4. GAIA. ESPEKEN ZINEMATIKA

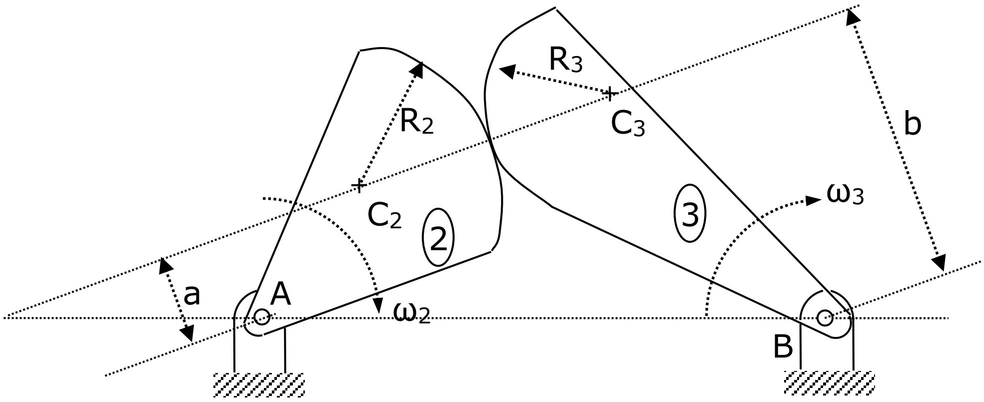
4.1 PROBLEMA 4.1

4.1.1 ENUNTZIATUA

2 eta 3 elementuak **R_2** eta **R_3** kurbadura erradioa daukate, hurrenez hurren, elkar ukitze-puntuan eta haien kurbadura zentroak C_2 eta C_3 dira hurrenez hurren.
Frogatu honako adierazpena betetzen dela:

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{b}{a}$$

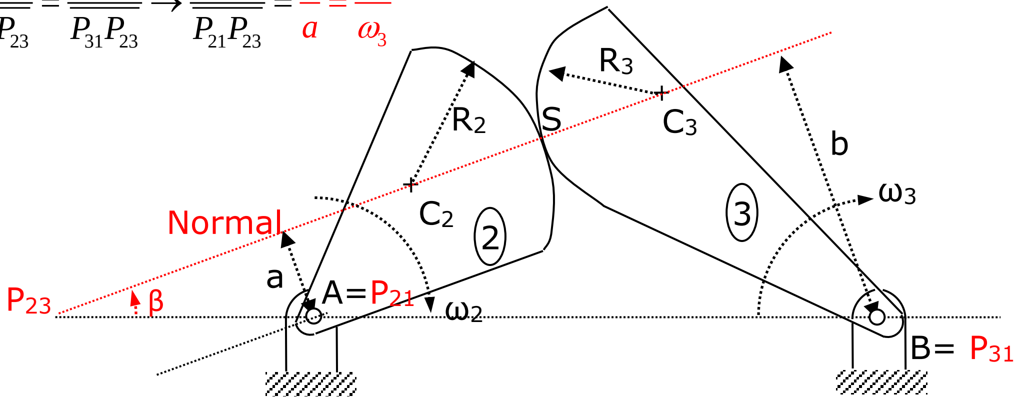
non **a** eta **b** C_2C_3 zuzenarekiko distantziak diren A eta B puntuetatik neurtuta, hurrenez hurren.



4.1.2 EBAZPENA

$$v_{P_{23}} = \omega_2 \overline{P_{21}P_{23}} = \omega_3 \overline{P_{31}P_{23}} \rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\overline{P_{31}P_{23}}}{\overline{P_{21}P_{23}}}$$

$$\frac{a}{\overline{P_{21}P_{23}}} = \frac{b}{\overline{P_{31}P_{23}}} \rightarrow \frac{\overline{P_{31}P_{23}}}{\overline{P_{21}P_{23}}} = \frac{b}{a} = \frac{\omega_2}{\omega_3}$$



Oharra: (2) eta (3) elementuen arteko abiadura-poloa P_{23}-ren kontzeptua erabiliz, zuzenki lortzen da ekuazioa frogatzea.

