = \sum_{i=1}^{n} \left(N^i(\{x\}) \cdot \delta^i \right)$$

- En un análisis estático, la solución es un desplazamiento δ que en el caso más general tendrá tres componentes δ_x, δ_y, δ_z. Por lo tanto, δ({x}) será en realidad un vector:

$$\{\delta(\{x\})\} = [N(\{x\})] \cdot \{\delta\}$$

- Por ejemplo, el desplazamiento de un punto $x\}_P$ que se encuentra en un elemento triangulo de primer orden (3 nodos) es:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{xp} \\ \delta_{yp} \\ \delta_{zp} \end{Bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} N^1(\{x\}_p) & 0 & 0 \\ 0 & N^1(\{x\}_p) & 0 \\ 0 & 0 & N^1(\{x\}_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^2(\{x\}_p) & 0 & 0 \\ 0 & N^2(\{x\}_p) & 0 \\ 0 & 0 & N^2(\{x\}_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^3(\{x\}_p) & 0 & 0 \\ 0 & N^3(\{x\}_p) & 0 \\ 0 & 0 & N^3(\{x\}_p) \end{bmatrix} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} \begin{Bmatrix} \delta_x^1 \\ \delta_y^1 \\ \delta_z^1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \delta_x^2 \\ \delta_y^2 \\ \delta_z^2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \delta_x^3 \\ \delta_y^3 \\ \delta_z^3 \end{Bmatrix} \end{matrix} \right\}$$

- Según la Teoría de la Elasticidad, la relación entre deformaciones y extensiones es:

$$\{\varepsilon(\{x\})\} = [\partial]\{\delta(\{x\})\}$$

- Donde $[\partial]$ es una matriz que representa las operaciones de derivación de la ecuación.

- Así:

$$\{\delta(\{x\})\} = [N(\{x\})] \cdot \{\delta\}$$

$$\Big\downarrow \; \{\varepsilon(\{x\})\} = [\partial]\{\delta(\{x\})\}$$

$$\{\varepsilon(\{x\})\} = [\partial][N(\{x\})]\{\delta\} = [B(\{x\})]\{\delta\}$$

- Donde [B({x})] la matriz de derivadas de las funciones de interpolación

- Finalmente, la relación entre las tensiones y las extensiones es

$$\{\sigma(\{x\})\} = [D]\{\varepsilon(\{x\})\} = [D][\partial][N(\{x\})]\{\delta\} = [D][B(\{x\})]\{\delta\}$$

- Donde [D] es la matriz elástica, cuyos elementos son función de las propiedades de rigidez del material (para un material isótropo, el módulo elástico E y el coeficiente de Poisson ν)

- A partir de estas relaciones se obtiene la expresión matemática para el cálculo de la matriz de rigidez de un elemento.

- Teorema de los trabajos virtuales: el trabajo de las fuerzas aplicadas en un desplazamiento virtual de los nodos de un elemento es igual a la energía elástica que se produce como consecuencia de dicho desplazamiento virtual

- Expresado de forma más sencilla, el trabajo requerido para deformar un elemento es igual a la energía elástica que almacena dicho elemento al deformarse

- El trabajo es el producto de las fuerzas (nodales, superficiales o de volumen) por los desplazamientos:

$$W = \{\delta\}^T \cdot \{F\}$$

- La energía elástica acumulada por el elemento a causa de los desplazamientos:

$$V = \int \{\varepsilon(\{x\})\}^T \{\sigma(\{x\})\} dv$$

$$\{\sigma(\{x\})\} = [D]\{\varepsilon(\{x\})\} = [D][\partial][N(\{x\})]\{\delta\} = [D][B(\{x\})]\{\delta\}$$

$$\{\varepsilon(\{x\})\} = [\partial][N(\{x\})]\{\delta\} = [B(\{x\})]\{\delta\}$$

$$V = \{\delta\}^T \left(\int [B(\{x\})]^T [D][B(\{x\})] dv \right) \{\delta\}$$

- Igualando el trabajo y la energía elástica, se obtiene:

$$\left(\int [B(\{x\})]^T [D][B(\{x\})] dv \right) \{\delta\} = \{F\}$$

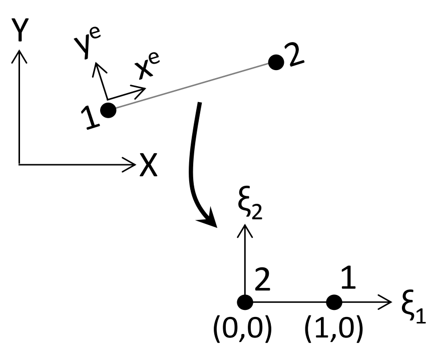
- Por tanto, la matriz de rigidez del elemento [k]:

$$[k] = \int [B(\{x\})]^T [D][B(\{x\})] dv$$

- El elemento barra sólo transmite esfuerzo axial, por tanto solo tiene la posibilidad de deformación axial

