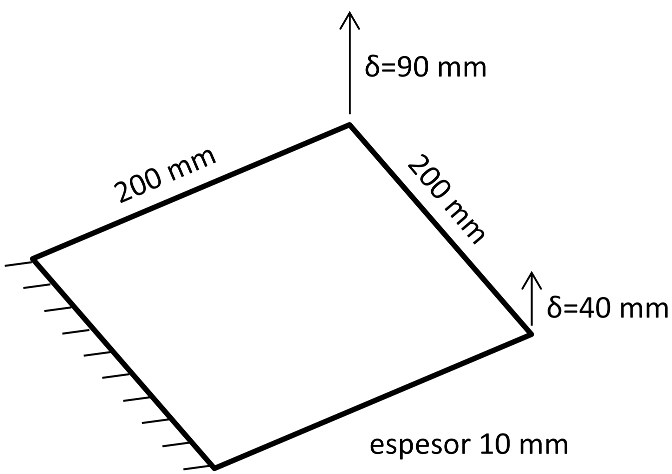
TEMA 2 – Fundamentos matemáticos

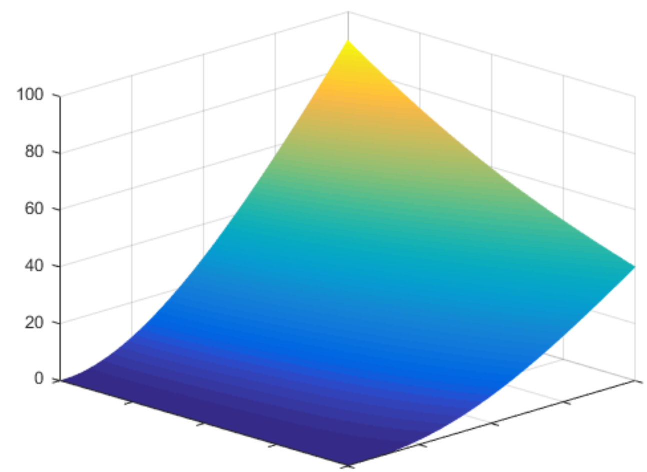
Mikel Abasolo Bilbao
Ibai Coria Martínez
Iker Heras Miguel

- El MEF se basa en discretizar el medio continuo en elementos finitos (mallado); los puntos de unión entre los elementos se denominan nodos; cada nodo tiene un determinado número de grados de libertad
- Así, el modelo mallado tiene un total de n grados de libertad, siendo n el número de nodos multiplicado por el número de grados de libertad por nodo
- A partir de la malla se generan los vectores de fuerza y desplazamiento y se calcula la matriz de rigidez
- El resultado del análisis estático son el valor de las reacciones en los apoyos, y el desplazamiento de los grados de libertad de los nodos de la malla

- ¿Cómo puede el ordenador visualizar la deformada de toda la pieza, de cualquier punto, si sólo han sido calculados los desplazamientos de los nodos de la malla?
- El MEF sólo calcula el desplazamiento de los nodos, el desplazamiento de todos los demás puntos lo obtiene a posteriori mediante interpolación
- Esta interpolación la realiza utilizando las funciones de interpolación
- Además, las funciones de interpolación también se usan para el cálculo de la matriz de rigidez, como se verá en el Tema 3

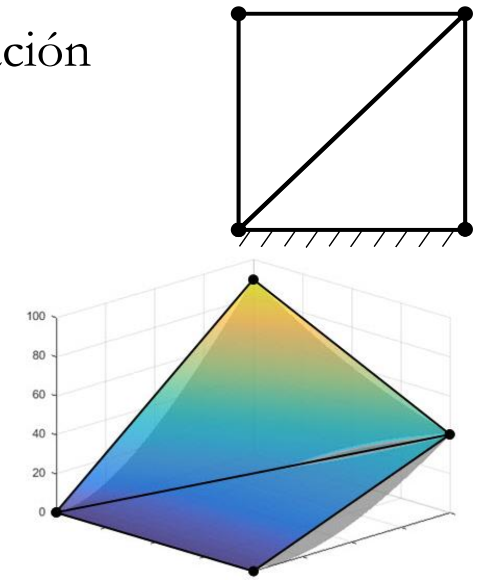
- Supóngase la chapa cuadrada (lado 200 mm, espesor 10 mm), empotrada en un lado y con desplazamientos impuestos en sus vértices libres (90 mm y 40 mm)