4.2 PROBLEMA 4.2

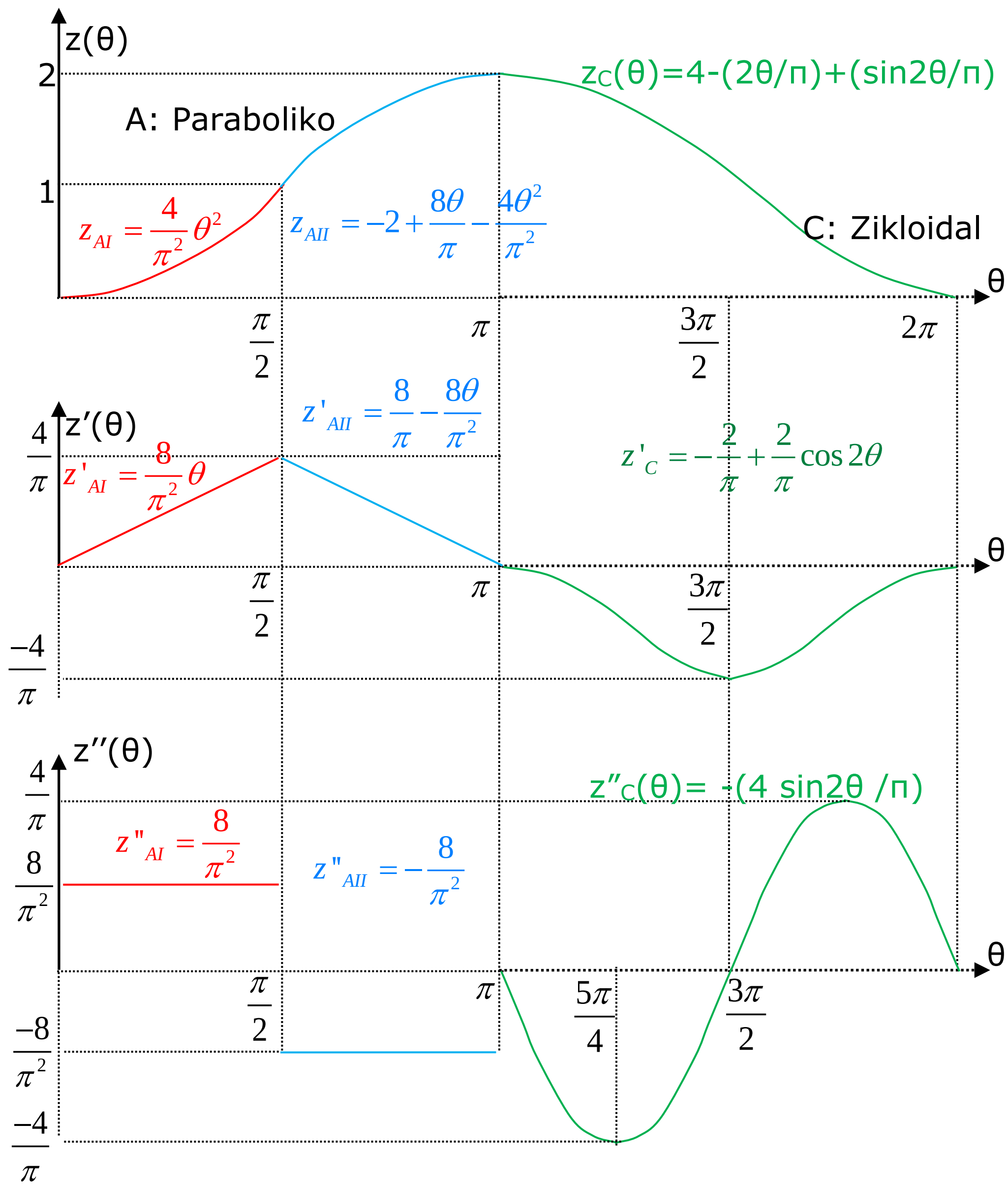
4.2.1 ENUNTZIATUA

Disko-espeka batek 1200 rpm-ko abiadura angeluar konstantez biratzen du eta 2 cm igo behar du arrabol-jarraitzailea, traslaziozkoa eta zentratu gabea dena. Honako desplazamendu-diagrama bete behar da: igoera parabolikoa espekaren ibilbidearen erdian, hau da 180º gradutan, eta jaitsiera zikloidala hasierako posizioraino.

Honako kalkulatzea eskatzen da:

1. Desplazamendu-diagrama
2. Abiaduren eta azelerazioen diagramak, kalkulatuz abiadura eta azelerazio maxiomoak igoeran eta jaitsieran.

4.2.2 EBAZPENA



Azalpena: Desplazamendu parabolikoko eta zikloidaleko funtzioak aplikatuz lortzen da espekaren desplazamendu-diagrama osoa. Disko-espekak biratutako angeluari θ deituz gero, desplazamendu-diagrama osoa θrekiko deribatuz eta espekaren abiadura angeluarra konstante dela jakinik jarraitzailaren abiadurak eta azelerazioak aldiunero definituak daude.

4.3 PROBLEMA 4.3

4.3.1 ENUNTZIATUA

Irudian espekako mekanismoa erakusten da. Espekak **R** erradioko eta **A** zentroko zirkunferentzia du profila eta O-rekiko biratzen du **ω** abiadura angeluar konstantez (erlojuaren orratzen kontra), traslaziozko jarraitzailea arrabolekoa izanik. O-tik A punturainoko distantzia **b** da, eta arrabolak B puntuan dauka zentroa eta berre erradioa **r** da. Irudiko aldiunean OAk horizontalarekiko osaturiko angelua **θ** da eta AB zuzenak bertikalarekiko osaturiko angelua **β** da. OB distantziak jarraitzailearen desplazamendu funtzioa z(θ) definitzen du.

