



2. GAIA

HIGIDURA PLANOAREN GEOMETRIA

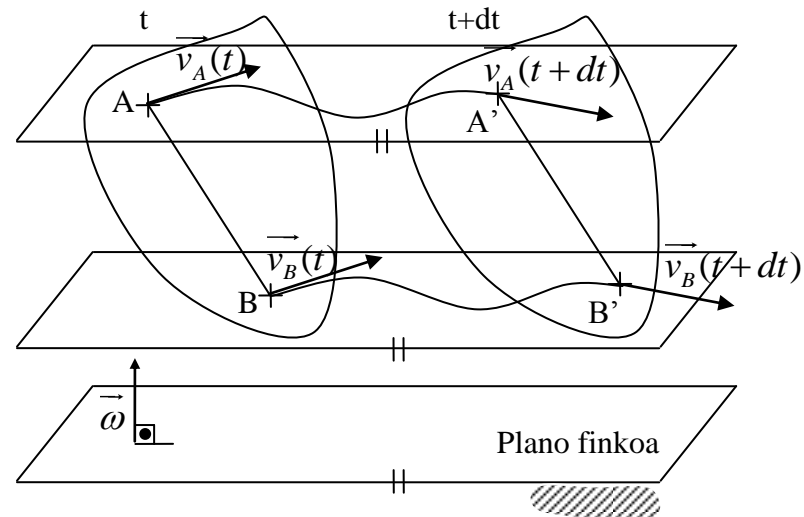
Neftalí Carbajal de la Red

- 1.- SARRERA
- 2.- ALDIUNEKO ERROTAZIO ZENTROA (AEZ), OINARRIA ETA ERRULETA
- 3.- ABIADUREN KALKULUA ETA TEOREMA BATZUK
- 4.- ARONHOLD-KENNEDY TEOREMA
- 5.- AZELERAZIOEN KALKULUA ETA TEOREMA BATZUK
- 6.- HIGIDURA ERLATIBOA
- 7.- HARTMAN TEOREMA
- 8.- EULER-SAVARY EKUAZIOA
- 9.- INFLEXIO-ZIRKUNFERENTZIA
- 10.- INFLEXIO-POLOA
- 11.- PROBLEMAK
- 12.-ERANSKINA
- 13.- BIBLIOGRAFIA

HIGIDURA PLANOAREN DEFINIZIOA

HIGIDURA PLANOAREN DEFINIZIOA:

Mekanismo batek higidura planoak duela esaten da, puntu guztien traiektoriak (ibilbideak) plano finko batekiko paraleloak direnean.



2.- ALDIUNEKO ERROTAZIO ZENTROA, OINARRIA ETA ERRULETA.

ALDIUNEKO ERROTAZIO ZENTROA (AEZ):

Plano mugikorreko abiadura nuluko puntu bat da.

ERRULETA

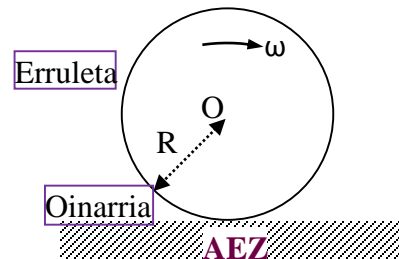
Aldiuneren batean AEZ izan diren plano mugikorreko puntuen multzoak kurba bat definituko du.

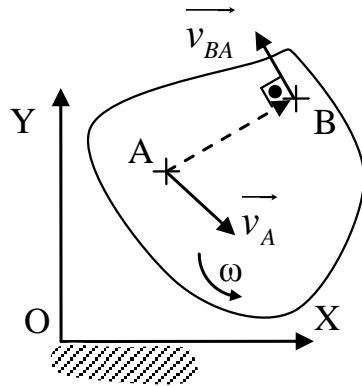
Kurba honi ERRULETA deritzo.

OINARRIA

Era berean, aldiuneren batean AEZ-rekin bat izan diren plano finkoko puntuen multzoak kurba definituko du. Kurba honi OINARRI deritzo.

ADIBIDEA





ABIADURA EREMUA

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{AB}}_{\vec{v}_{BA}}$$

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

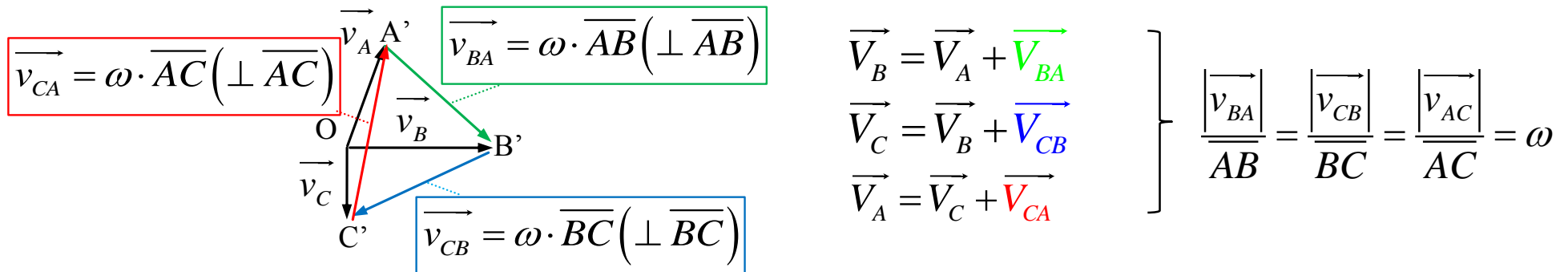
Aldiuneko translazioa: $\vec{\omega} = \vec{0}$

