Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

3. GAIA.

MEKANISMO PLANOEN AZTERKETA ZINEMATIKOA

Neftalí Carbajal de la Red

AURKIBIDEA

AZTERKETA ZINEMATIKOAREN PROBLEMA MOTAK

HASIERAKO

DESPLAZAMENDU FINITUEN

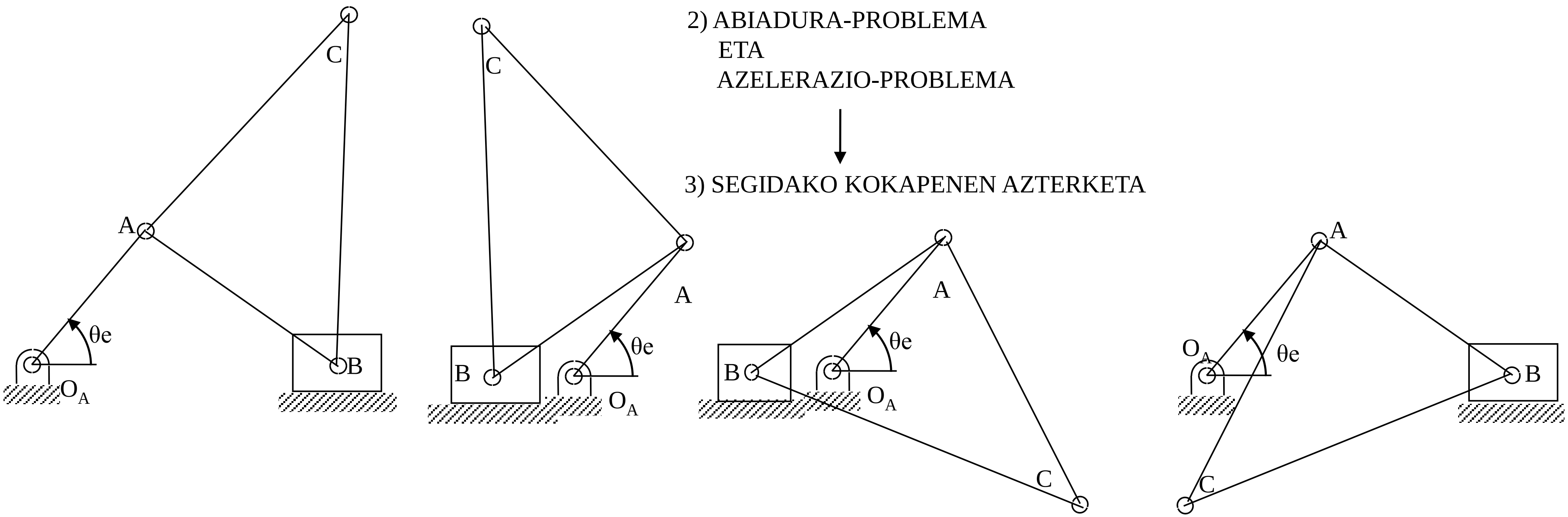
1) KOKAPEN- PROBLEMA

a) ZUZENA

b) ALDERANTZIZKOA

2) ABIADURA-PROBLEMA
ETA
AZELERAZIO-PROBLEMA

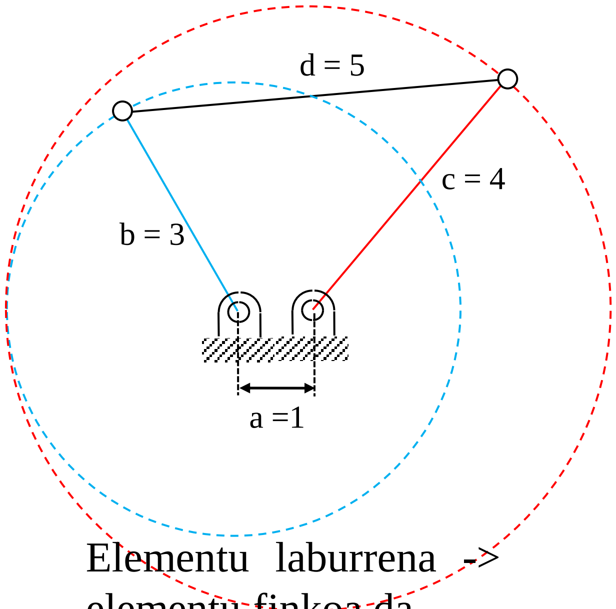
3) SEGIDAKO KOKAPENEN AZTERKETA



GRASHOF-EN LEGEA $\boxed{a+d<b+c}$ $a \le b \le c \le d$

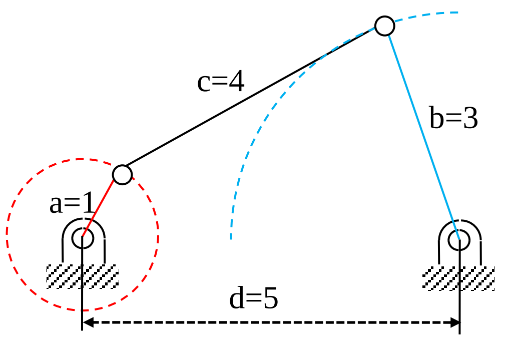
Lauki giltzatu batean, barra laburrenak soilik eman dezake bira osoa besteekiko (eta alderantziz ere), honako hau betetzen bada: barra laburrenaren eta luzeenaren batura beste bien arteko batura baino txikiagoa izatea.

BIRADERA BIKOITZA



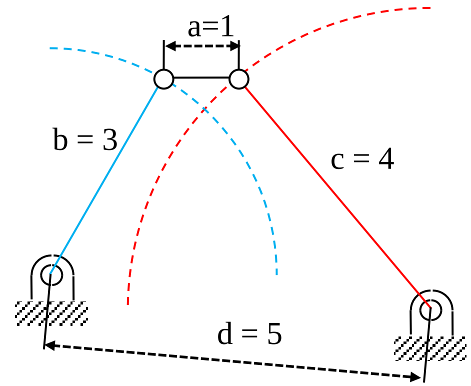
Elementu laburrena -> elementu finkoa da

BIELA-BIRADERA



Elementu laburrena -> finkoaren alboan dago

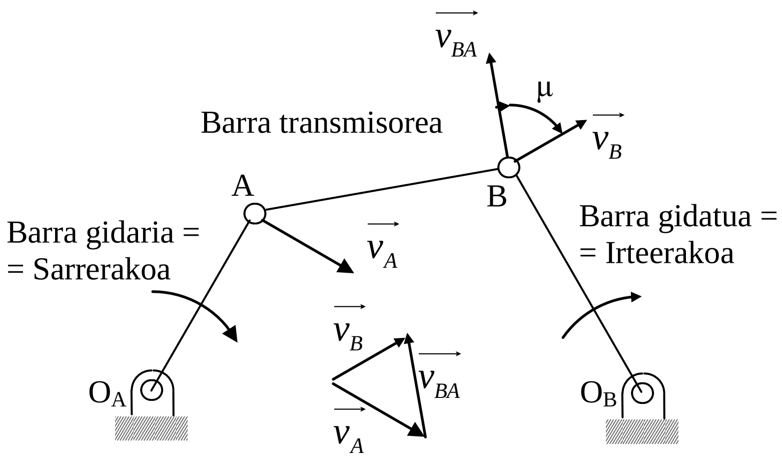
BALANTZIN BIKOITZA



Elementu laburrena -> finkoaren kontrakoan dago

TRANSMISIO-ANGELUA