- En un sistema local de coordenadas (x^e,y^e) la barra sólo tiene dos grados de libertad. El origen se coloca en el nodo 1, siendo $x_1^e=0$ y $x_2^e=L$

- El elemento se representa mediante un elemento patrón en coordenadas naturales (ξ1,ξ2). En este nuevo sistema de coordenadas, las funciones de interpolación son:



$$N^1(\xi_1,\xi_2) = \xi_1$$

$$N^2(\xi_1,\xi_2) = 1 - \xi_1$$

- Por otro lado:

$$x^e = N^1(\{x\}^e) \cdot x_1^e + N^2(\{x\}^e) \cdot x_2^e$$

$$N^1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1$$

$$N^2(\xi_1, \xi_2) = 1 - \xi_1$$

$$x^e = \xi_1 \cdot x_1^e + (1 - \xi_1) \cdot x_2^e$$

$x_1^e=0$
$x_2^e=L$

$$x^e = (1 - \xi_1) \cdot L$$

- De donde se despeja:

$$N^1(\xi_1) = \xi_1 = 1 - \frac{x^e}{L}$$

$$N^2(\xi_1) = 1 - \xi_1 = \frac{x^e}{L}$$

- La matriz [B({x}^{e})] es por tanto:

$$[B(\{x\}^e)] = [\partial][N(\{x\}^e)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1(\{x\}^e)}{\partial x^e} & \frac{\partial N^2(\{x\}^e)}{\partial x^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

- Sustituyendo:

$$[k] = \int [B(\{x\})]^T [D][B(\{x\})] dv$$

$$\Big\downarrow \quad [B(\{x\}^e)] = [\partial][N(\{x\}^e)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1(\{x\}^e)}{\partial x^e} & \frac{\partial N^2(\{x\}^e)}{\partial x^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$[k]^e = \int \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}^T [D] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dv$$

$$\Big\downarrow \quad \begin{array}{l} [D]=E \\ V=AL \end{array}$$

$$[k]^e = EAL \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ampliando la matriz para tener en cuenta todos los grados de libertad, siendo la rigidez en dirección perpendicular a la barra (eje y^e) nula:

$$[k]^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para obtener la matriz de rigidez del elemento [k] en coordenadas globales (x,y), se hace un cambio de coordenadas a través de la matriz [Λ]:

$$[k] = [\Lambda]^T [k]^e [\Lambda]$$

$$[k]^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\Lambda] = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & 0 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[k] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} cos^2\theta & sin\theta cos\theta & -cos^2\theta & -sin\theta cos\theta \\ sin\theta cos\theta & sin^2\theta & -sin\theta cos\theta & -sin^2\theta \\ -cos^2\theta & -sin\theta cos\theta & cos^2\theta & sin\theta cos\theta \\ -sin\theta cos\theta & -sin^2\theta & sin\theta cos\theta & sin^2\theta \end{bmatrix}$$

- En el Tema 2 se han estudiado las funciones de interpolación y coordenadas naturales del elemento triángulo:

$$N^1(\xi_1,\xi_2)=\xi_1$$
$$N^2(\xi_1,\xi_2)=\xi_2$$
$$N^3(\xi_1,\xi_2)=1-\xi_1-\xi_2$$

- Además, se vio que:

$$x=\xi_1\cdot x_1+\xi_2\cdot x_2+(1-\xi_1-\xi_2)\cdot x_3$$
$$y=\xi_1\cdot y_1+\xi_2\cdot y_2+(1-\xi_1-\xi_2)\cdot y_3$$

- De donde se despeja:

$$\xi_1=\frac{1}{c}\big((x-x_3)\cdot b_2-(y-y_3)\cdot b_1\big)$$
$$\xi_2=\frac{1}{c}\big(-(x-x_3)\cdot a_2+(y-y_3)\cdot a_1\big)$$
$$\xi_3=1-\xi_1-\xi_2=1-\frac{1}{c}\big((x-x_3)\cdot d_1-(y-y_3)\cdot d_2\big)$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1=(x_1-x_3);\\ b_1=(x_2-x_3);\ a_2=(y_1-y_3);\ b_2=(y_2-y_3)\\ d_1=(b_2-a_2);\\ d_2=(b_1-a_1);\ c=(a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1)\end{array}\right.$$