A-rekiko aldiuneko errotazioa: $\vec{v}_A = \vec{0}$

ABIADUREN IRUDIA

ABIADURA IRUDIA

Jarraian, plano mugikorreko A, B eta C puntuen abiadura bektoreak, amankomuneko O jatorri batera eramaten baditugu, hiru bektore hauek osatzen duten triangelua A'B'C' eta puntuek osatzen duten triangelua ABC elkarren artean semejante dira, ω proportzionaltasun erlazioa izanik eta haien arteko angelua 90° .



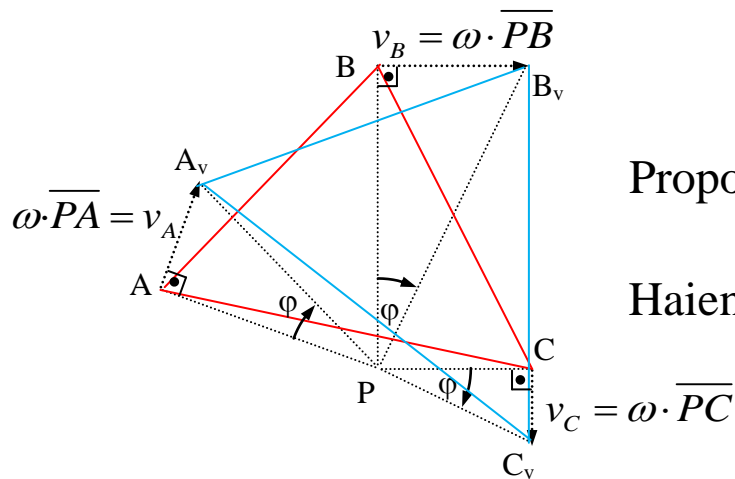
Proportzionaltasun erlazioa $\frac{|\vec{v}_{BA}|}{AB} = \frac{|\vec{v}_{CB}|}{BC} = \frac{|\vec{v}_{CA}|}{AC} = \omega$

Haien arteko angelua $(\overline{AB}, \overline{A'B'}) = (\overline{BC}, \overline{B'C'}) = (\overline{CA}, \overline{C'A'}) = 90^\circ$

BURMESTER TEOREMA ABIADURETAN

BURMESTER TEOREMA ABIADURETAN

Elementu zurrun bateko 3 punturen abiadurako bektoreen muturrek osatzen duten triangelua $A_v B_v C_v$, eta puntu hauek osatzen duten triangelua ABC elkarren artean semejante dira, proportzionaltasun erlazioa $(1+\omega^2)^{1/2}$ izanik eta haien artean angelua φ , non $\tan\varphi = \omega$ den.



Proportzionaltasun erlazioa $\frac{\overline{A_v B_v}}{AB} = \frac{\overline{B_v C_v}}{BC} = \frac{\overline{C_v A_v}}{CA} = \sqrt{1 + \omega^2}$

Haien arteko angelua $(\overline{AB}, \overline{A_v B_v}) = (\overline{BC}, \overline{B_v C_v}) = (\overline{CA}, \overline{C_v A_v}) = \varphi$

non $tg\varphi = \omega$

-BURMESTER TEOREMAREN ONDORIOA

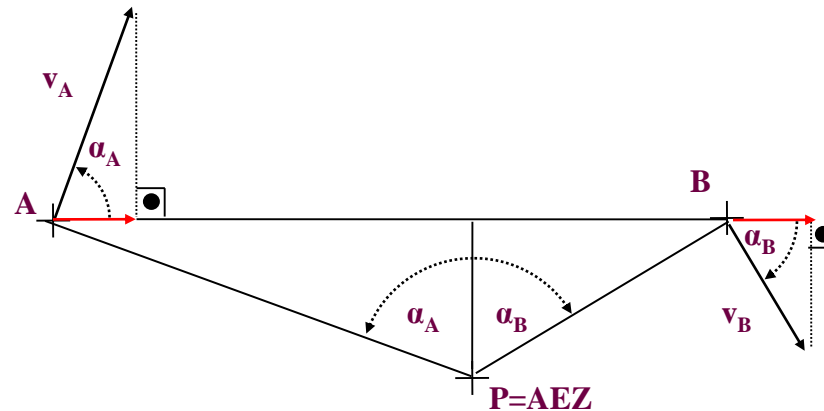
A, B, C puntuak zuzen batean lerrotuta baldin badaude, beraien abiaduren muturrak ere zuzen batean lerrotuta daude.