Honako bi bektoreen arteko angelu txikiena bezala definitzen da. Alde batetik, barra transmisoreak sarrera eta irteera elementuekin dituen konexio-puntu bien arteko abiadura erlatiboa eta bestalde, irteera elementuan barra transmisorearekin duen konexio-puntuaren abiadura absolutua. Bektore biak konexio-puntuan kokatuta hartzen dira.



$\mu = 90^{o}$	Transmisio-angeluaren baliorik HOBERENA
$0 \leq \mu < 45^{o}$	Transmisio-angelu horiek ez dira onargarriak.
$\mu = 0^{o}$	Transmisio-angeluaren baliorik OKERRENA

OHARRA

μ-ren balioa 90º baino handiagoa ateratzen bada, 180º-arekin osatzen duen angelua aukeratzen da.
Hau da, μ = 105º eta μ = 75º transmisio-angelu baliokideak dira.

ABANTAILA MEKANIKOA (AM)

Abantaila Mekanikoa sarrera eta irteera indarren arteko zatidura bezala definitzen da.

$$\boxed{AM = \frac{F_i}{F_S}} \qquad \begin{cases} F_i : \text{Irteerako indarra} \\ F_s : \text{Sarrerako indarra} \end{cases}$$

Galerarik ez

Potentzia edo energia S ⇒ MEKANISMOA ⇒ Potentzia edo energia I = Potentzia edo energia S