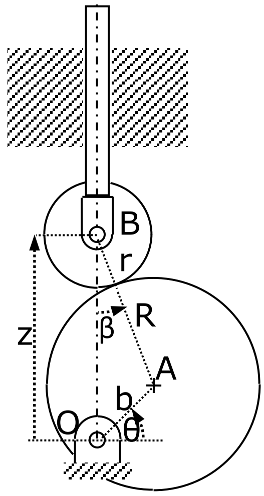
A ATALA

1) Jarraitzailearen gainean P indar bertikala beherantz aplikatuta badago eta jarraitzailea marruskadurik gabe higitzen bada, frogatu O puntuan aplikatu behar den momentua (erlojuaren orratzen kontra) $\boxed{M=\dfrac{b\cos(\theta-\beta)}{\cos\beta}P}$ den mekanismoa oreka estatikoan egoteko.

2) Frogatu **$z(\theta)=b\sin\theta+[(R+r)^2-b^2\cos 2\theta]^{1/2}$**

3) Frogatu dz/dt egitearen bidez jarraitzailearen abiadura $v=\omega bz\cos\theta/(z-b\sin\theta)$ dela

B ATALA



Jarraitzailearen higidura absolutua arraste-higidura batean eta higidura erlatibo batean deskonposatu daitekeenez, arrasteko sistema espeka izanik eta arraboleko zentroaren ibilbide erlatiboa espekarekiko R+r erradioko eta A zentroko zirkunferentzia dela kontuan hartuz:

4) Frogatu jarraitzailearen abiadura $\boxed{v=\tan\beta\omega z}$

5) Frogatu Jarraitzailearen azelerazioa $\boxed{a=\dfrac{\omega^2}{\cos\beta}\left[\dfrac{2z}{\cos\beta}-z\cos\beta-\dfrac{z^2}{(R+r)\cos^2\beta}\right]}$

C ATALA

$\theta=30^\circ$, b = 25mm, R = 40 mm, r = 30 mm, eta ω = 10 $rad\cdot s^{-1}$ konstante diren kasuan:

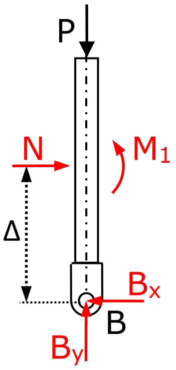
6) Kalkulatu jarraitzailearen abiadura eta azelerazioa

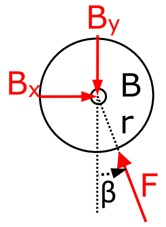
7) Kalkulatu presio-angeluaren balioa

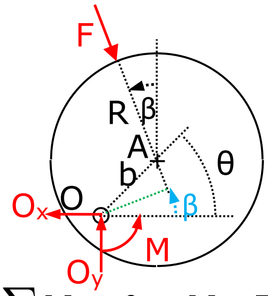
8) Arrabol-jarraitzailearen barrarekin soldatuta dagoela kontsideratuz eta bi elementu higikorren arteko abiadura-poloa erabiliz, kalkulatu jarraitzailearen abiadura. Badago ezberdintasunaren bat soldatu gabeko kasuaren balioarekiko?

4.3.2 EBAZPENA

A)







$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y = P$$

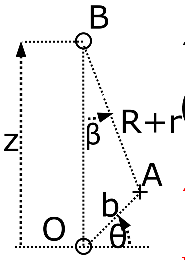
$$\sum F_y = 0$$

$$B_y = F\cos\beta$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow M = Fb\cos(\theta-\beta)$$

$$M = \frac{\cos(\theta-\beta)}{\cos\beta}Pb$$

B)

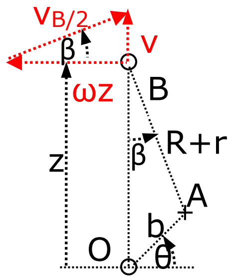


$$z = b\sin\theta + (R+r)\cos\beta$$

$$(R+r)\cos\beta = \sqrt{(R+r)^2 - b^2\cos^2\theta}$$

$$z = b\sin\theta + \sqrt{(R+r)^2 - b^2\cos^2\theta}$$

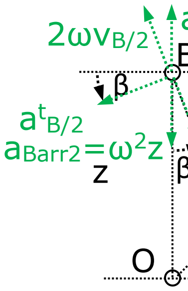
$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{bz\cos\theta}{z - b\sin\theta}\right)\omega$$



$$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_{Barr2}} + \overrightarrow{v_{B/2}}$$

$$\tan\beta = \frac{v}{\omega z}$$

$$v = \omega z\tan\beta$$



$$a^n_{B/2} = \frac{v^2_{B/2}}{R+r}$$

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_{Barr2}} + \overrightarrow{a_{B/2}} + 2\overrightarrow{\omega_2}\times\overrightarrow{v_{B/2}}$$

$$\begin{cases} 0 = -a^t_{B/2}\cos\beta + \dfrac{v^2_{B/2}}{R+r}\sin\beta - 2\omega v^2_{B/2}\sin\beta \\ a = -\omega^2 z - a^t_{B/2}\sin\beta - \dfrac{v^2_{B/2}}{R+r}\cos\beta + 2\omega v^2_{B/2}\cos\beta \end{cases}$$