3.- ABIADUREN KALKULUA ETA TEOREMA BATZUK

ABIADURA PROIEKTATUEN TEOREMA

ABIADURA PROIEKTATUEN TEOREMA

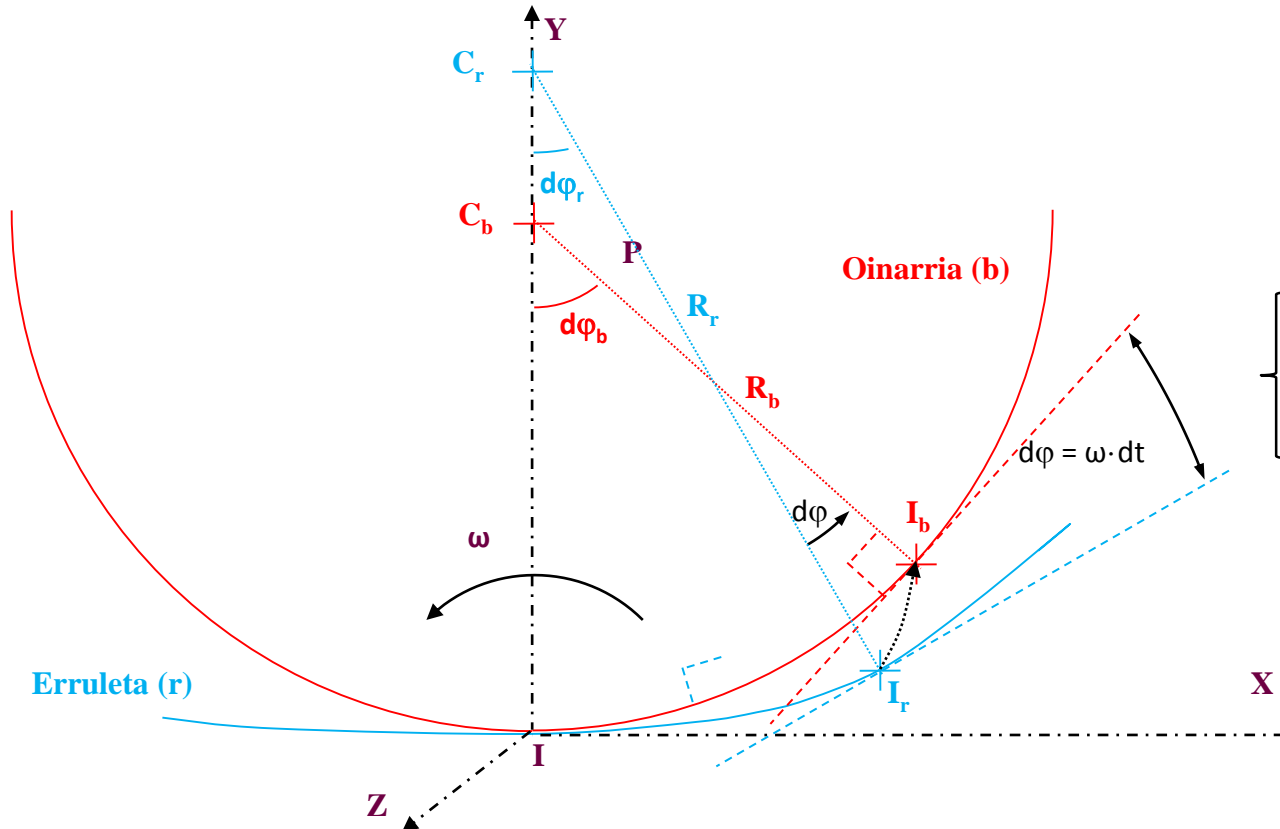
Plano mugikor batean zuzen batean lerrotutako puntu guztiek zuzenarekiko abiaduraren osagai berdina dute.



JARRAIPEN ABIADURA

JARRAIPEN ABIADURA

I puntu matematikoa definitzen da, bere ibilbidea oinarria dena eta aldiune bakoitzean AEZ-ren posizioan dagoena. Puntu honen abiadurari JARRAIPEN ABIADURA deritzo.



\vec{u} : Jarraipen abiadura

$$\vec{u} = \frac{\omega}{\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_r}} \hat{i}$$

- ω : plano mugikorraren aldiuneko abiadura angeluarra
- R_b : Oinarriaren kurbatura erradioa
- R_r : Erruletaren kurbatura erradioa

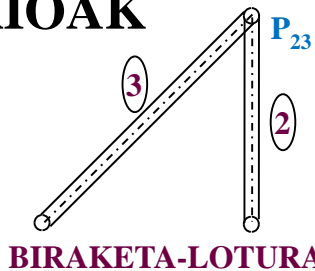
ABIADURA-POLOA

ABIADURA-POLOA

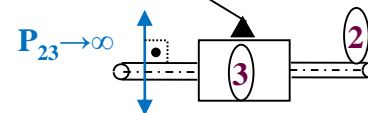
Abiadura-poloa, P_{ij} izenekoa, i, j plano mugikor bien arteko puntu bat da, non puntu honetan bi planoen arteko abiadura erlatiboa nulua den.