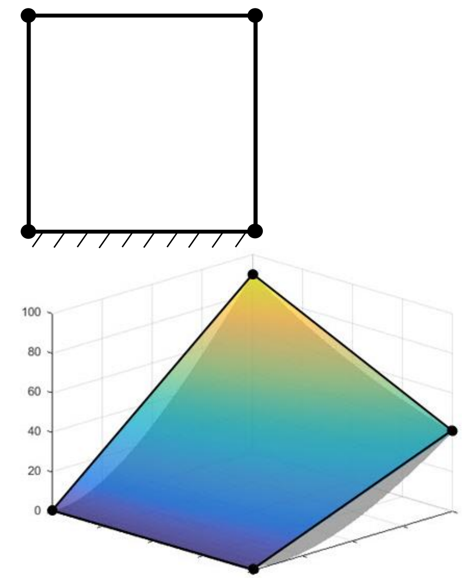


SOLUCIÓN (DEFORMADA) REAL

- Si se usa un modelo de EF para calcular la solución, partiendo del desplazamiento de los nodos, el MEF obtiene el desplazamiento del resto de puntos del modelo mediante interpolación



MODELO Y SOLUCIÓN
CON 2 ELEMENTOS TRIÁNGULO

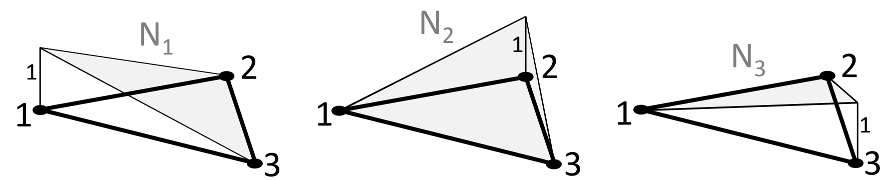


MODELO Y SOLUCIÓN
CON 1 ELEMENTO CUADRILÁTERO

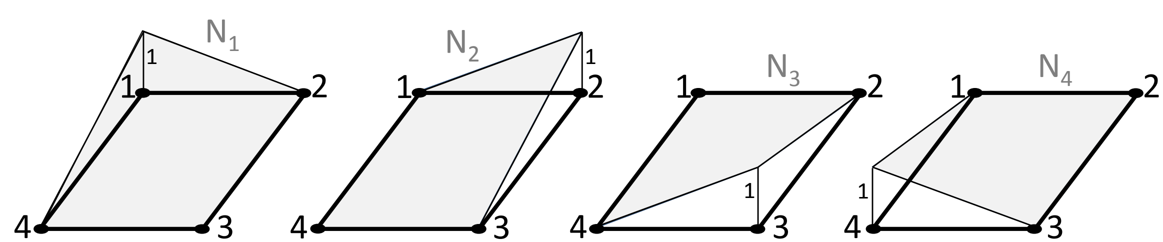
- La herramienta matemática que utiliza el MEF para hacer la interpolación son las funciones de interpolación

- A cada nodo i del elemento le corresponde una función de interpolación Ni({x}), que vale 1 en el propio nodo i y 0 en el resto de nodos del elemento

FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN DEL ELEMENTO TRIÁNGULO



FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN DEL ELEMENTO CUADRILÁTERO

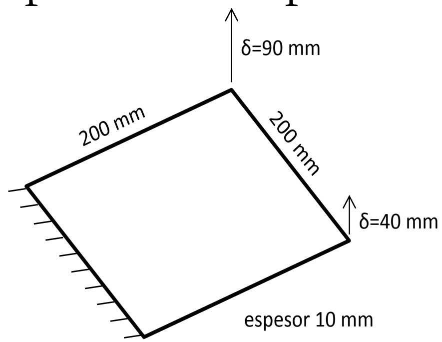


- la solución en cualquier punto con coordenadas {x} de un modelo de EF se calcula como:

$$\delta(\{x\}) = \sum_{i=1}^{n} \left(N^i(\{x\}) \cdot \delta^i\right)$$

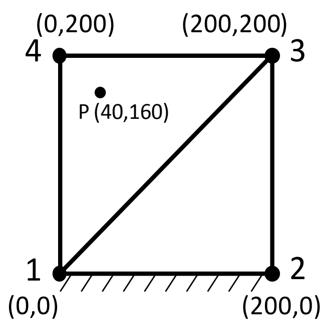
- Donde:
  - N: número de nodos del elemento dentro del cual se encuentra el punto {x}
  - δ^i: valor de la solución en el nodo i del elemento
- Es decir, la solución en el punto {x} es igual a la suma de la solución de cada nodo multiplicado por el valor de la función de interpolación del nodo en dicho punto

- En el ejemplo de la chapa cuadrada



$\delta^1=\delta^2=0,\ \delta^3=40,\ \delta^4=90$

- Supóngase que se quiere calcular la solución en un punto $\{x\}_p=(40,160)$

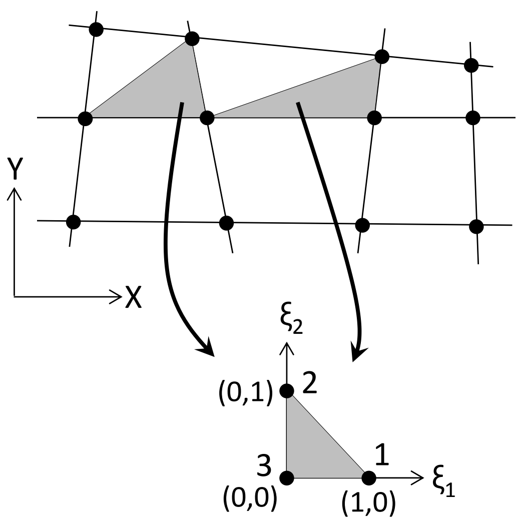


$$\begin{aligned}\delta(\{x\}_p) &= N^1(\{x\}_p)\cdot\delta^1 + N^3(\{x\}_p)\cdot\delta^3 + N^4(\{x\}_p)\cdot\delta^4 \\ &= N^1(\{x\}_p)\cdot 0 + N^3(\{x\}_p)\cdot 40 + N^4(\{x\}_p)\cdot 90\end{aligned}$$

- Queda por calcular $N^1(\{x\}_p)$, $N^3(\{x\}_p)$ y $N^4(\{x\}_p)$. Para ello, el MEF plantea las funciones de interpolación en un sistema de coordenadas auxiliar (coord. naturales)

- El MEF representa el elemento finito mediante un elemento patrón en coordenadas naturales (ξ)

- En estas nuevas coordenadas naturales, la función de interpolación toma una expresión matemática sencilla, que facilita y sistematiza el cálculo de $N^i(\{x\}_p)$



- Se recuerda que $N^i(\{x\})$ vale 1 en el propio nodo i y 0 en el resto de los nodos. Así, $N^i(\{x\})$ se pueden expresar en función de las coordenadas naturales como:

$$N^1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1$$
$$N^2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2$$
$$N^3(\xi_1, \xi_2) = 1 - \xi_1 - \xi_2$$

- Se observa que en este nuevo sistema de coordenadas naturales las funciones de interpolación tienen una expresión matemática extremadamente sencilla

- Retomando, se desea calcular $N^1(\{x\}p)$, $N^3(\{x\}p)$ y $N^4(\{x\}p)$, es decir el valor de las funciones de interpolación en el punto $\{x\}_p$ de coordenadas cartesianas (40,160)
- Para ello llevamos el triángulo 1-3-4 a coordenadas naturales:
  - el nodo 1 de coordenadas cartesianas (x_1=0, y_1=0) pasa a ser el nodo 1 de coordenadas naturales (ξ_1=1, ξ_2=0)
  - el nodo 3 de coordenadas cartesianas (x_3=200, y_3=200) pasa a ser el nodo 2 de coordenadas naturales (ξ_1=0, ξ_2=1)
  - el nodo 4 de coordenadas cartesianas (x_4=0, y_4=200) pasa a ser el nodo 3 de coordenadas naturales (ξ_1=0, ξ_2=0).