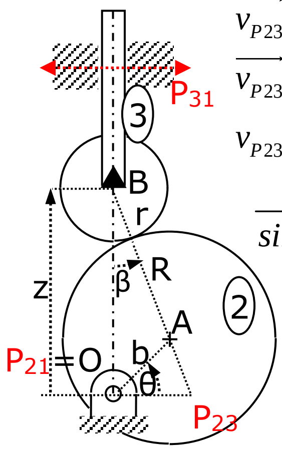
$$a = \frac{\omega^2}{\cos\beta}\left[\frac{2z}{\cos\beta} - z\cos\beta - \frac{z^2}{(R+r)\cos^2\beta}\right]$$

C) θ=30º,
b = 25mm,
R = 40 mm,
r = 30 mm, y
ω = 10 rad·s^{-1} =kte

$\beta = 18^o$

$v = 257{,}16\,mm{\cdot}s^{-1}$

$a = -805{,}38\,mm{\cdot}s^{-2}$



$$\overrightarrow{v_{P23}} = \overrightarrow{v_O} + \overrightarrow{\omega_2}\times\overrightarrow{OP_{23}}$$

$$\overrightarrow{v_{P23}} = v\uparrow$$

$$v_{P23} = \omega\overline{OP_{23}} = v$$

$$\frac{b}{\sin(90^o-\beta)} = \frac{\overline{OP_{23}}}{\sin(90^o-(\theta-\beta))}$$

$$\overline{OP_{23}} = \frac{b\cos(\theta-\beta)}{\cos\beta}$$

$$v = \frac{b\cos(\theta-\beta)}{\cos\beta}\omega$$

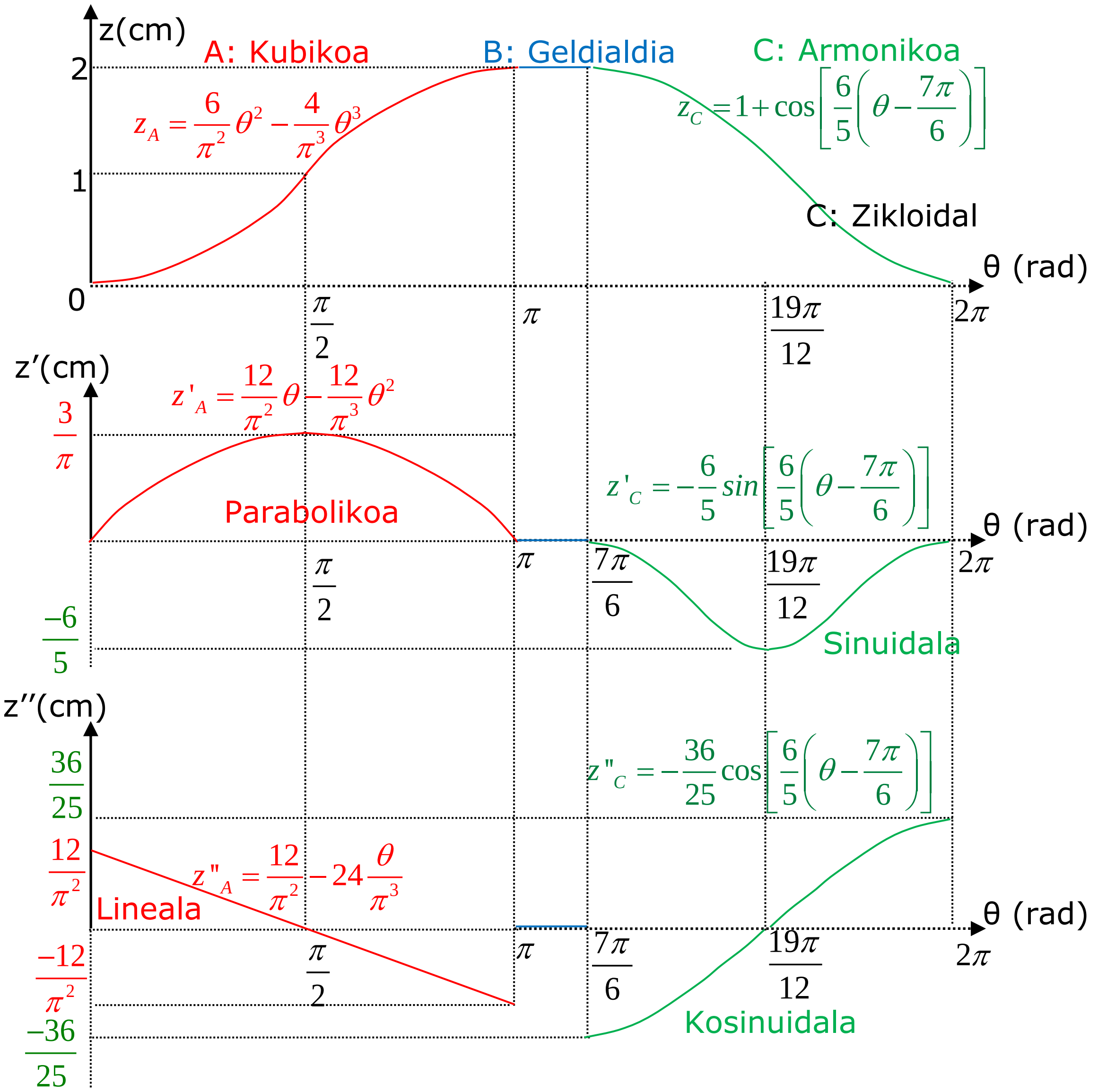
Oharra: P_{23} abiadura-poloa kontzeptua erabiliz jarraitzailaren abiadura lor daiteke.