ABIADURA-POLO PRIMARIOAK

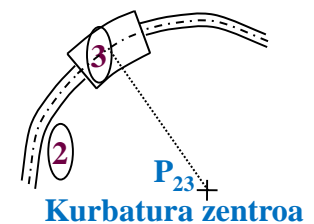
1. Biraketa-lotura
2. Lotura prismatikoa
3. Irristailu kurbatua
4. Errodadura hutseko lotura
5. Espeka-lotura



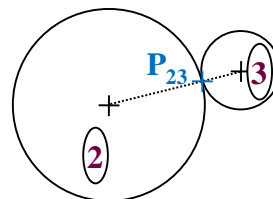
LOTURA PRISMATIKOA



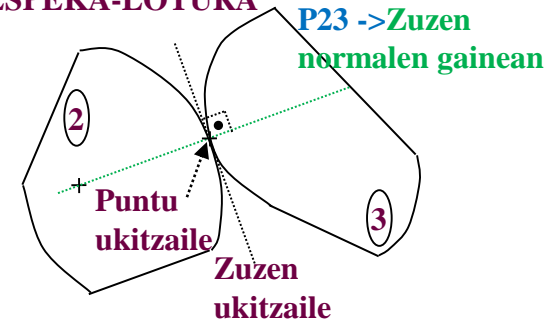
IRRISTAILU KURBATUA



ERRODADURA HUTSA

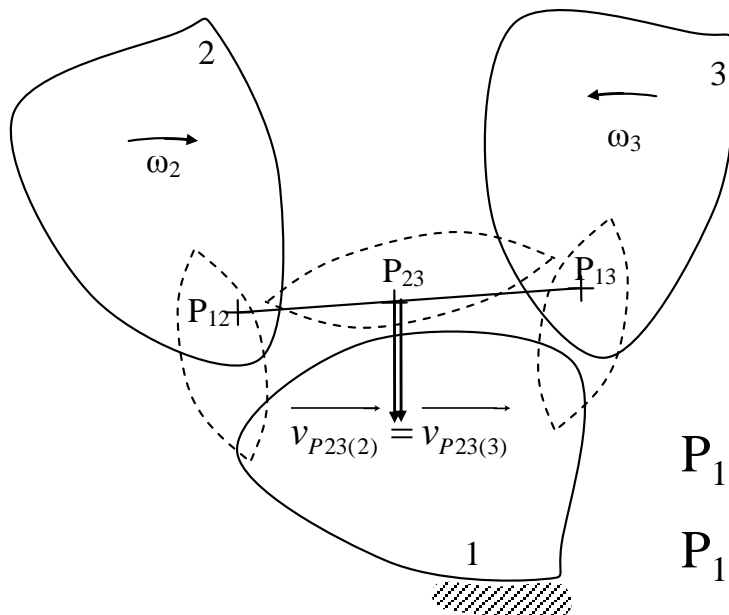


ESPEKA-LOTURA



ARONHOLD-KENNEDY TEOREMA

Hiru plano mugikorren arteko mugimendu erlatiboaren hiru aldiuneko errotazio -entroak lerrotuta daude.



P_{12} : 1 eta 2 plano mugikorren arteko abiadura-poloa da

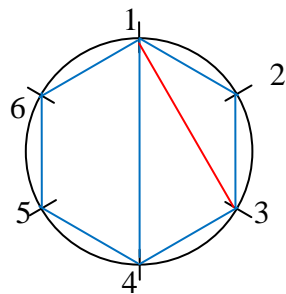
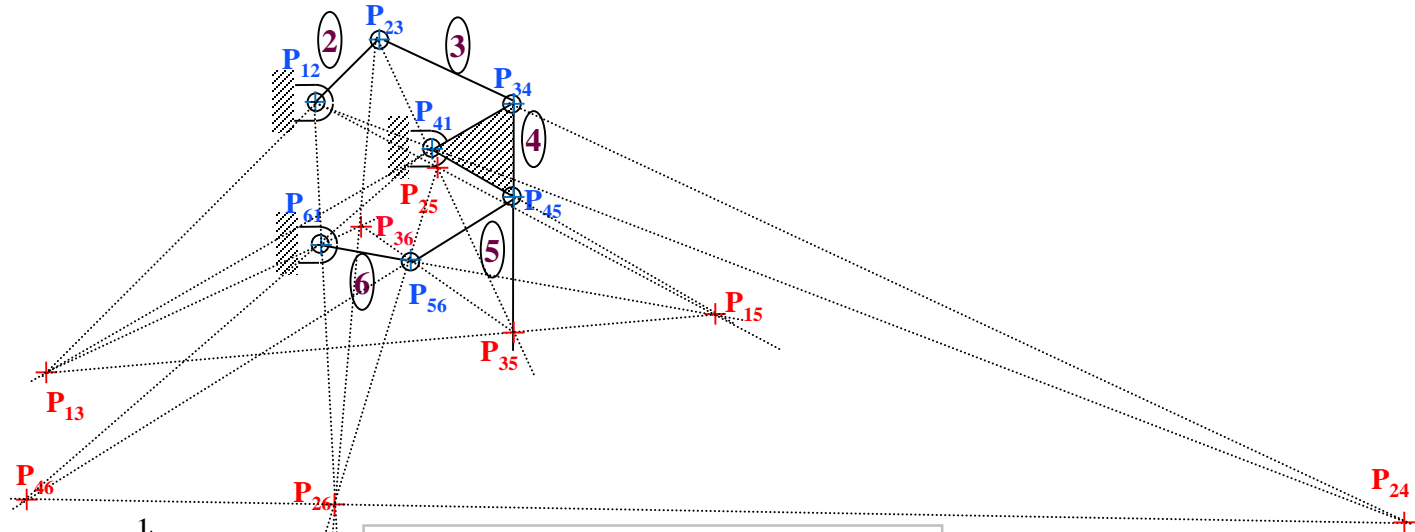
P_{13} : 1 eta 3 plano mugikorren arteko abiadura-poloa da