Indarra Momenta Abiadura S

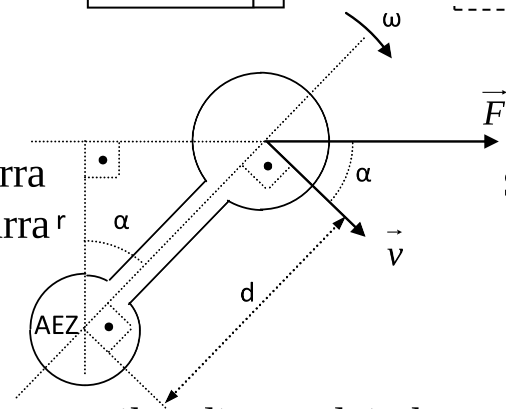
s: sarrera
i: irteera

Indarra Momenta Abiadura I ≠ Indarra Momenta Abiadura S

$$\left.\begin{array}{l} T_S = F_S \cdot r_S \rightarrow F_S = \dfrac{T_S}{r_S} \\ T_i = F_i \cdot r_i \rightarrow F_i = \dfrac{T_i}{r_i} \end{array}\right\} \quad \frac{F_i}{F_S} = \frac{T_i}{T_S}\frac{r_S}{r_i}$$

$$\boxed{AM = \frac{\omega_S}{\omega_i}\frac{r_S}{r_i}} \qquad \begin{cases} \omega_i : \text{Irteerako abiadura angeluarra} \\ \omega_s : \text{Sarrerako abiadura angeluarra} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_i : F_i \text{ indarraren besoa} \\ r_s : F_s \text{ indarraren besoa} \end{cases}$$



Sarrerako potentzia = Irteerako potentzia

$$P_S = T_S \cdot \omega_S = T_i \cdot \omega_i = P_i \rightarrow \frac{T_i}{T_S} = \frac{\omega_S}{\omega_i}$$

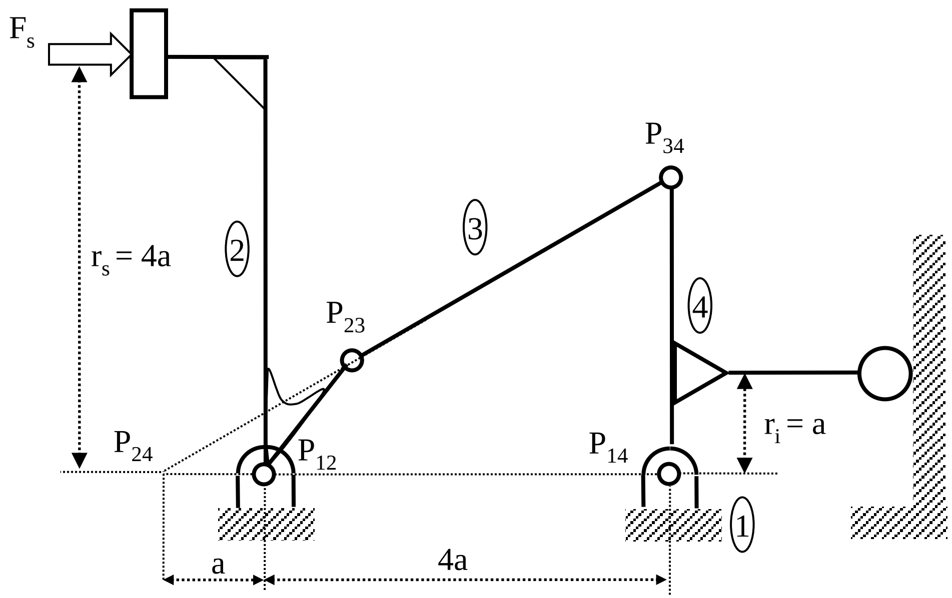
Transmisio-erlazioa distantzia-terminoetan oso-osorik adieraz daitekeenez (sarrera eta irteera elementuen arteko mugimendu erlatiboaren AEZren kokapenean oinarrituta), abantaila mekanikoa ere distantzien zatidura bezala adieraz daiteke. Beraz, abantaila mekanikoa EZAUGARRI GEOMETRIKOA da soilik.

ABANTAILA MEKANIKOAREN GAINEKO ADIBIDEA

Irudiko mekanismoan F_S =15 kg-ko sarrerako indarra eginez gero, honakoak kalkulatu:

a) Abantaila Mekanikoa.

b) Hormaren kontra egindako indarren balioa kalkulatzea eskatzen da.



EMAITZAK

$$\boxed{AM = 20}$$

$$\boxed{F_i = 300\,kg}$$

TRANSMISIO-ANGELUA ETA ABANTAILA MEKANIKOA KALKULATZEKO PROBLEMA

Irudiko mekanismoan, sarrerako elementuan 10 kg aplikatuz gero

a) Zenbatekoa da transmisio-angelua (μ<90º)? Onargarria da?

b) Zenbatekoa izango da Abantaila Mekanikoa? Eta irteerako indarra?