4.4 PROBLEMA 4.4

4.4.1 ENUNTZIATUA

Disko-espeka batek traslaziozko jarraitzaile arraboldun bat eragiten du. Jarraitzaileak honako desplazamendu-diagrama bete behar du:
a) 180º gradutan 2 cm-ko igoera kubikoa
b) 30º gradutan geldialdia
c) buelta bat betetzeko gainontzeko biraketa-tartean jaitsiera harmonikoa hasierako posizioraino.
Honakoa kalkulatzea eskatzen da:
1. Desplazamendu-diagrama osoa $z(\theta)$
2. Desplazamendu-diagramaren lehenengo eta bigarrengo deribatuak θrekiko, bere balio maximoak zehaztuz

4.4.2 EBAZPENA

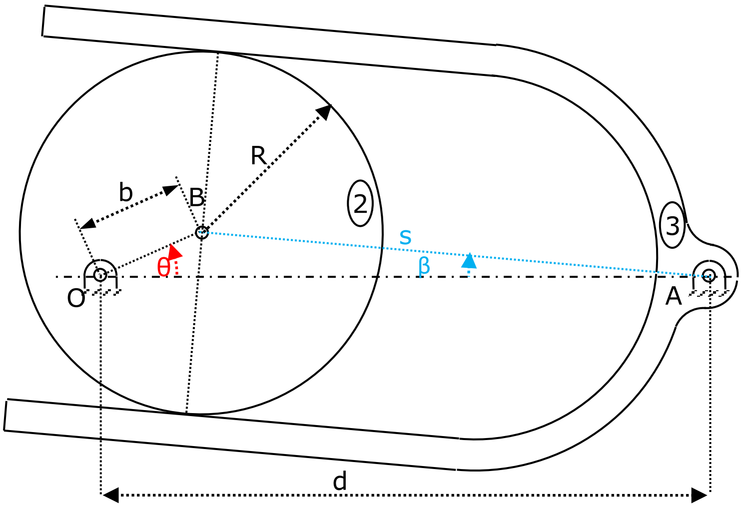


Azalpena: Desplazamendu kubikoa eta arminokoa funtzioak aplikatuz lortzen da espekaren desplazamendu-diagrama osoa. Disko-espekak biratutako angeluari θ deituz gero, desplazamendu-diagrama osoa θrekiko deribatuak zuzenean lortzen dira.

4.5 PROBLEMA 4.5

4.5.1 ENUNTZIATUA

Espeka-mekanismo bat erakusten da irudian, espeka zirkularra eta jarraitzaile oszilakorra izanik. Mekanismo honetan itxurako itxierak espeka eta jarraitzailearen arteko ukipena bermatzen du kontrako bi puntuak uneoro ukipenean egoteagatik.



1) Kalkulatu mekanismoaren askatasun maila

2) Planteatu kokapen-problema, abiadura-problema eta azelerazio-problema, θ aldagai independentea eta β eta s aldagai dependenteak erabiliz jakobianoa honelako matrizea lortuz.

$$\boxed{Z=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial s} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \beta}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial s} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta & -s\cdot sin\beta\\ -sin\beta & -s\cdot\cos\beta\end{bmatrix}}$$

3) Frogatu kokapen-problemaren soluzioak honakoak direla:

$\boxed{s=\sqrt{d^2+b^2-2bd\cos\theta}}$ tanβ=(bsinθ)/(d-bcosθ)

4) Frogatu abiadura-problemaren soluzioak honakoak direla:

ds/dt=bsin(θ+β)dθ/dt $\boxed{\dot\beta=\dfrac{b}{s}\cos(\theta+\beta)\dot\theta}$

5) Frogatu azelerazio-problemaren soluzioak honakoak direla:

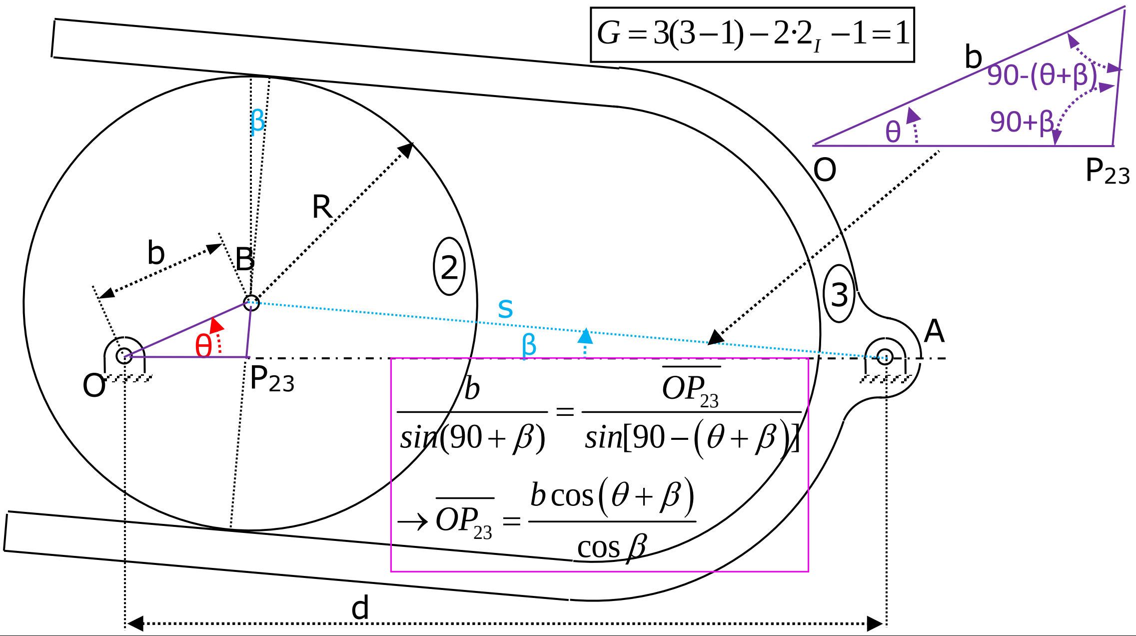
$$\ddot{s}=b\dot\theta^2\cos(\theta+\beta)+b\ddot\theta sin(\theta+\beta)+\dot\beta^2 s$$
$$\ddot\beta=(-b\dot\theta^2\sin(\theta+\beta)+b\ddot\theta cos(\theta+\beta)-2\dot\beta\dot s)/s$$

6) B-ren higidura absolutua jarraitzaileak arrastratutako higiduran eta jarraitzailearekiko higidura erlatiboan deskonposatuz gero, frogatu jarraitzailearen abiadura angeluarra $\dot\beta$ eta B-ren jarraitzailearekiko abiadura erlatiboa 4 ataleko balioekiko berdinak direla.

7) Espeka eta jarraitzailearen arteko abiadura-poloa P_{23} irudian irudikatuz, frogatu Otik P_{23}rainoko distantzia $\boxed{\overline{OP_{23}}=\dfrac{b\cos(\theta+\beta)}{\cos\beta}}$ dela eta P_{23}-ren abiadura $\boxed{\dfrac{b\cos(\theta+\beta)}{\cos\beta}\dot\theta}$ dela

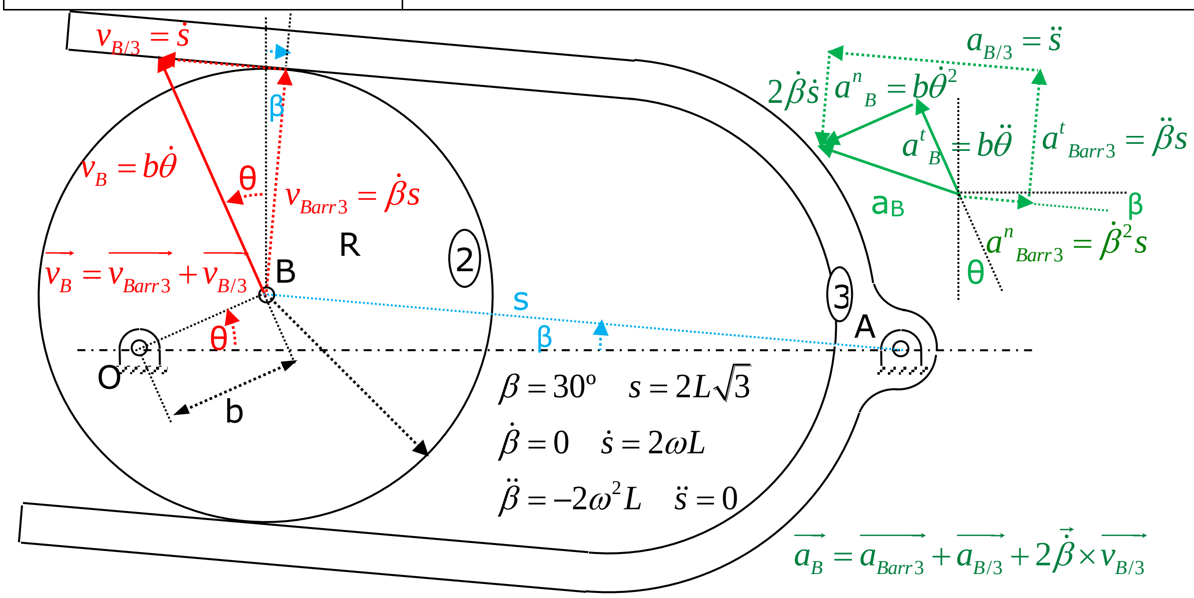
8) $b=2L$, $d=4L$, θ =60º eta $\dot\theta=\omega$ kte.,kalkulatu s, β, $\dot s$, $\dot\beta$, $\ddot s$, $\ddot\beta$

4.5.2 EBAZPENA



KOKAPEN PROBLEMA	$f_1(s,\beta)=b\cdot\cos\theta+s\cdot\cos\beta-d=0$ $f_2(s,\beta)=b\cdot sin\theta-s\cdot sin\beta=0$	$Z=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta}\\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta & -s\cdot sin\beta\\ -sin\beta & -s\cdot cos\beta\end{bmatrix}$