- De esta forma: $$\delta(\{x\}_p) = N^1(\{x\}_p)\cdot 0 + N^3(\{x\}_p)\cdot 40 + N^4(\{x\}_p)\cdot 90$$

$$N^1(\xi_1,\xi_2) = \xi_1$$

$$N^2(\xi_1,\xi_2) = \xi_2$$

$$N^3(\xi_1,\xi_2) = 1-\xi_1-\xi_2$$

$$\delta(\{x\}_p) = \xi_{1p}\cdot 0 + \xi_{2p}\cdot 40 + \left(1-\xi_{1p}-\xi_{2p}\right)\cdot 90$$

- Donde ξ_{1p} y ξ_{2p} son las coordenadas naturales que tiene el punto P de coordenadas cartesianas (x_p=40, y_p=160) al llevarlo al elemento patrón
- Así, sólo queda calcular (ξ_{1p}, ξ_{2p}). Al igual que la solución en el punto P, sus coordenadas también se pueden plantear interpolando

- Así, sólo queda calcular (ξ1p, ξ2p). Al igual que la solución en el punto P, sus coordenadas también se pueden plantear interpolando

$$x_p = N^1\left(\{x\}_p\right) \cdot x_1 + N^3\left(\{x\}_p\right) \cdot x_3 + N^4\left(\{x\}_p\right) \cdot x_4$$
$$y_p = N^1\left(\{x\}_p\right) \cdot y_1 + N^3\left(\{x\}_p\right) \cdot y_3 + N^4\left(\{x\}_p\right) \cdot y_4$$

$$N^1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1$$
$$N^2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2$$
$$N^3(\xi_1, \xi_2) = 1 - \xi_1 - \xi_2$$

$$x_p = \xi_{1p} \cdot x_1 + \xi_{2p} \cdot x_3 + \left(1 - \xi_{1p} - \xi_{2p}\right) \cdot x_4$$
$$y_p = \xi_{1p} \cdot y_1 + \xi_{2p} \cdot y_3 + \left(1 - \xi_{1p} - \xi_{2p}\right) \cdot y_4$$

$$x_p = \xi_{1p} \cdot x_1 + \xi_{2p} \cdot x_3 + \left(1 - \xi_{1p} - \xi_{2p}\right) \cdot x_4$$

$$y_p = \xi_{1p} \cdot y_1 + \xi_{2p} \cdot y_3 + \left(1 - \xi_{1p} - \xi_{2p}\right) \cdot y_4$$

$$\big\downarrow \quad \begin{aligned} 40 &= \xi_{1p} \cdot 0 + \xi_{2p} \cdot 200 + \left(1 - \xi_{1p} - \xi_{2p}\right) \cdot 0 \\ 160 &= \xi_{1p} \cdot 0 + \xi_{2p} \cdot 200 + \left(1 - \xi_{1p} - \xi_{2p}\right) \cdot 200 \end{aligned}$$

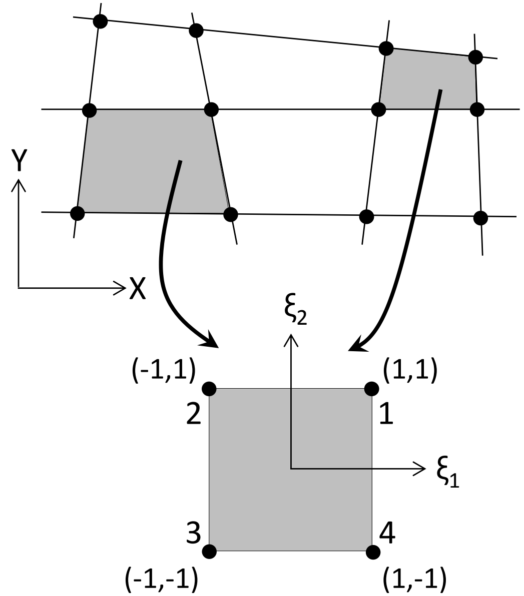
$$\xi_{1p} = 0.2$$

$$\xi_{2p} = 0.2$$

$$\big\downarrow \quad \delta\left(\{x\}_p\right) = \xi_{1p} \cdot 0 + \xi_{2p} \cdot 40 + \left(1 - \xi_{1p} - \xi_{2p}\right) \cdot 90$$

$$\delta\left(\{x\}_p\right) = 0.2 \cdot 0 + 0.2 \cdot 40 + (1 - 0.2 - 0.2) \cdot 90 = 74$$