- La matriz de interpolación del elemento triángulo [B({x})]:

$$[B(\{x\})] = \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial N^1(\{x\})}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^1(\{x\})}{\partial y} \\ \frac{\partial N^1(\{x\})}{\partial y} & \frac{\partial N^1(\{x\})}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^2(\{x\})}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^2(\{x\})}{\partial y} \\ \frac{\partial N^2(\{x\})}{\partial y} & \frac{\partial N^2(\{x\})}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^3(\{x\})}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^3(\{x\})}{\partial y} \\ \frac{\partial N^3(\{x\})}{\partial y} & \frac{\partial N^3(\{x\})}{\partial x} \end{bmatrix}\right]$$

$$\xi_1 = \frac{1}{c}\big((x - x_3)\cdot b_2 - (y - y_3)\cdot b_1\big)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{c}\big(-(x - x_3)\cdot a_2 + (y - y_3)\cdot a_1\big)$$

$$\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2 = 1 - \frac{1}{c}\big((x - x_3)\cdot d_1 - (y - y_3)\cdot d_2\big)$$

$$[B(\{x\})] = \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial y} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial y} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x} \end{bmatrix}\right] = \frac{1}{c}\left[\begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & -b_1 \\ -b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 \\ a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \\ d_2 & -d_1 \end{bmatrix}\right]$$

- Al igual que con el elemento barra:
  - los términos de [B({x})] son constantes (independientes del punto {x} para el que se calculen), es decir [B({x})]=[B].
  - La matriz elástica [D] también es constante al depender de las propiedades resistentes E y ν del material
- Por tanto, ambas matrices se pueden sacar de la integral simplificando el cálculo de la matriz de rigidez ya que no hace falta integrar

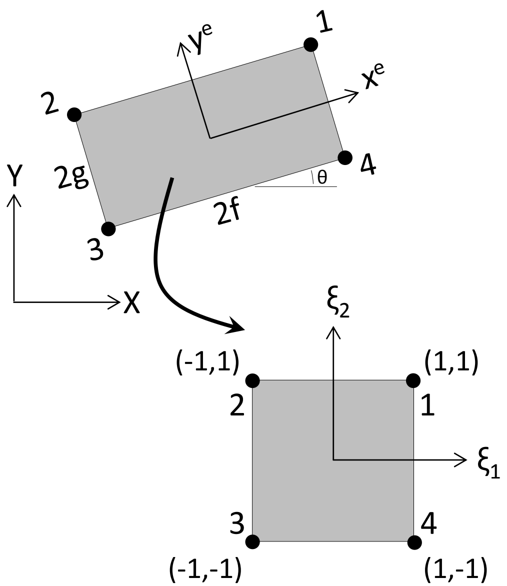
$$[k] = [B]^T[D][B]V$$

$$[\mathrm{D}] = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{V} = \frac{t}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$[k] = \frac{t}{2c}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered} k_{11} = b_1^2 D_3 + b_2^2 D_1;\, k_{12} = k_{21} = -b_2 D_2 b_1 - b_1 D_3 b_2;\, k_{13} = k_{31} = -b_2 D_1 a_2 - b_1 D_3 a_1; \\ k_{14} = k_{41} = b_2 D_2 a_1 + b_1 D_3 a_2;\, k_{15} = k_{51} = -b_2 D_1 d_1 - b_1 D_3 d_2;\, k_{16} = k_{61} = b_2 D_2 d_2 + b_1 D_3 d_1; \\ k_{22} = b_1^2 D_1 + b_2^2 D_3;\; k_{23} = k_{32} = a_2 D_2 b_1 + a_1 D_3 b_2;\, k_{24} = k_{42} = -b_2 D_3 a_2 - b_1 D_1 a_1; \\ k_{25} = k_{52} = b_2 D_3 d_2 + b_1 D_2 d_1;\, k_{26} = k_{62} = -b_2 D_3 d_1 - b_1 D_1 d_2;\, k_{33} = a_1^2 D_3 + a_2^2 D_1; \\ k_{34} = k_{43} = -a_2 D_2 a_1 - a_1 D_3 a_2;\, k_{35} = k_{53} = a_2 D_1 d_1 + a_1 D_3 d_2;\, k_{36} = k_{63} = -a_2 D_2 d_2 - a_1 D_3 d_1; \\ k_{44} = a_1^2 D_1 + a_2^2 D_3;\, k_{45} = k_{54} = -a_2 D_3 d_2 - a_1 D_2 d_1;\, k_{46} = k_{64} = a_2 D_3 d_1 + a_1 D_1 d_2; \\ k_{55} = d_2^2 D_3 + d_1^2 D_1;\; k_{56} = k_{65} = -d_1 D_2 d_2 - d_2 D_3 d_1;\, k_{66} = d_2^2 D_1 + d_1^2 D_3 \end{gathered}$$

