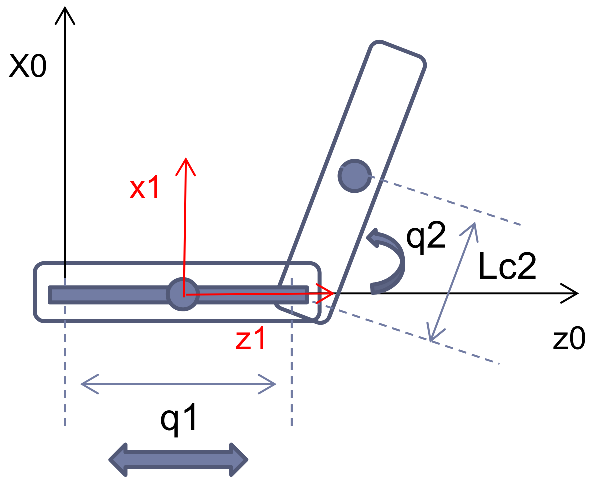
TEMA 6. DINÁMICA DE ROBOTS Y CONTROL
EJERCICIOS

ROBÓTICA

6.1 ejercicio
Calcular el Lagrangiano del robot de 2 GDL mostrado en la figura, siendo la articulación q_1 prismática y la q_2 rotacional.



1º paso calculo de la **energía cinética**

1 eslabón:

Obtención de la MTH:

$$ {}_1^0A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{q1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow x = 0 \\ \rightarrow y = 0 \\ \rightarrow z = q1/2 \\ \\ \end{array} $$

	θi	di	ai	αi
1	0	q1/2	0	0º

Matriz Jacobiana

$$ J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow $$

$$ v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\dot{q}1}{2} \end{bmatrix} $$

Velocidad lineal del primer eslabón

Jon Legarreta / Raquel Martinez

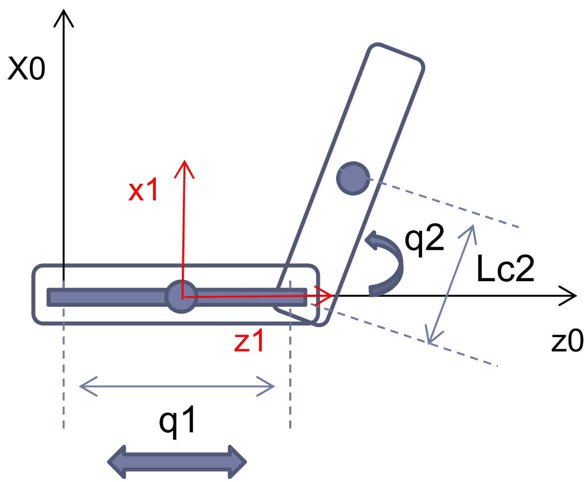
Robot plano de 2 grados de libertad

<u>1º paso calculo de la **energía cinética**</u>

1 eslabón:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^T v_1$$

$$v_1^T v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\dot{q}1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\dot{q}_1}{2} \end{bmatrix} = \frac{\dot{q}_1^2}{4}$$



Energía cinética del primer eslabón:

$$\boxed{K_1 = \frac{1}{2} m_1 \frac{\dot{q}_1^2}{4}}$$

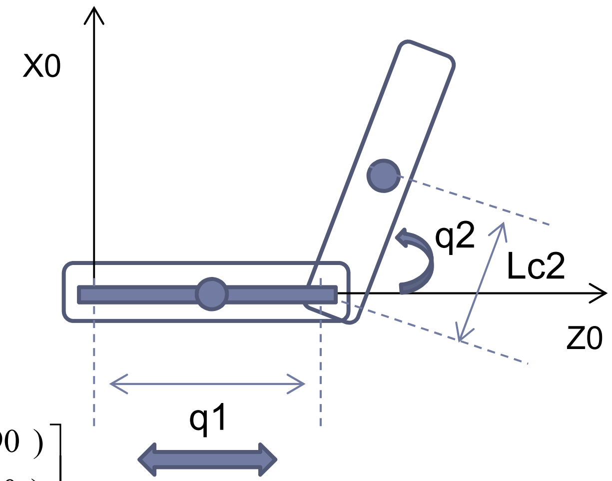
Energía potencial del primer eslabón:

$$\boxed{U_1 = m_1 g\, h = 0}$$

Robot plano de 2 grados de libertad

1º paso calculo de la **energía cinética**

2 eslabón:



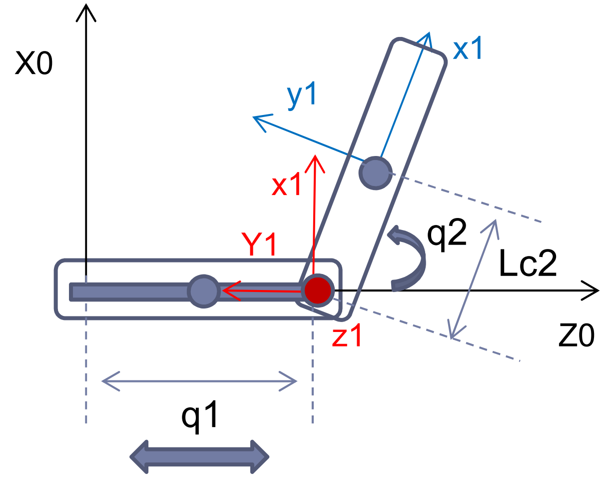
	θi	di	ai	αi
1	0	q1	0	-90º
2	q2-90	0	Lc2	0

$$ {}^0_2A = {}^0_1A\,{}^1_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(q2-90) & 0 & 0 & L_{c2}C(q2-90) \\ S(q2-90) & 0 & 1 & L_{c2}S(q2-90) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^0_2A = {}^0_1A\,{}^1_2A = \begin{bmatrix} C(q2-90) & 0 & 0 & \boxed{L_{c2}C(q2-90)} \\ 0 & -1 & 0 & \boxed{0} \\ -S(q2-90) & 0 & -1 & \boxed{-L_{c2}S(q2-90)+q1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ x = L_{c2}C(q2-90) = L_{c2}Sq2 $$
$$ y = 0 $$
$$ z = -L_{c2}S(q2-90) + q1 = L_{c2}Cq2 + q1 $$

Robot plano de 2 grados de libertad



<u>1º paso calculo de la **energía cinética**</u>

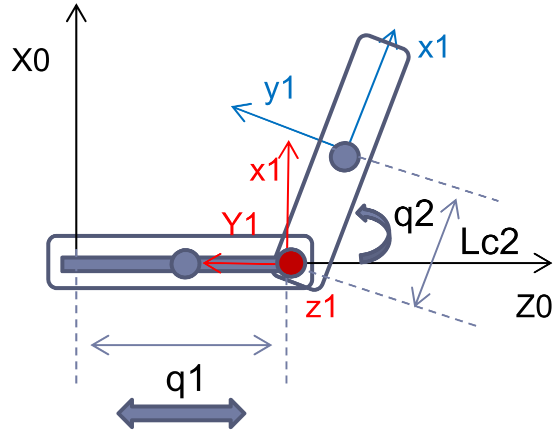
2 eslabón:

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3}\\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3}\\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & L_{c2}Cq2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -L_{c2}Sq2 & 0\end{bmatrix}$$

$$v_2=\begin{bmatrix}0 & L_{c2}Cq2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -L_{c2}Sq2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}1\\ \dot{q}2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{c2}Cq2\,\dot{q}2\\ 0\\ \dot{q}1-L_{c2}Sq2\,\dot{q}2\end{bmatrix}$$

$$v_2^{\,T}v_2=\begin{bmatrix}L_{c2}Cq2\,\dot{q}2 & 0 & \dot{q}1-L_{c2}Sq2\,\dot{q}2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_{c2}Cq2\,\dot{q}2\\ 0\\ \dot{q}1-L_{c2}Sq2\,\dot{q}2\end{bmatrix}=\dot{q}1^2+L_{c2}^{\,2}\,\dot{q}2^2-2\,\dot{q}1\,\dot{q}2\,L_{c2}Sq2$$