P_{23} : 2 eta 3 plano mugikorren arteko abiadura-poloa da

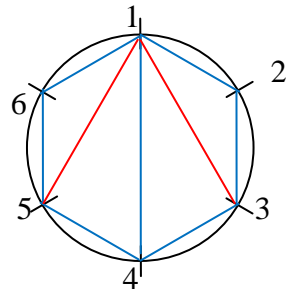
ZIRKULUAREN DIAGRAMA

ZIRKULUAREN DIAGRAMA

ABIADURA-POLO KOPURUA N: $N = \frac{n(n-1)}{2}$ n: Elementu kopurua (elementu finkoa barne)



$$P_{13} = P_{12}P_{23} \cap P_{14}P_{43}$$



$$P_{15} = P_{14}P_{45} \cap P_{16}P_{65}$$

ABIADURA-POLO PRIMARIOAK:

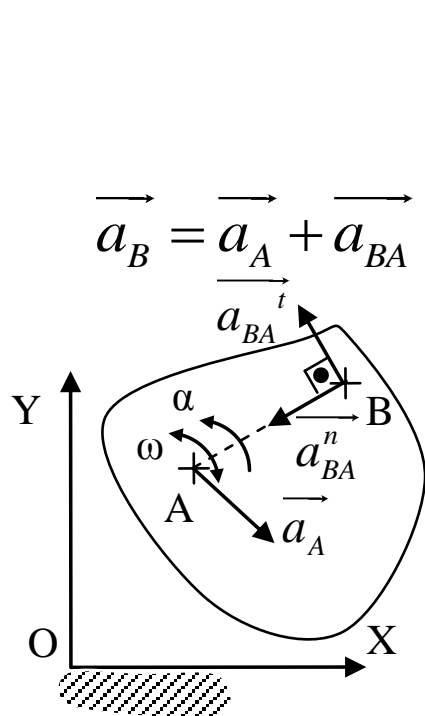
$P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{45}, P_{56}, P_{61}, P_{41}$

ABIADURA-POLO SEKUNDARIOAK:

$P_{13}, P_{46}, P_{26}, P_{35}, P_{15}, P_{36}, P_{25}, P_{24}$

AZELERAZIO EREMUA

AZELERAZIO EREMUA



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n$$

$$\vec{a}_{BA}^t = \vec{\alpha} \times \vec{AB}$$

$$\vec{a}_{BA}^n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB})$$

Modulua: $|\vec{a}_{BA}^t| = \alpha \cdot \overline{AB}$

Norabidea: $\perp \overline{AB}$

Noranzkoa: α -tik AB-ra biratzean eskuin eskuaren arabera.

Modulua: $|\vec{a}_{BA}^n| = \omega^2 \cdot \overline{AB}$

Norabidea: $\square \overline{AB}$

Noranzkoa: B-tik A-ra

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB})$$

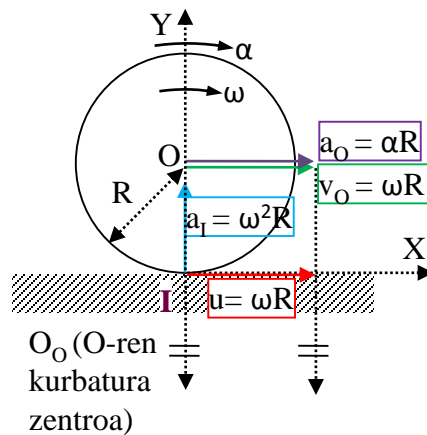
Puntu baten azelerazioak honako bi osagai intrinsekoak dauzka:

- Osagai tangenziala (a^t): Abiaduraren moduluen aldaketa adierazten duena.
- Osagai normala (a^n): Abiaduraren norabidearen aldaketa adierazten duena.

ADIBIDEA

ADIBIDEA

Irudiko diskoa gainazal lau finko baten gainean irristadurarik gabe errodatzen du



$$\vec{a}_O = \alpha R \rightarrow$$

$$\vec{a}_I = \vec{a}_O + \vec{a}_{IO}^t + \vec{a}_{IO}^n$$

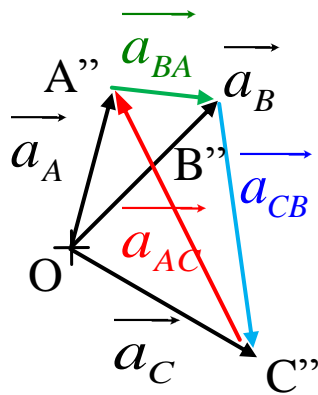
	Modulua	Noranzkoa
\vec{a}_I	?	?
\vec{a}_O	αR	\rightarrow
\vec{a}_{IO}^t	αR	\leftarrow
\vec{a}_{IO}^n	$\omega^2 R$	\uparrow

AEZren azelerazioa $\vec{a}_I = \omega^2 R \uparrow$ da, irudian adierazten denez.

