TEMA 6. DINÁMICA DE ROBOTS Y CONTROL

ROBÓTICA

ÍNDICE

DINÁMICA - INTRODUCCIÓN

La **dinámica** se ocupa de la relación entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que éstas generan. En el caso del modelo dinámico de un robot, se trataría de conocer la relación entre el movimiento del brazo del robot y las fuerzas que se originan. Matemáticamente relacionaría:

1) Las variable articulares y sus derivadas (velocidad, aceleración).
2) Las fuerzas y los momentos aplicados a las articulaciones.
3) Los parámetros propios del robot (longitud, masa e inercias).

El modelo dinámico para el caso de robots de uno o dos grados de libertad no es muy complejo, pero el modelado de robots con mas grados de libertad aumenta en complejidad y es necesario el empleo de métodos computacionales para resolverlo.

DINÁMICA - INTRODUCCIÓN

Obtención del modelo dinámico

Formulación Lagrange-Euler

Se basa en el balance de **energía** a través del **lagrangiano**. Permite describir la dinámica del robot considerándolo como una caja negra y teniendo en cuenta la energía almacenada en términos de energía cinética y potencial.

Lagrangiano $$L(q,\dot{q}) = \boxed{K(q,\dot{q})} - \boxed{U(q)}$$

Ecuación de movimiento $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

Formulación Newton-Euler

Se basa en efectuar un **balance de fuerzas y momentos** o pares existentes. Para ello, se formulan las ecuaciones que describen el movimiento lineal y angular de cada eslabón del robot.

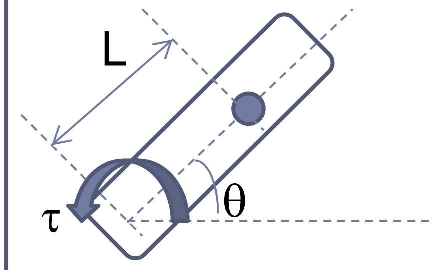
Newton $$\sum F = m\dot{v}$$

Euler $$\sum T = I\dot{w} + w \times (I w)$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

DINÁMICA - FORMULACIÓN DE LAGRANGE

EJEMPLO 1: **Modelo eslabón con masa concentrada**



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=\tau$$

siendo

- qi= coord. articulaciones
- τ=vector de fuerzas y pares aplicados en las q1
- L=lagrangiano
- K=energía cinética
- U=energía potencial

$$L(q,\dot{q})=K(q,\dot{q})-U(q)$$

<u>1er paso: Energía cinética (K)</u>

$$K=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

$$I=ML^2$$

<u>2º paso: Energía potencial (U)</u>

$$U=Mgh=M\,g\,L\,sen\theta$$

$$L=K-U=\frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2-M\,g\,L\,sen\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial q}=-MgL\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=ML^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=ML^2\ddot{\theta}$$

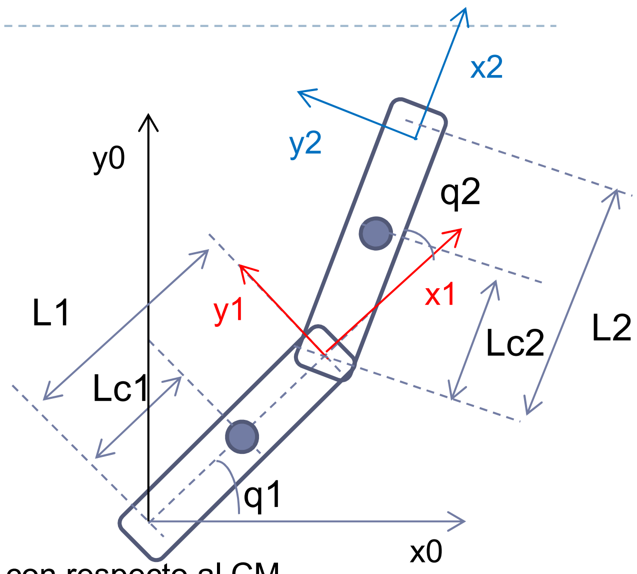
Ecuación de movimiento

$$ML^2\ddot{\theta}+M\,g\,L\cos\theta=\tau$$

DINÁMICA - FORMULACIÓN DE LAGRANGE

EJEMPLO 2 : **Robot plano de 2 grados de libertad**

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=\tau} \qquad \boxed{L = K - U}$$



1er paso clculo de la Energía cinética (K)

$$K=\sum_{1=1}^{n} K_i$$

La energía cinética es la suma de las energías cinéticas de los eslabones del robot.

La energía cinética de un eslabón se compone de dos términos, el primero debido a la **velocidad lineal**, y el segundo a **la velocidad angular**:

$$K_i = \boxed{\frac{1}{2} m_i \, v_i^T v_i} + \boxed{\frac{1}{2}\omega_i^T I_i \, \omega_i}$$

m_1= masa eslabón i
v_i=velocidad lineal del CM del eslabón i con respecto al CM
I_i=tensor de inercia del CM del eslabón i con respecto al CM

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_\omega(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$$

Recordando:

tema 5 Jacobiano

Nota: mientras que la velocidad angular es la misma en todos los puntos del eslabón, no ocurre lo mismo con la velocidad lineal que es distinta en cada punto, por ello se considera la velocidad del centro de masas.