Robot plano de 2 grados de libertad



<u>1º paso calculo de la **energía cinética**</u>

2 eslabón:

Velocidad angular del segundo eslabón

$$\vec{w}_2 = \dot{q}_2 \, \vec{z}_0$$

Termino de la energía cinética total del 2 eslabón: $K_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{q}1^2 + L_{c2}^2 \dot{q}2^2 - 2\dot{q}1\dot{q}2 L_{c2} Sq2 \right] + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2$

<u>2º paso calculo de la **energía potencial**</u>

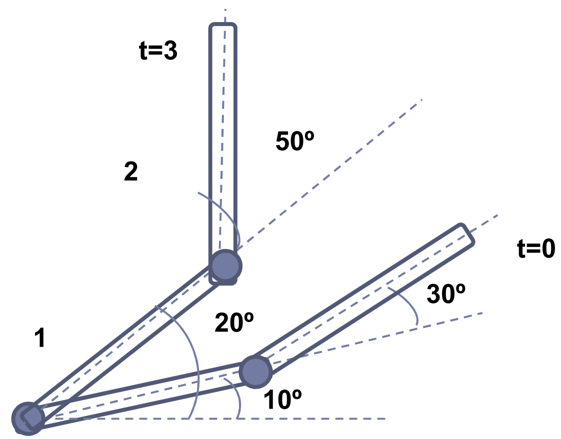
$$U_1 = m_1 g\, h = 0 \qquad\qquad U_2 = m_2 g\, L_{c2} S q_2$$

<u>3º paso calculo de **Lagrangiano**</u> $L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} - U(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(q)\cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j - U(q)$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m_1 \frac{\dot{q}_1^2}{4} + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{q}1^2 + L_{c2}^2 \dot{q}2^2 - 2\dot{q}1\dot{q}2 L_{c2} Sq2 \right] + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2 - m_2 g\, L_{c2} S q_2}$$

EJERCICIOS

6.2 Ejercicio
Consideremos un robot de 2 grados de libertad con articulaciones rotacionales. En la figura se muestran las posiciones iniciales y finales del robot generadas durante 3 segundos. Calcular las interpolaciones cubicas que describen el movimiento.



Eslabon 1

$$a = q_{ini} = 10 \qquad b = 0$$

$$c = \frac{3(q_{fin} - q_{ini})}{t_{fin}^2} = \frac{3(20-10)}{3^2} = 3.33$$

$$d = \frac{-2(q_{fin} - q_{ini})}{t_{fin}^3} = \frac{-2(20-10)}{3^3} = -0.74$$

$$\boxed{q(t) = 10 + 3.33t^2 - 0.74t^3}$$

Eslabon 2

$$a = q_{ini} = 30 \qquad b = 0$$

$$c = \frac{3(q_{fin} - q_{ini})}{t_{fin}^2} = \frac{3(50-30)}{3^2} = 6.67$$

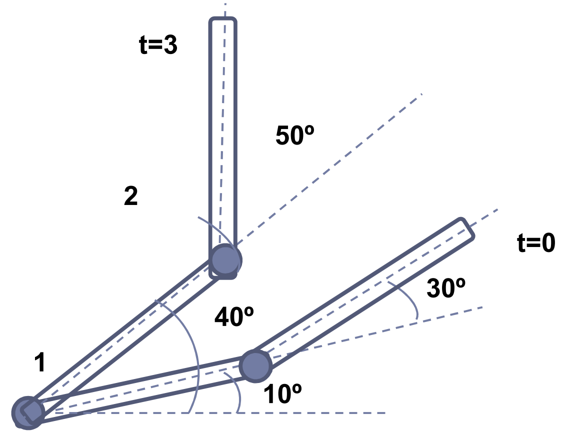
$$d = \frac{-2(q_{fin} - q_{ini})}{t_{fin}^3} = \frac{-2(50-30)}{3^3} = -1.48$$

$$\boxed{q(t) = 30 + 6.67t^2 - 1.48t^3}$$

EJERCICIOS

Ejercicio 6.3

Consideremos un robot de 2 grados de libertad con articulaciones rotacionales. En la figura se muestran las posiciones iniciales y finales del robot generadas durante 3 segundos. **Calcular las interpolaciones lineales con ajustes parabólicos** de ambas articulaciones suponiendo que sufren una aceleración de 40º/s².