AZELERAZIO-IRUDIA

AZELERAZIO IRUDIA

Plano mugikorreko A, B eta C puntuen azelerazio bektoreak, amankomuneko O jatorri batera eramango ditugu. Hiru bektore hauen muturrak lotzen baldin badira, ABC triangeluarekin antzekotasun erlazioa duen A'B'C' triangelua lortzen da. Eraikuntza honi AZELERAZIO IRUDIA deritzo, eta jarraian aurkezten den irudian isladatzen da.



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \quad \text{non} \quad |\vec{a}_{BA}| = \sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \overline{AB}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB} \quad \text{non} \quad |\vec{a}_{CB}| = \sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \overline{CB}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC} \quad \text{non} \quad |\vec{a}_{AC}| = \sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \overline{AC}$$

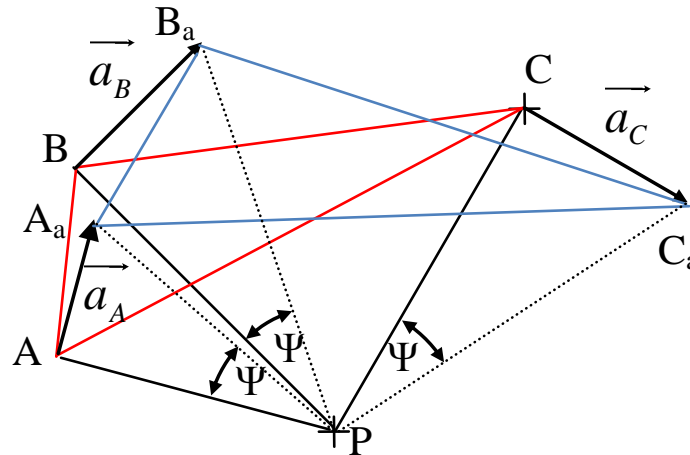
Proporzionaltasun erlazioa $\frac{|\vec{a}_{BA}|}{\overline{AB}} = \frac{|\vec{a}_{CB}|}{\overline{BC}} = \frac{|\vec{a}_{AC}|}{\overline{AC}} = \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$

Haien arteko angelua $\left(\overline{AB}, \overline{A''B''}\right) = \left(\overline{BC}, \overline{B''C''}\right) = \left(\overline{CA}, \overline{C''A''}\right) = \gamma \quad \text{non} \quad \tan \gamma = \frac{\alpha}{\omega^2}$

BURMESTER TEOREMA AZELERAZIOETAN

BURMESTER TEOREMA AZELERAZIOETAN

Elementu zurrun baten 3 punturen azelerazioko bektoreen muturrek osatzen duten triangelua $A_a B_a C_a$, eta puntu hauek osatzen duten triangelua ABC elkarren artean semejanteak dira, proportzionaltasun erlazioa $[(1-\omega^2)^2 + \alpha^2]^{1/2}$ izanik eta haien artean osaturiko angelua Ψ izanik, non $\tan \Psi = \alpha / (1-\omega^2)$



Proportzionaltasun erlazioa

$$\frac{\overline{A_a B_a}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_a C_a}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C_a A_a}}{\overline{CA}} = \sqrt{(1-\omega^2)^2 + \alpha^2}$$

Bi hirukien arteko angelu biratua

$$\left(\overline{AB}, \overline{A_a B_a} \right) = \left(\overline{BC}, \overline{B_a C_a} \right) = \left(\overline{CA}, \overline{C_a A_a} \right) = \Psi \quad \text{non} \quad \tan \Psi = \frac{\alpha}{1-\omega^2}$$

AEZren AZELERAZIOA

AEZren AZELERAZIOA

AEZren azelerazioa kalkulatzeko honako bi ekuazioak erabil daitezke:

$$1) \boxed{\vec{a}_P = \vec{u} \times \vec{\omega}} \begin{cases} \vec{\omega} : \text{plano mugikorraren aldiuneko biadura angeluarra} \\ \vec{u} : \text{jarraipen abiadura = AEZ aldaketako abiadura} \end{cases}$$

$$2) \boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overline{AP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{AP})}$$

Aurreko bi ekuazioen bidez lortutako balioak berdinak izan beha dira.

- ABIADURA EREMUA

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{Ba} + \vec{v}_{Br}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{Ba} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} \\ \vec{v}_{Br} \end{array} \right.$$

ARRASTE-ABIADURA.

Aldiune horretan B puntua solidokoa dela kontsideratzen da.

ABIADURA ERLATIBOA. Axy sistema higikorretik neurtutako abiadura da, aldiune horretan sistema hori finkoa dela kontsideratuz.

- AZELERAZIO EREMUA

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{Ba} + \vec{a}_{Br} + \vec{a}_{BCor}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_{Ba} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AB} - \omega^2 \vec{AB} \\ \vec{a}_{Br} \\ \vec{a}_{BCor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Br} \end{array} \right.$$

ARRASTE-.AZELERAZIOA.

Aldiune horretan B puntua solidokoa dela kontsideratzen da.