- Siguiendo el mismo procedimiento que con el elemento triángulo:



$$N^1(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{4}\cdot(1+\xi_1)\cdot(1+\xi_2)$$
$$N^2(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{4}\cdot(1-\xi_1)\cdot(1+\xi_2)$$
$$N^3(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{4}\cdot(1-\xi_1)\cdot(1-\xi_2)$$
$$N^4(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{4}\cdot(1+\xi_1)\cdot(1-\xi_2)$$

$$\xi_1=\frac{x^e}{f}$$
$$\xi_2=\frac{y^e}{g}$$

$$N^1(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{x^e}{f}\right)\cdot\left(1+\frac{y^e}{g}\right)$$
$$N^2(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{x^e}{f}\right)\cdot\left(1+\frac{y^e}{g}\right)$$
$$N^3(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{x^e}{f}\right)\cdot\left(1-\frac{y^e}{g}\right)$$
$$N^4(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{x^e}{f}\right)\cdot\left(1-\frac{y^e}{g}\right)$$

- La matriz de interpolación del elemento cuadrilátero rectangular [B({x})]:

$$[B(\{x\}^e)] = \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial N^1(\{x\}^e)}{\partial x^e} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^1(\{x\}^e)}{\partial y^e} \\ \frac{\partial N^1(\{x\}^e)}{\partial y^e} & \frac{\partial N^1(\{x\}^e)}{\partial x^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^2(\{x\}^e)}{\partial x^e} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^2(\{x\}^e)}{\partial y^e} \\ \frac{\partial N^2(\{x\}^e)}{\partial y^e} & \frac{\partial N^2(\{x\}^e)}{\partial x^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^3(\{x\}^e)}{\partial x^e} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^3(\{x\}^e)}{\partial y^e} \\ \frac{\partial N^3(\{x\}^e)}{\partial y^e} & \frac{\partial N^3(\{x\}^e)}{\partial x^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^4(\{x\}^e)}{\partial x^e} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^4(\{x\}^e)}{\partial y^e} \\ \frac{\partial N^4(\{x\}^e)}{\partial y^e} & \frac{\partial N^4(\{x\}^e)}{\partial x^e} \end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{f}\cdot\left(1+\frac{y^e}{g}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{g}\cdot\left(1+\frac{x^e}{f}\right) \\ \frac{1}{g}\cdot\left(1+\frac{x^e}{f}\right) & \frac{1}{f}\cdot\left(1+\frac{y^e}{g}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{f}\cdot\left(1+\frac{y^e}{g}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{g}\cdot\left(1-\frac{x^e}{f}\right) \\ \frac{1}{g}\cdot\left(1-\frac{x^e}{f}\right) & -\frac{1}{f}\cdot\left(1+\frac{y^e}{g}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{f}\cdot\left(1-\frac{y^e}{g}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{g}\cdot\left(1-\frac{x^e}{f}\right) \\ -\frac{1}{g}\cdot\left(1-\frac{x^e}{f}\right) & -\frac{1}{f}\cdot\left(1-\frac{y^e}{g}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{f}\cdot\left(1-\frac{y^e}{g}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{g}\cdot\left(1+\frac{x^e}{f}\right) \\ -\frac{1}{g}\cdot\left(1+\frac{x^e}{f}\right) & \frac{1}{f}\cdot\left(1-\frac{y^e}{g}\right) \end{bmatrix}\right]$$

- En este caso, los términos de [B({x}e)] no son constantes, si no que su valor depende de la posición (x^e,y^e) de cada punto del elemento. Por ello, es necesario calcular la integral

$$[k]^e = \int_{-f}^{f}\int_{-g}^{g}[B(\{x\}^e)]^T[D][B(\{x\}^e)]t\,dx^e dy^e$$

- Al ser los elementos de [B({x}e)] polinomios de primer grado, la integral se puede hacer de forma directa sin tener que recurrir a la integración numérica

$$[k]^e = t\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = \frac{gD_1}{3f} + \frac{fD_3}{3g};\ k_{12} = k_{21} = \frac{D_2+D_3}{4}; k_{13} = k_{31} = -\frac{gD_1}{3f} + \frac{fD_3}{6g}; k_{14} = k_{41} = \frac{D_2-D_3}{4};$$

$$k_{15} = k_{51} = -\frac{gD_1}{6f} - \frac{fD_3}{6g}; k_{16} = k_{61} = -k_{12}; k_{17} = k_{71} = \frac{gD_1}{6f} - \frac{fD_3}{3g}; k_{18} = k_{81} = -k_{14};$$