Eslabón 1

Datos:

$$t_{fin} = 3\,s$$
$$t_m = 1.5\,s$$
$$q_{ini} = 10^{\circ}$$
$$q_{fin} = 40^{\circ}$$
$$q_m = 25^{\circ}$$
$$\ddot{q} = 40^{o}/s^2$$

$$t_p = 1.5 - \frac{\sqrt{40^2 1.5^2 - 40(40-10)}}{40} = 0.27\,s$$

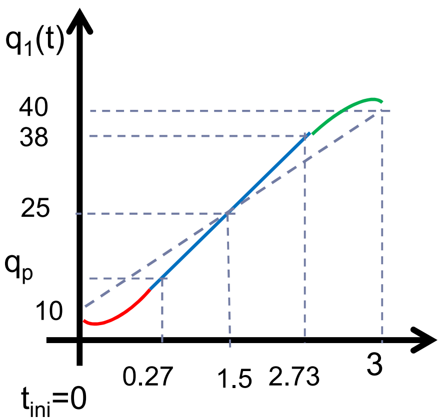
$$\beta = \ddot{q}\, t_p = 40 \cdot 0.27 = 10.8^{o}/s$$

$$q_p = \alpha = 10 + 20 t_p^{\,2} = 11.458^{o}$$

$$a_{III} = q_{fin} - \frac{\ddot{q}}{2} t_{fin}^2 = 40 - \frac{40}{2} 9 = -140$$

$$c_{III} = -\frac{\ddot{q}}{2} = -20$$

$$b_{III} = \ddot{q}\, t_{fin} = 120$$



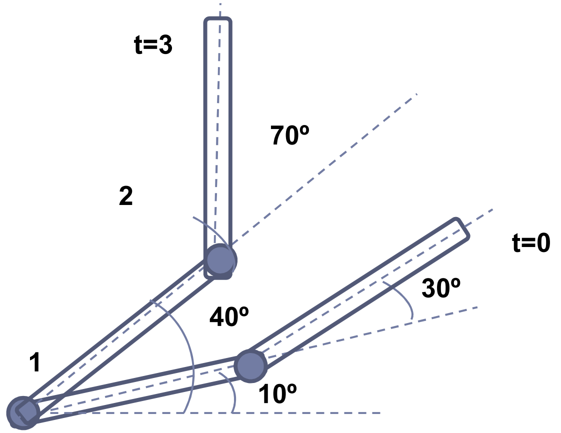
$$\boxed{q_I(t)} = q_{ini} + \frac{\ddot{q}}{2} t^2 = \boxed{10 + 20t^2} \longrightarrow t \in (0\,,\,0.27\,s)$$

$$\boxed{q_{II}(t)} = \alpha + \beta(t - t_p) = \boxed{11.458 + 10.8(t - 0.27)} \rightarrow 0.27 < t < 2.73$$

$$\boxed{q_{III}(t)} = a_{III} + b_{III}\, t + c_{III}\, t^2 = \boxed{-140 + 120t - 20t^2} \rightarrow 2.73 < t < 3$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

Ejercicio 6.3
Consideremos un robot de 2 grados de libertad con articulaciones rotacionales. En la figura se muestran las posiciones iniciales y finales del robot generadas durante 3 segundos. **Calcular las interpolaciones lineales con ajustes parabólicos** de ambas articulaciones suponiendo que sufren una aceleración de 40º/s².