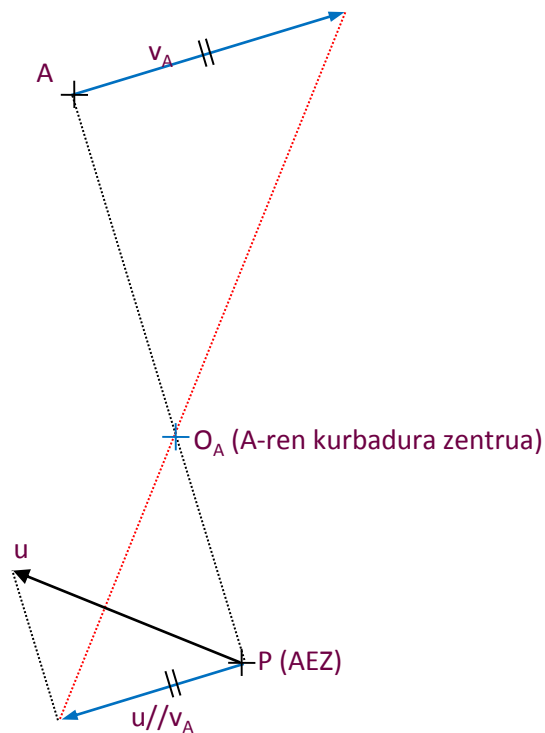
AZELERAZIO ERLATIBOA. Axy sistema higikorretik neurtutako azelerazioa da, aldiune horretan sistema hori finkoa dela kontsideratuz.

AZELERAZIO OSAGARRIA edo CORIOLIS OSAGAIA.

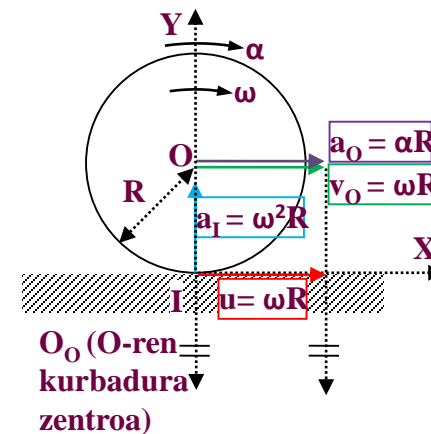
Sistema higikorrari lotutako erreferentzia sistemaren errotazioarekin erlazionatuta dago.

HARTMAN TEOREMA

Puntu bateko abiaduraren bektorearen muturra, bere ibilbidearen kurbadura-zentroa, eta puntuaren abiaduraren araberako polo aldaketako abiaduraren osagaia (hau da, puntuaren abiadurarekiko u-ren osagai paraleloa) zuzen batean zehar lerrotuta daude



ADIBIDEA



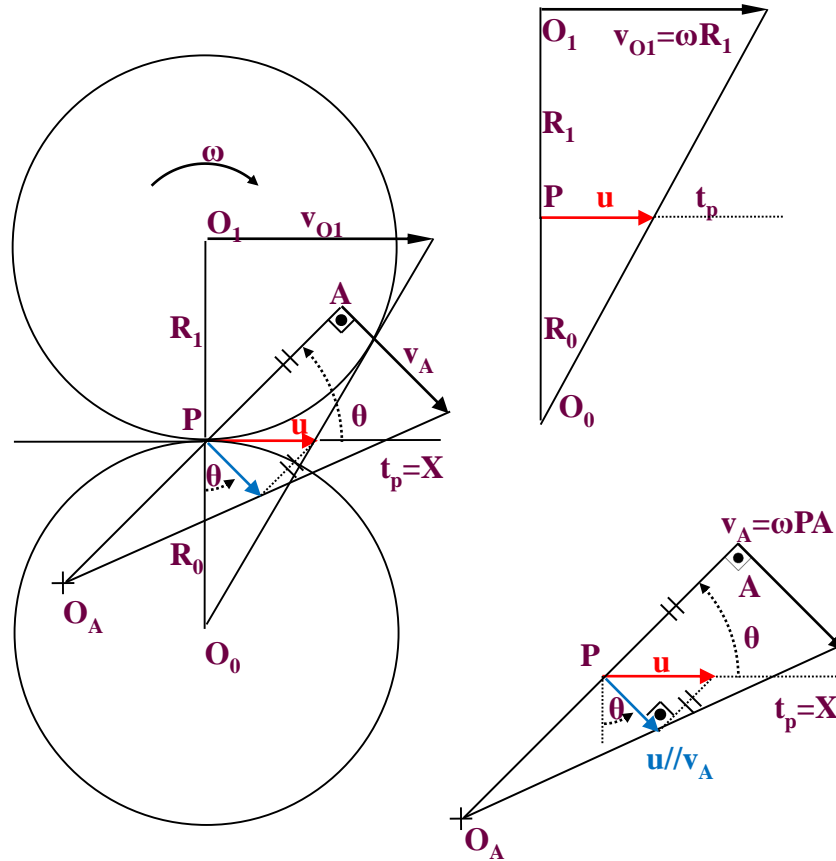
8. EULER-SAVARY EKUAZIOA

EULER-SAVARY EKUAZIOA

Euler-Savary ekuazioa Hartmanen adierazpen analitikoa dela esan daiteke.