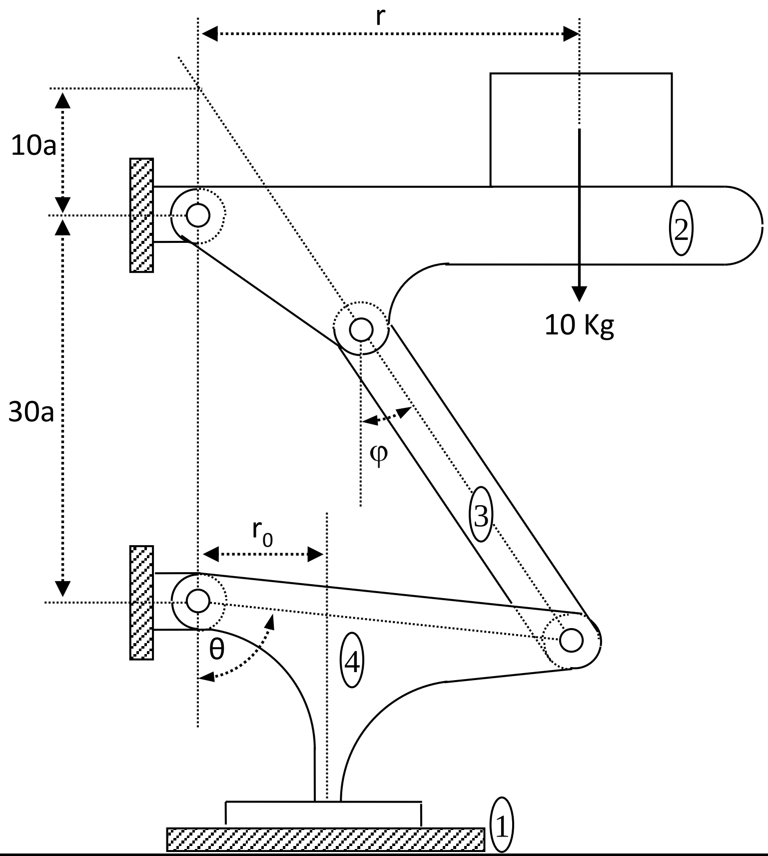
DATUAK

r = 78a

r_o = 26a

φ = 25º

θ = 85º

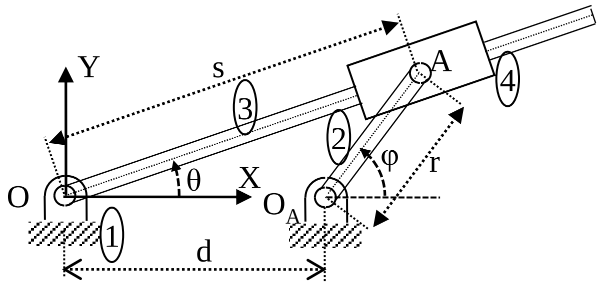


EMAITZAK

$\boxed{\mu = 60^{o}}$ Onargarria

$\boxed{AM = 12}$ $\boxed{F_i = 120kg}$

PLANTEAMENDUA



DATUAK:

d, r, φ, dφ/dt, $d^2\varphi/dt^2$

EZEZAGUNAK:

s, θ, ds/dt, dθ/dt, d^2s/dt^2, $d^2\theta/dt^2$

$$Z=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial s} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial s} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta}\end{bmatrix}$$

$$Z=\begin{bmatrix}-\cos\theta & s\cdot \sin\theta\\ -\sin\theta & -s\cdot\cos\theta\end{bmatrix}$$

1. KOKAPEN-PROBLEMAREN EKUAZIOAK

$$d+r\cdot\cos\varphi-s\cdot\cos\theta=0=f_1\ \ s,\theta$$
$$r\cdot\sin\varphi-s\cdot\sin\theta=0=f_2\ \ s,\theta$$

2. ABIADUREN PROBLEMAREN EKUAZIOAK

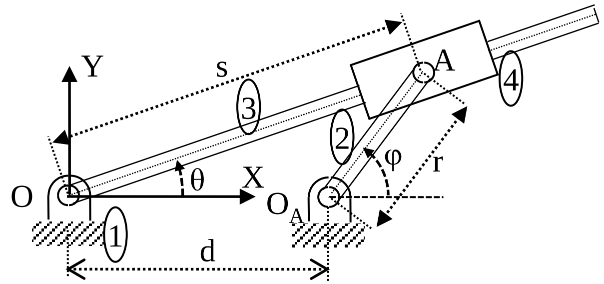
$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -s\cdot\sin\theta\\ \sin\theta & s\cdot\cos\theta\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{s}\\ \dot{\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-r\cdot\sin\varphi\\ r\cdot\cos\varphi\end{Bmatrix}$$