$$k_{22} = \frac{fD_1}{3g} + \frac{gD_3}{3f}; k_{23} = k_{32} = -k_{14}; k_{24} = k_{42} = \frac{fD_1}{6g} - \frac{gD_3}{3f};$$

$$k_{25} = k_{52} = -k_{12}; k_{26} = k_{62} = -\frac{fD_1}{6g} - \frac{gD_3}{6f}; k_{27} = k_{72} = k_{14};$$

$$k_{28} = k_{82} = -\frac{fD_1}{3g} + \frac{gD_3}{6f} k_{33} = k_{11}; k_{34} = k_{43} = -k_{12}; k_{35} = k_{53} = k_{17}; k_{36} = k_{63} = k_{14};$$

$$k_{37} = k_{73} = k_{15}; k_{38} = k_{83} = k_{12}; k_{44} = k_{22}; k_{45} = k_{54} = -k_{14}; k_{46} = k_{64} = k_{28}; k_{47} = k_{74} = k_{12}; k_{48} = k_{84} = k_{26};$$

$$k_{55} = k_{11}; k_{56} = k_{65} = k_{12}; k_{57} = k_{75} = k_{13}; k_{58} = k_{85} = k_{14}; k_{66} = k_{22};$$

$$k_{67} = k_{76} = -k_{14}; k_{68} = k_{86} = k_{24};\ k_{77} = k_{11}; k_{78} = k_{87} = -k_{12}; k_{88} = k_{22}$$

- Para obtener la matriz de rigidez del elemento [k] en coordenadas globales (x,y), se hace el cambio de coordenadas locales a globales como con el elemento barra:

$$[k] = [\Lambda]^T [k]^e [\Lambda]$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -sin\theta & cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

- Para un elemento cuadrilátero no rectangular, las expresiones de las funciones de interpolación se complican y hay que hacer integración numérica, lo cual aumenta el coste.

- Tras calcular la matriz de rigidez [k] de todos los elementos de la malla, a partir de ellos se obtiene la matriz de rigidez [K] del modelo.
- El proceso se lleva a cabo en dos pasos para sistematizarlo lo máximo posible:
  - Expansión: se expande la matriz de rigidez de cada elemento hasta las dimensiones del modelo
  - Ensamblado: se suman todas las matrices de rigidez expandidas
- Este proceso se ha visto (sin entrar en detalle) en el Tema 1 en el ejemplo de la celosía

- Tras obtener la matriz de rigidez del modelo [K] ya se puede resolver la ecuación matricial de equilibrio estático
- Para ello hay que definir una serie de condiciones de contorno, que representan las restricciones al movimiento del modelo según el sistema físico real
- Las condiciones de contorno deben ser tales que eviten cualquier posible movimiento de sólido rígido del modelo:
  - modelo bidimensional: traslación en x, y, y giro en plano xy
  - modelo tridimensional: traslación en x, y, z y el giro en planos xy, xz, yz

- La definición de las condiciones de contorno se hace generalmente de forma simplificada: desplazamiento o giro nulo, apoyos simples, deslizantes o empotramientos perfectos…
- Estas condiciones de contorno “ideales” en la realidad no existen, pero simplifican notablemente la modelización y análisis. Por tanto su utilización es habitual y recomendable siempre que la pérdida de precisión en los resultados sea asumible.

- Para introducir las condiciones de contorno en el modelo de EF, se reescribe la ecuación de equilibrio estático de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \{F_{ext}\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ll}] & [K_{lr}] \\ [K_{rl}] & [K_{rr}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\delta_l\} \\ \{\delta_r\} \end{Bmatrix}$$

$\{F_{ext}\}$ es el vector de fuerzas (dato).
$\{R\}$ el vector de reacciones (incógnita).
$\{\delta_r\}$ es el vector de desplazamientos restringidos (dato).
$\{\delta_l\}$ el de desplazamientos libres (incógnita)

$$\{F_{ext}\} - [K_{lr}] \cdot \{\delta_r\} = [K_{ll}] \cdot \{\delta_l\}$$
$$\{R\} = [K_{rl}] \cdot \{\delta_l\} + [K_{rr}] \cdot \{\delta_r\}$$

De la primera ecuación se calcula el vector $\{\delta_l\}$.
A continuación se resuelve la segunda ecuación y se obtiene {R}.

- la mayoría de programas comerciales de EF emplean otra técnica, conocida como técnica de subespacios nulos, que permite una mayor sistematización

NOTA: Todas las imágenes de este documento son propias