ABIADURENPROBLEMA	AZELERAZIOEN PROBLEMA
$[Z]\begin{Bmatrix}\dot{s}\\ \dot{\beta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}b\cdot sin\theta\dot{\theta}\\ -b\cdot\cos\theta\dot{\theta}\end{Bmatrix}$	$[Z]\begin{Bmatrix}\ddot{s}\\ \ddot{\beta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}b\cdot\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2+b\cdot sin\theta\cdot\ddot{\theta}+2\dot{s}\dot{\beta}sin\beta+s\cdot\cos\beta\cdot\dot{\beta}^2\\ b\cdot sin\theta\cdot\dot{\theta}^2-b\cdot\cos\theta\cdot\ddot{\theta}+2\dot{s}\dot{\beta}\cos\beta-s\cdot sin\beta\cdot\dot{\beta}^2\end{Bmatrix}$

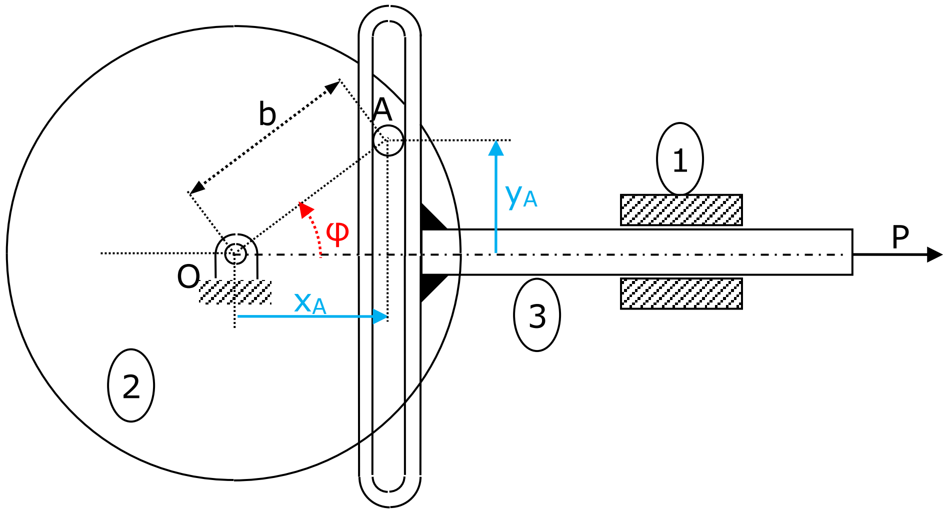


Oharra: Trigonometriaren bidez kokapen-problema planteatu daiteke eta higidura erlatiboko ekuazioak erabiliz abiadurak eta azelerazioak lortzen dira.

4.6 PROBLEMA 4.6

4.6.1 ENUNTZIATUA

Irudian uztarri eskoziarraren mekanismoa erakusten da sarrerako elementua 2) diskoa eta irteerakoa 3) jarraitzailea izanik.



Kalkulatu:

1) Mekanismoaren askatasun maila

2) Irteerako elementuan P indar horizontala eskubirantz aplikatuta badago, kalkulatu O puntuan aplikatu behar den momentua mekanismoa oreka estatikoan egoteko, marruskadura ez dagoela kontuan hartuz.

3) Planteatu kokapen-problema, abiadura-problema eta azelerazio-problema, φ aldagai independentea eta x_A eta y_A aldagai dependenteak erabiliz.

4) Kokapen-problema ebatziz frogatu jarraitzailearen desplazamendu funtzioa harmonikoa dela eta irudikatu φ-ren menpe buelta oso batean. Zenbatekoa da jarraitzailearen ibiltartea ("karrera")?

5) Ebatzi abiadura-problema eta azelerazio-problema.

6) A-ren higidura absolutua jarraitzaileak arraste-higiduran eta jarraitzailearekiko higidura erlatiboan deskonposatuz gero, frogatu jarraitzailearen abiadura eta azelerazioa eta metodo analitikoen bidezko abiadura eta azelerazioa berdinak direla.

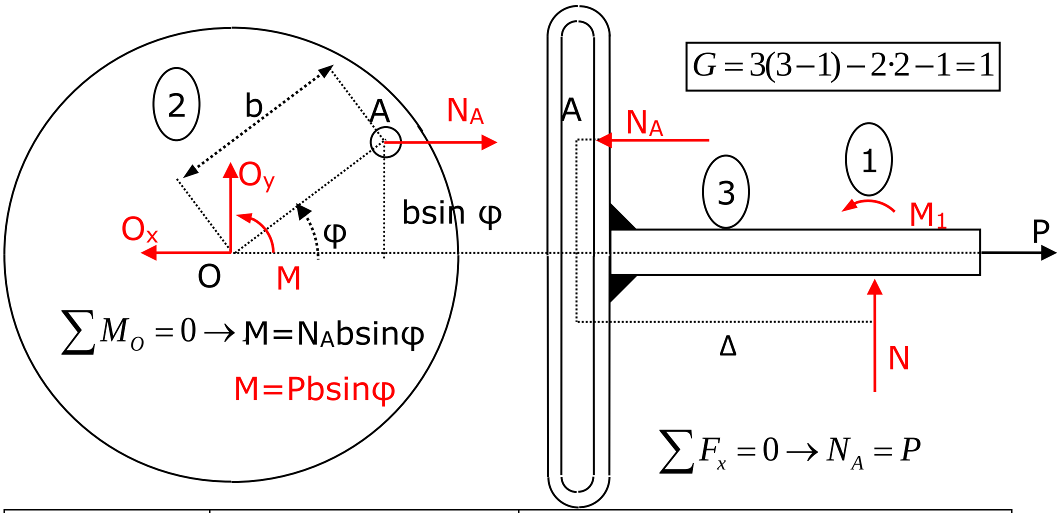
7) Elementu higikorren arteko abiadura-poloa P_{23} irudian adierazi, frogatu $OP_{23}=b\sin\varphi$ dela eta P_{23}-ren abiadura $\mathbf{v_{P23}=b\sin\varphi\ d\varphi/dt}$ <- dela.