3. AZELERAZIOEN PROBLEMAREN EKUAZIOAK

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -s\cdot\sin\theta\\ \sin\theta & s\cdot\cos\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{s}\\ \ddot{\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}A\\ B\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}A\\ B\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-r\cdot\cos\varphi\ \dot{\varphi}^2-r\cdot\sin\varphi\ \ddot{\varphi}+2\dot{s}\dot{\theta}\sin\theta\cdot+s\cdot\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2\\ -r\cdot\sin\varphi\ \dot{\varphi}^2+r\cdot\cos\varphi\ \ddot{\varphi}-2\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta+s\ \sin\theta\ \dot{\theta}^2\end{Bmatrix}$$

EBAZPENA



DATUAK

d, r, φ, dφ/dt, $d^2φ/dt^2$

EZEZAGUNAK:

s, θ, ds/dt, dθ/dt, d^2s/dt^2, $d^2θ/dt^2$

1. KOKAPEN-PROBLEMAREN EBAZPENA

$$s=\sqrt{d^2+r^2+2dr\cos\varphi}$$

$$\theta=arctg\left(\frac{r\cdot sin\varphi}{d+r\cdot\cos\varphi}\right)$$

2.ABIADURAPROBLEMAREN EBAZPENA

$$\dot{s}=r\dot{\varphi}\cdot sin(\theta-\varphi)$$

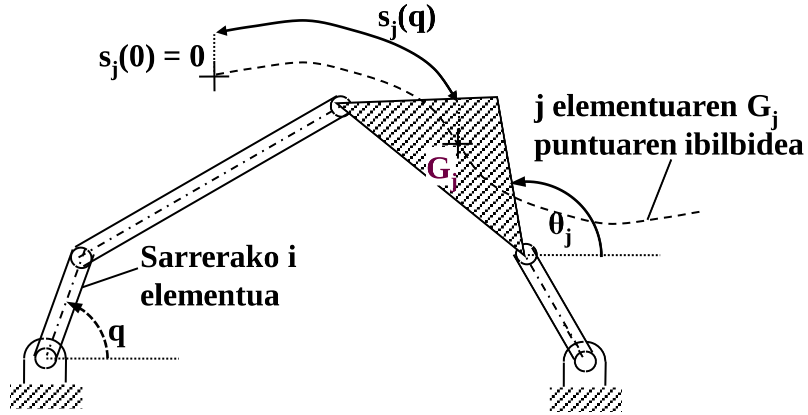
$$\dot{\theta}=\frac{r\dot{\varphi}}{s}\cos(\theta-\varphi)$$

3.AZELERAZIO-PROBLEMAREN EBAZPENA

$$\ddot{s}=r\ddot{\varphi}sin(\theta-\varphi)-r\dot{\varphi}^2\cos(\theta-\varphi)+s\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\theta}=\frac{1}{s}\left[r\ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)+r\dot{\varphi}^2 sin(\theta-\varphi)-2\dot{s}\dot{\theta}\right]$$

ERAGIN-KOEFIZIENTEAK



KOKAPEN-PROBLEMA

$$\begin{cases} \theta_j = f_j \;\; q \\ s_j = \overline{f}_j \;\; q \end{cases}$$

ABIADURA-PROBLEMA

$$\begin{cases} \dot{\theta}_j = \dfrac{df_j}{dq}\dot{q} = g_j\dot{q} \\ \dot{s}_j = \dfrac{d\overline{f}_j}{dq}\dot{q} = \overline{g}_j\dot{q} \end{cases}$$

AZELERAZIO-PROBLEMA

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_j = \dfrac{d^2 f_j}{dq^2}\dot{q}^2 + \dfrac{df_j}{dq}\ddot{q} = h_j\dot{q}^2 + g_j\ddot{q} \\ \ddot{s}_j = \dfrac{d^2\overline{f}_j}{dq^2}\dot{q}^2 + \dfrac{d\overline{f}_j}{dq}\ddot{q} = \overline{h}_j\dot{q}^2 + \overline{g}_j\ddot{q} \end{cases}$$

$f_j \;\; q$ Kokapeneko eragin-koefiziente angeluarra

$g_j \;\; q = \dfrac{df_j}{dq}$ Abiadurako eragin-koefiziente angeluarra

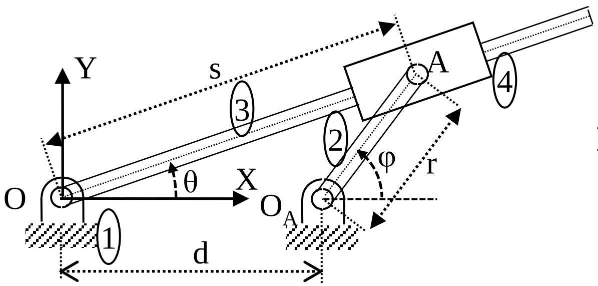
$h_j \;\; q = \dfrac{d^2 f_j}{dq^2}$ Azelerazioko eragin-koefiziente angeluarra