- El procedimiento se emplea para cualquier otro tipo de elemento, utilizando sus propias funciones de interpolación expresados en coordenadas naturales



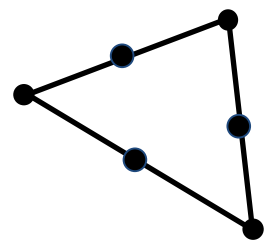
$$N^1(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}\cdot(1+\xi_1)\cdot(1+\xi_2)$$

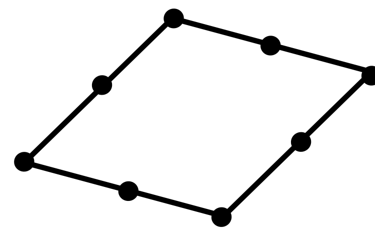
$$N^2(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}\cdot(1-\xi_1)\cdot(1+\xi_2)$$

$$N^3(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}\cdot(1-\xi_1)\cdot(1-\xi_2)$$

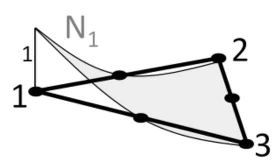
$$N^4(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}\cdot(1+\xi_1)\cdot(1-\xi_2)$$

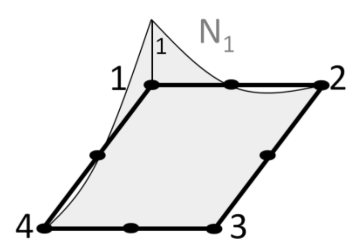
- Hasta ahora se han estudiado elementos de primer orden, que sólo tienen nodos en sus vértices. También existen elementos de orden superior: los de segundo orden tienen un nodo en el medio de cada lado, los de tercer orden dos…





ELEMENTO TRIÁNGULO DE SEGUNDO ORDEN Y FUNCIÓN DE INTERPOLACIÓN

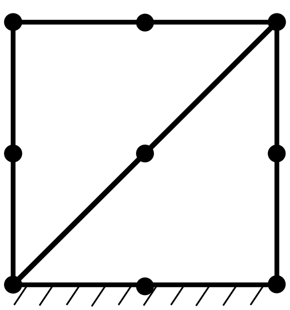


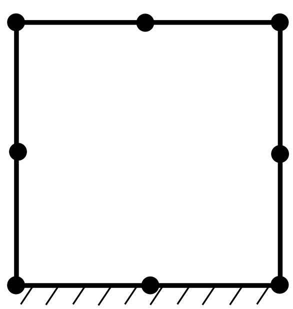


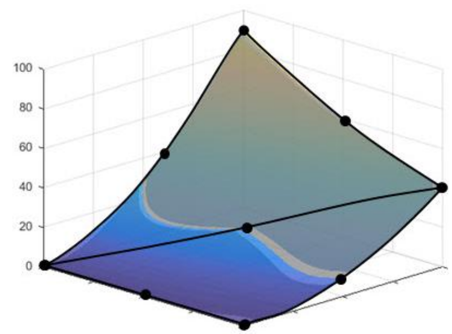
ELEMENTO CUADRILÁTERO DE SEGUNDO ORDEN Y FUNCIÓN DE INTERPOLACIÓN

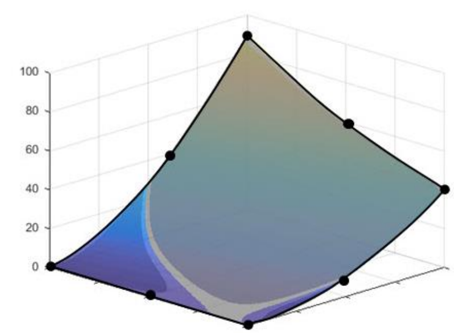
- Como las funciones de interpolación de los elementos de segundo orden son de orden superior a las de los elementos de primer orden, la interpolación da como resultado una solución que se puede aproximar mejor a la solución real

- Como contrapartida los elementos de segundo orden tienen un mayor coste computacional por su mayor número de grados de libertad









NOTA: Todas las imágenes de este documento son propias