8) $b=L$, φ = 30º eta $\dot{\varphi}=\omega$ konstante direnean, kalkulatu irteerako elementuaren abiadura eta azelerazioa.

4.6.2 EBAZPENA

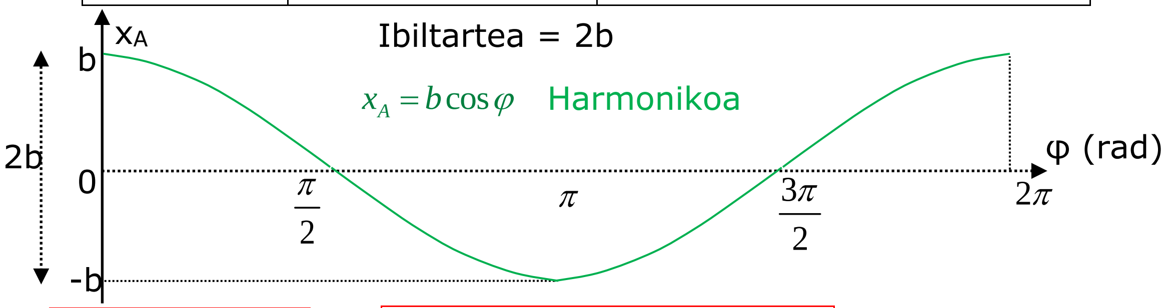
1)

2)



3)

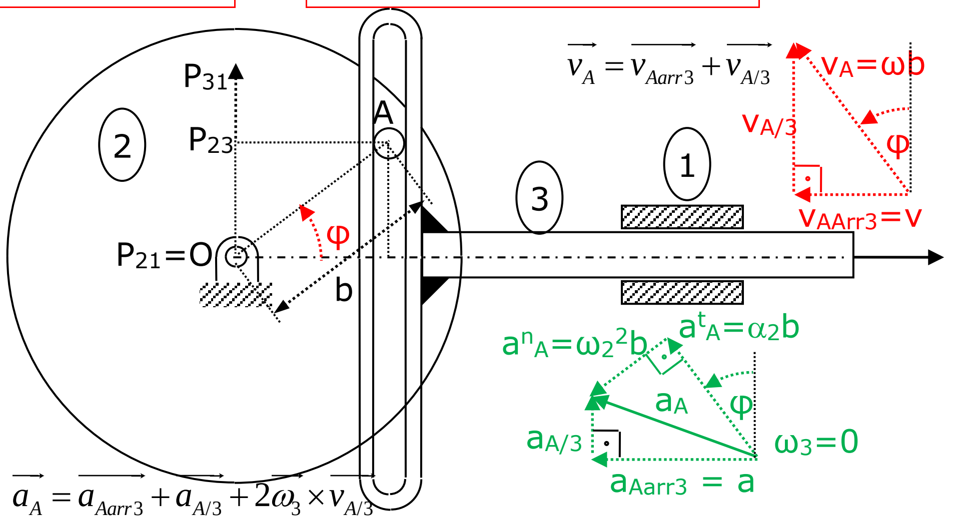
KOKAPENA	ABIADURAK	AZELERAZIOAK
$x_A = b\cos\varphi$	$v = \dot{x}_A = b(-\sin\varphi)\dot{\varphi}$	$a = \ddot{x}_A = b(-\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 + b(-\sin\varphi)\ddot{\varphi}$
$y_A = b\sin\varphi$	$v_{A/3} = \dot{y}_A = b(\cos\varphi)\dot{\varphi}$	$a_{A/3} = \ddot{y}_A = b(-\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + b(\cos\varphi)\ddot{\varphi}$



5) $\boxed{v = \dot{x}_A = b(-\sin\varphi)\dot{\varphi}}$ $\boxed{a = \ddot{x}_A = b(-\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 + b(-\sin\varphi)\ddot{\varphi}}$

6)

7)



8) $\boxed{\vec{v} = 0,5\omega b \leftarrow}$ $\boxed{\vec{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 b \leftarrow}$

Oharra: higidura erlatiboko ekuazioak erabiliz abiadura eta azelerazioak lor daitezke.