Eslabón 2

Datos:

$$t_p = 1.5 - \frac{\sqrt{40^2 1.5^2 - 40(70-30)}}{40} = 0.38\,s$$

$$\beta = \ddot{q}\,t_p = 40 \cdot 0.38 = 15.28^\circ/s$$

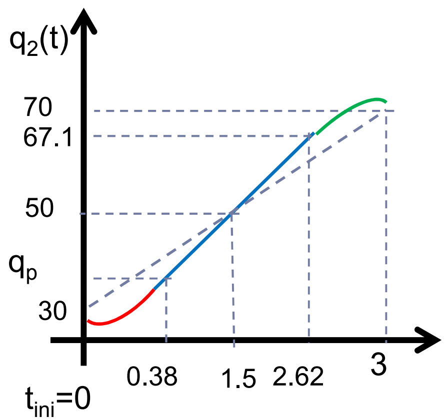
$$a_{III} = q_{fin} - \frac{\ddot{q}}{2} t_{fin}^2 = 40 - \frac{40}{2} 9 = -140$$

$$q_p = \alpha = 30 + 20 t_p^{\,2} = 32.89^\circ$$

$$c_{III} = -\frac{\ddot{q}}{2} = -20$$

$$b_{III} = \ddot{q}\, t_{fin} = 120$$

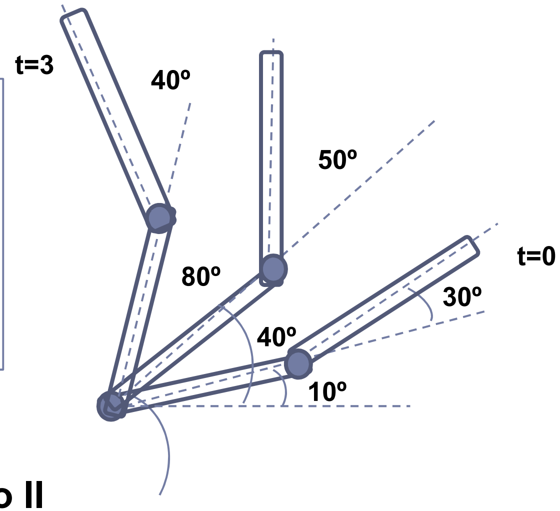
$$t_{fin} = 3\,s$$
$$t_m = 1.5\,s$$
$$q_{ini} = 30^\circ$$
$$q_{fin} = 70^\circ$$
$$q_m = 50^\circ$$
$$\ddot{q} = 40^\circ/s^2$$



$$\boxed{q_I(t)} = q_{ini} + \frac{\ddot{q}}{2} t^2 = \boxed{30 + 20t^2}$$ → **t ∈ (0 , 0.38 s)**

$$\boxed{q_{II}(t)} = \alpha + \beta(t - t_p) = \boxed{32.89 + 15.28(t - 0.38)}$$ → **0.38 < t < 2.62**

$$\boxed{q_{III}(t)} = a_{III} + b_{III}\,t + c_{III}\,t^2 = \boxed{-140 + 120t - 20t^2}$$ → **2.62 < t < 3**



Ejercicio 6.4:
Consideremos un robot de 2 grados de libertad con articulaciones rotacionales. En la figura se muestran las posiciones iniciales, intermedias y finales del robot generadas durante 3 segundos, donde por los puntos intermedios ambos eslabones tienen una velocidad de 5º/s. Se consideran las velocidades iniciales y finales cero.

Eslabón 1

Tramo I

$$\boxed{q_I(t) = a_I + b_I t + c_I t^2 + d_I t^3}$$

$$a_I = q_{ini} = 10^{\circ}$$

$$b_I = \dot{q}_{ini} = 0$$

$$c_I = \frac{3(q_{fin} - q_{ini})}{t_{fin}^2} - \frac{2\dot{q}_{ini} + \dot{q}_{fin}}{t_{fin}} = \frac{3(40-10)}{1^2} - \frac{2 \cdot 0 + 5}{1} = 85$$

$$d_I = \frac{-2(q_{fin} - q_{ini})}{t_{fin}^3} + \frac{\dot{q}_{fin} + \dot{q}_{ini}}{t_{fin}^2} = \frac{-2(40-10)}{1^3} + \frac{5+0}{1^2} = -55$$