$\overline{f}_j \;\; q$ Kokapeneko eragin-koefiziente lineala

$\overline{g}_j \;\; q = \dfrac{d\overline{f}_j}{dq}$ Abiadurako eragin-koefiziente lineala

$\overline{h}_j \;\; q = \dfrac{d^2\overline{f}_j}{dq^2}$ Azelerazioko eragin-koefiziente lineala

ADIBIDEA



1. KOKAPEN-FUNTZIOAK

$$s = \sqrt{d^2 + r^2 + 2dr\cos\varphi} = \overline{f_4}\ \ \varphi$$

$$\theta = arctg\left(\frac{r \cdot sin\varphi}{d + r \cdot \cos\varphi}\right) = f_3\ \ \varphi$$

2. ABIADURAKO ERAGIN-KOEFIZIENTEAK

$$\dot{s} = r\dot{\varphi} \cdot sin\ \ \theta - \varphi \longrightarrow \overline{g_4}\ \ \varphi\ \ = \frac{d\overline{f_4}}{d\varphi} = r \cdot sin\ \ \theta - \varphi$$

$$\dot{\theta} = \frac{r\dot{\varphi}}{s}\cos\ \ \theta - \varphi \longrightarrow g_3\ \ \varphi\ \ = \frac{df_3}{d\varphi} = r \cdot \cos\ \ \theta - \varphi$$

3.AZELERAZIOKO ERAGIN-KOEFIZIENTEAK

$$\ddot{s} = r\ddot{\varphi}\, sin\ \ \theta - \varphi\ \ - r\dot{\varphi}^2\ \cos\ \ \theta - \varphi\ \ + s\dot{\theta}^2 \longrightarrow \overline{h_4}\ \ \varphi\ \ = \frac{d\overline{f_4}}{d\varphi} = -r \cdot \cos\ \ \theta - \varphi\ \ + \frac{r^2}{s}\cos^2\ \ \theta - \varphi$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{s}\left[r\ddot{\varphi}\cos\ \ \theta - \varphi\ \ + r\dot{\varphi}^2\ sin\ \ \theta - \varphi\ \ - 2\dot{s}\dot{\theta} \right] \longrightarrow h_3 = \frac{dg_3}{d\varphi} = \frac{1}{s}\left[r \cdot sin\ \ \theta - \varphi\ \ - 2\frac{r^2}{s} sin\ \ \theta - \varphi\ \ cos\ \ \theta - \varphi \right]$$

NEWTON-RAPHSON METODOA EKUAZIO-SISTEMA BATEAN

n ALDAGAI INDEPENDENTE
n EKUAZIO-SISTEMA EZ LINEALA $\Rightarrow$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi) = 0 \end{cases}$$

SOLUZIO-ZUTABEA

$$X_i = \begin{Bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \dots \\ x_{ni} \end{Bmatrix}$$

MATRIZE JAKOBIANOA $\Rightarrow$

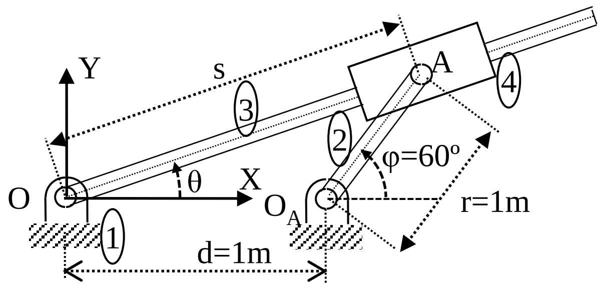
$$Z = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ERREKURRENTZI-EKUAZIOA

$$\boxed{X_{i+1} = X_i - Z_i^{-1} F_i}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_{1i+1} \\ x_{2i+1} \\ \dots \\ x_{ni+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \dots \\ x_{ni} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_{x_1=x_{1i}} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_{x_2=x_{2i}} & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_{x_n=x_{ni}} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_{x_1=x_{1i}} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_{x_2=x_{2i}} & \dots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_{x_n=x_{ni}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_{x_1=x_{1i}} & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_{x_2=x_{2i}} & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_{x_n=x_{ni}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_1(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}) \\ f_2(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}) \\ \dots \\ f_n(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}) \end{Bmatrix}$$

METODO NUMERIKOAREN BIDEZKO EBAZPENA



EMAITZA ANALITIKOA

$$\varphi = 60°$$

$$r = d = 1m$$

$$s = \sqrt{r^2 + d^2 + 2dr\cos\varphi} = \sqrt{3} = 1,73m$$

$$\theta = arctg\left(\frac{1 \cdot sin60^o}{1 + 1 \cdot sin60^o}\right) = 30^o = 0,52rad$$

$$Z = \begin{bmatrix} -\cos\theta & s \cdot sin\theta \\ -sin\theta & -s \cdot \cos\theta \end{bmatrix}$$