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0} \right) = \frac{\omega}{u} = \left(\frac{1}{O_A P} + \frac{1}{PA} \right) \sin \theta$$

- P -> Abiadura-poloa (=AEZ)
- n -> Erruletari normala
- t_p -> Erruletari ukitzailea
- O₀ R₀-> Oinarriaren zirkunferentzi oskulatzailearen zentroa O₀ eta erradioa R₀
- O₁ R₁-> Erruletaren zirkunferentzi oskulatzailearen zentroa O₁ eta erradioa R₁
- θ -> PA zuzenkiak eta t_p (=X ardatza) ukitzaileak elkarren artean osatzen duten angelua.



$$\frac{\omega R_1}{u} = \frac{R_0 + R_1}{R_0}$$

$$\frac{\omega}{u} = \frac{R_0 + R_1}{R_0 R_1}$$

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0}$$

$$\frac{\omega PA}{u \sin \theta} = \frac{O_A P + PA}{O_A P}$$

$$\frac{\omega}{u} = \frac{O_A P + PA}{O_A P \cdot PA} \sin \theta$$

$$\frac{\omega}{u} = \left(\frac{1}{O_A P} + \frac{1}{PA} \right) \sin \theta$$

INFLEXIO-ZIRKUNFERENTZIAREN DEFINIZIOA

Azelerazio normala nulua duten puntuen leku geometrikoa da inflexio-zirkunferentzia.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0 \rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ \frac{1}{\rho} = 0 \end{cases}$$

INFLEXIO-ZIRKUNFERENTZIAREN ADIERAZPEN ANALITIKOA

$$\frac{\omega}{u} = \left(\frac{1}{O_A P} + \frac{1}{PA} \right) \sin\theta \longrightarrow \frac{1}{\delta} = \left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{r} \right) \sin\theta \longrightarrow \boxed{r = \delta \sin\theta}$$

INFLEXIO-ZIRKUNFERENTZIAREN PROPIETATEAK

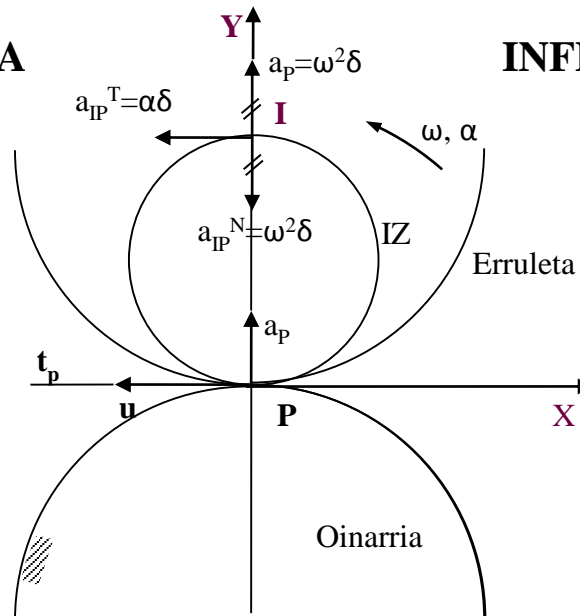
- 1) P abiadura-poloan zuzen ukitzaile polarrarekiko ukitzialea da inflexio-zirkunferentzia
- 2) Inflexio-zirkunferentziaren diametroa $\delta = u/\omega$
non u = jarraipen abiadura eta ω aldiuneko abiadura angeluarra
- 3) P abiadura-poloari dagokion azelerazioaren noranzkoaren alde dago inflexio-zirkunferentziaren zentroa.

INFLEXIO-POLOA

Inflexio-zirkunferentziaren puntuek azelerazio ukitzailea dute soilik (azelerazio normala = 0). Orduan puntu hauen abiadurak zein azelerazioak, I puntutik pasatzen dira; $\theta = \pi/2$ angelua dagokion puntuari, I puntuari, INFLEXIO-POLOA deritzo.

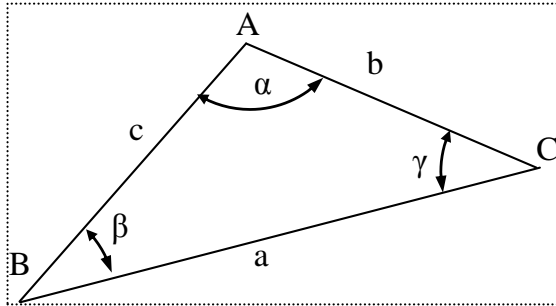
INFLEXIO-POLOAREN ABIADURA

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_I &= \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{PI} \\
 + \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_P = 0 \\ \vec{\omega} \times \vec{PI} = \omega \delta \hat{i} \end{array} \right. \\
 \hline
 \boxed{\vec{v}_I = u \hat{i}}
 \end{aligned}$$



INFLEXIO-POLOAREN AZELERAZIOA

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_I &= \vec{a}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{PI}) + \vec{\alpha} \times \vec{PI} \\
 + \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_P = \vec{u} \times \vec{\omega} = \omega^2 \delta j \\ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{PI}) = -\omega^2 \delta j \\ (\vec{\alpha} \times \vec{PI}) = \alpha \delta \hat{i} \end{array} \right. \\
 \hline
 \boxed{\vec{a}_I = \alpha \delta \vec{i}}
 \end{aligned}$$



SINUAREN TEOREMA

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

KOSINUAREN TEOREMA

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \gamma \end{cases}$$



13. BIBLIOGRAFIA

- Hernández, A.; Agirrebeitia, J.; Avilés, R. Mekanismoen zinetatika. Bilboko Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa, Bilbao, 2000