Tramo II

$$\boxed{q_{II}(t) = a_{II} + b_{II} t + c_{II} t^2 + d_{II} t^3}$$

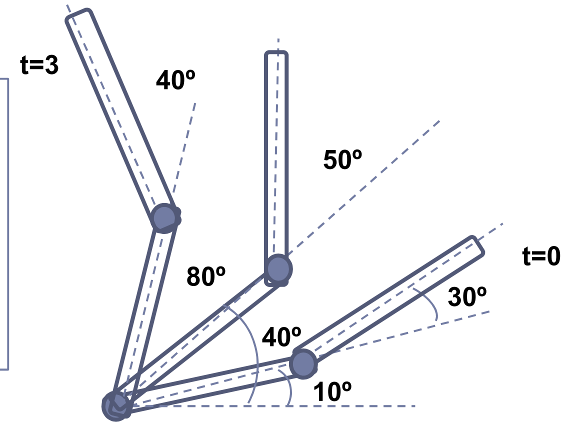
$$a_{II} = q_{II\,ini} = 40^{\circ}$$

$$b_{II} = \dot{q}_{II\,ini} = 5$$

$$c_I = \frac{3(q_{fin} - q_{II\,ini})}{t_{fin}^2} - \frac{2\dot{q}_{II\,ini} + \dot{q}_{fin}}{t_{fin}} = \frac{3(80-40)}{1^2} - \frac{2 \cdot 5 + 0}{1} = 110$$

$$d_I = \frac{-2(q_{fin} - q_{II\,ini})}{t_{fin}^3} + \frac{\dot{q}_{fin} + \dot{q}_{II\,ini}}{t_{fin}^2} = \frac{-2(80-40)}{1^3} + \frac{0+5}{1^2} = -75$$

Ejercicio 6.4:
Consideremos un robot de 2 grados de libertad con articulaciones rotacionales. En la figura se muestran las posiciones iniciales, intermedias y finales del robot generadas durante 3 segundos, donde por los puntos intermedios ambos eslabones tienen una velocidad de 5º/s. Se consideran las velocidades iniciales y finales cero.



Eslabón 2

Tramo I

$$\boxed{q_I(t) = a_I + b_I t + c_I t^2 + d_I t^3}$$

$$a_I = q_{ini} = 30º$$

$$b_I = \dot{q}_{ini} = 0$$

$$c_I = \frac{3(q_{fin} - q_{ini})}{t_{fin}^2} - \frac{2\dot{q}_{ini} + \dot{q}_{fin}}{t_{fin}} = \frac{3(50-30)}{1^2} - \frac{2 \cdot 0 + 5}{1} = 55$$

$$d_I = \frac{-2(q_{fin} - q_{ini})}{t_{fin}^3} + \frac{\dot{q}_{fin} + \dot{q}_{ini}}{t_{fin}^2} = \frac{-2(50-30)}{1^3} + \frac{5+0}{1^2} = -35$$

Tramo II

$$\boxed{q_{II}(t) = a_{II} + b_{II} t + c_{II} t^2 + d_{II} t^3}$$

$$a_{II} = q_{II\,ini} = 50º$$

$$b_{II} = \dot{q}_{II\,ini} = 5$$

$$c_I = \frac{3(q_{fin} - q_{II\,ini})}{t_{fin}^2} - \frac{2\dot{q}_{II\,ini} + \dot{q}_{fin}}{t_{fin}} = \frac{3(40-50)}{1^2} - \frac{2 \cdot 5 + 0}{1} = -40$$

$$d_I = \frac{-2(q_{fin} - q_{II\,ini})}{t_{fin}^3} + \frac{\dot{q}_{fin} + \dot{q}_{II\,ini}}{t_{fin}^2} = \frac{-2(40-50)}{1^3} + \frac{0+5}{1^2} = 25$$