KOKAPENEKO EKUAZIO-SISTEMA EZ LINEALA

$$d + r \cdot \cos\varphi - s \cdot \cos\theta = 0 = f_1 \;\; s, \theta$$
$$r \cdot s\,in\varphi - s \cdot s\,in\theta = 0 = f_2 \;\; s, \theta$$

EMAITZA NUMERIKOA

1.Iterazioa

X_0	$Z(X_0)$		F_0	X_1
1	-1	0	0.5	1.5
0	0	-1	0.87	0.87

2.Iterazioa

X_1	$Z(X_1)$		F_1	X_2
1.5	-0.65	1.14	0.53	1.63
0.87	-0.76	-0.97	-0.28	0.48

3.Iterazioa

X_2	$Zi(X_2)$		F_2	X_3
1.63	-0.89	0.75	0.05	1.73
0.48	-0.46	-1.45	0.12	0.53

4.Iterazioa

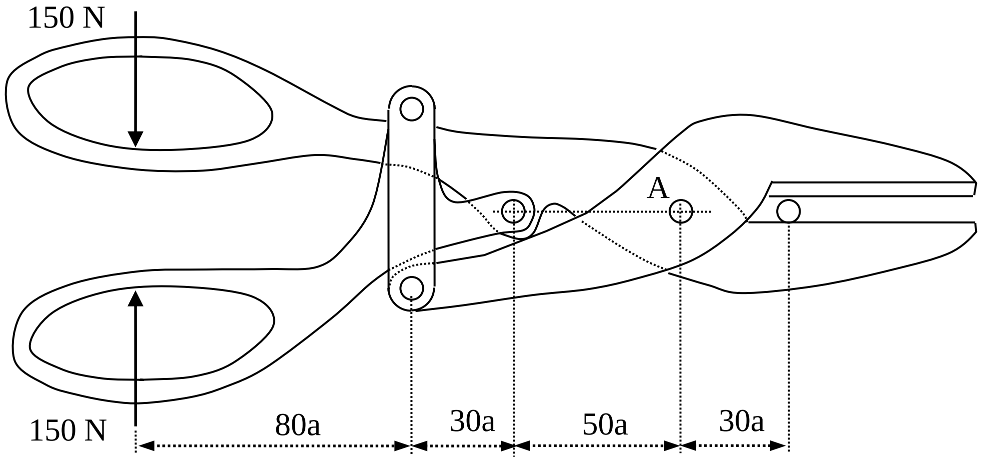
X_3	$Zi(X_3)$		F_3	X_4
1.73	-0.86	0.87	0.004	***1.734***
0.53	-0.50	-1.50	-0.003	***0.52***

PROBLEMA 1

Irudiko guraizeak erabili ohi dira ebakitze-indarrak handiak direnen kasuetan.

a) Kalkulatu guraizeen abantaila mekanikoa.

b) 150 N-eko konpresio-indarra egiten bada, zenbatekoa da ebakitze-indarra A puntutik 30a distantziara kokatutako puntuan?

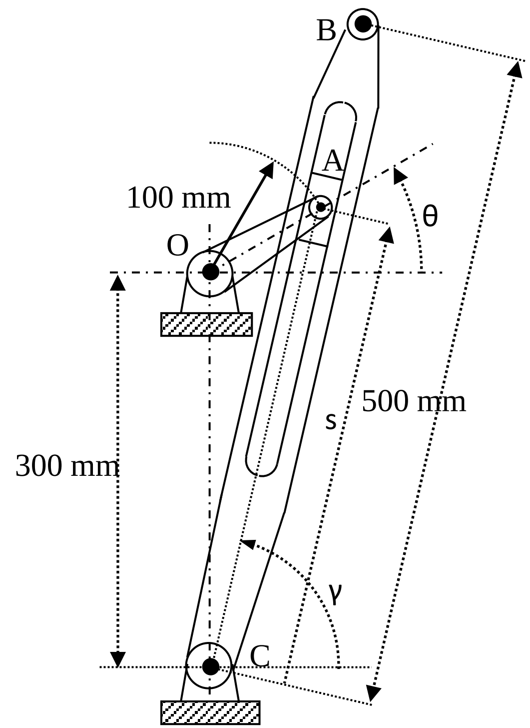


EMAITZA $\boxed{AM = 88/9}$

PROBLEMA 2

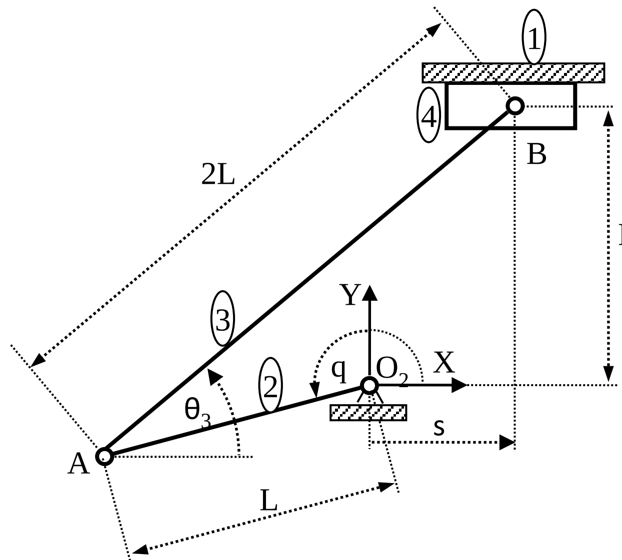
Irudiko mekanismoan sarrerako elementuaren kokapena θ aldagai independentearen bidez adierazita dago eta bere abiadura konstantea da.
BC barraren kokapena **θ** aldagai dependentearen bidez definitua dago eta irristailearen posizioa BC barran zehar **s** aldagai dependentearen bidez definitzen da.

a) Kokapen-problema, abiadura-problema, eta azelerazio-problema planteatu eta ebatzi.
b) θ = 30° eta dθ/dt = 3 rad·s^{-1} konstante (erlojuaren orratzen kontrakoa) direnean, kalkulatu BC barraren abiadura eta azelerazio angeluarrak.



PROBLEMA 3

Irudiko mekanismoan sarrerako angelua **q** eta bere deribatuak ezagunak dira (abiadura eta azelerazio angeluarra). L distantzia ezaguna da.
Ebatzi behar dira kokapen-problema, abiadura-problema eta azelerazio-problema.



PROBLEMA 4

Irudiko $0_A AB0_B$ lauki giltzatuan honako datuak ezagunak dira:

- Laukiaren barren luzerak honakoak dira:

$$\overline{O_A A} = a, \quad \overline{AB} = b \quad \overline{O_B B} = c \quad \overline{O_A O_B} = d$$

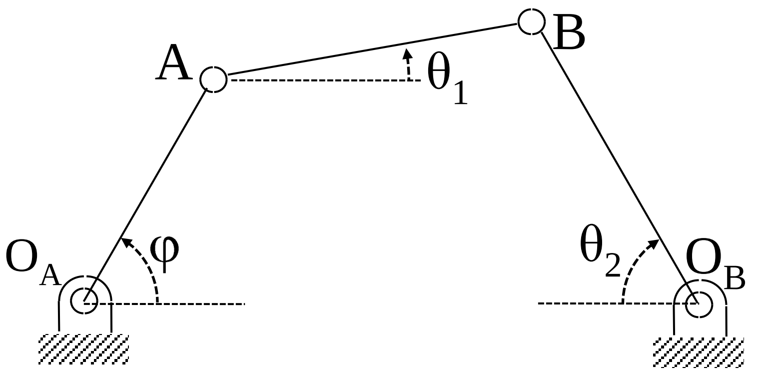
- Koordenatu orokorra edo koordenatu independentea: φ
- Ezezagunak: θ_1, θ_2
- $O_A A$ barraren abiadura angeluarra: $\dot{\varphi}$

Kalkulatu:

a) Kokapen-problemako ekuazioak (φ, θ_1, θ_2 angeluak erabiliz).

b) Kokapen-problemaren matrize jakobianoa.

c) AB eta $O_B B$ barren abiadura angeluarrak



Emaitzak:

a)
$$f_1\ \theta_1, \theta_2\ = b \cdot \cos\theta_1 + c \cdot \cos\theta_2 + a \cdot \cos\varphi - d = 0$$
$$f_2\ \theta_1, \theta_2\ = b \cdot sin\theta_1 - c \cdot sin\theta_2 + a \cdot sin\varphi = 0$$

b)
$$[Z] = \begin{bmatrix} -b \cdot sin\theta_1 & -c \cdot sin\theta_2 \\ b \cdot \cos\theta_1 & -c \cdot \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

c)
$$\dot{\theta}_1 = -\frac{a}{b}\frac{sin\ \ \varphi - \theta_2}{sin\ \ \theta_1 + \theta_2}\dot{\varphi}$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{a}{c}\frac{sin\ \ \varphi - \theta_1}{sin\ \ \theta_1 + \theta_2}\dot{\varphi}$$

9. BIBLIOGRAFIA

- Hernández, A.; Agirrebeitia, J.; Avilés, R. Mekanismoen zinematika. Bilboko Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa, Bilbao, 2000