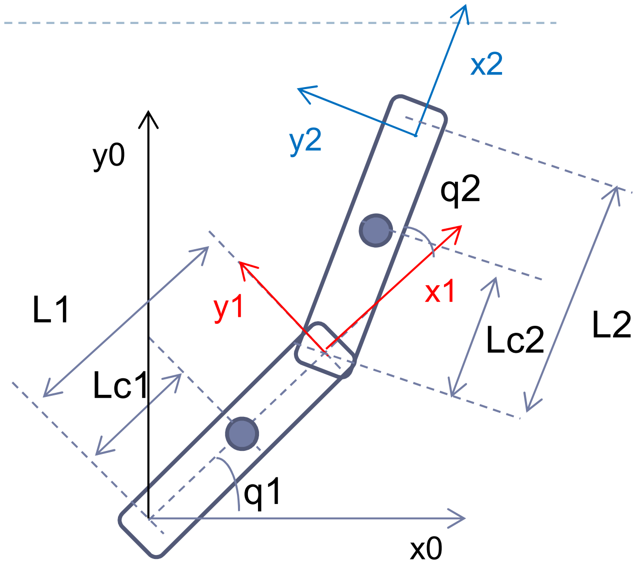
DINÁMICA - FORMULACIÓN DE LAGRANGE

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v(q) \\ J_\omega(q) \end{bmatrix} \cdot \dot{q}$$

Recordando:

tema 5 Jacobiano

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \omega_i^T I_i \omega_i$$



Generalizando para n eslabones:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[m_i [J_{vi}(q) \cdot \dot{q}]^T \cdot J_{vi}(q) \cdot \dot{q} + [J_{wi}(q) \cdot \dot{q}]^T \cdot I_i J_{wi}(q) \cdot \dot{q} \right]$$

$$[J_{wi}(q) \cdot \dot{q}]^T = \dot{q}^T \, J_{wi}(q)^T$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{i=1}^{n} \left[m_i \cdot J_{vi}^T(q) \cdot J_{vi}(q) + J_{wi}^T(q) \cdot I_i J_{wi}(q) \right] \dot{q}$$

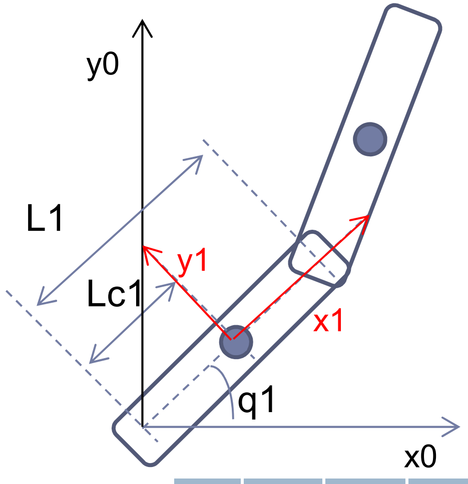
matricialmente:

$$\boxed{K = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \, \dot{q}}$$

DINÁMICA - FORMULACIÓN DE LAGRANGE

EJEMPLO 2 : **Robot plano de 2 grados de libertad**

1er paso cálculo de la Energía cinética (K)



	θi	di	ai	αi
1	**q1**	**0**	**L_{c1}**	**0º**

Eslabón 1: $$K_1 = \boxed{\frac{1}{2} m_1 v_1^T v_1} + \boxed{\frac{1}{2} \omega_1^T I_1 \omega_1}$$

Calculamos inicialmente la MTH del primer eslabón.

$$ {}^0_1A = \begin{bmatrix} Cq\,1 & -Sq\,1 & 0 & \boxed{L_{c1}Cq\,1} \\ Sq\,1 & Cq\,1 & 0 & \boxed{L_{c1}Sq\,1} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \rightarrow x = L_{c1}Cq1 \\ \rightarrow y = L_{c1}Sq1 \\ \rightarrow z = 0 \end{array} $$

Haciendo uso del jacobiano, este nos queda de la siguiente manera:

$$ J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_{c1}Sq1 & 0 & 0 \\ L_{c1}Cq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow $$

La velocidad **lineal** del eslabón 1 seria:

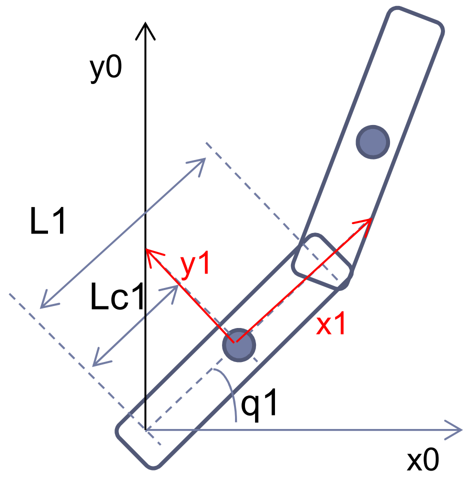
$$ v_1 = \begin{bmatrix} -L_{c1}Sq1 & 0 & 0 \\ L_{c1}Cq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -L_{c1}Sq1\,\dot{q}1 \\ L_{c1}Cq1\,\dot{q}1 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1} $$

$$ \boxed{\begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_\omega(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}} $$

DINÁMICA - FORMULACIÓN DE LAGRANGE

EJEMPLO 2 : **Robot plano de 2 grados de libertad**

1er paso cálculo de la Energía cinética (K)



Energía cinética $K_1 = \boxed{\frac{1}{2} m_1 v_1^T v_1} + \boxed{\frac{1}{2} \omega_1^T I_1 \omega_1}$

$$v_1^T v_1 = \begin{bmatrix} -L_{c1}Sq1\,\dot{q}1 & L_{c1}Cq1\,\dot{q}1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -L_{c1}Sq1\,\dot{q}1 \\ L_{c1}Cq1\,\dot{q}1 \\ 0 \end{bmatrix} = L_{c1}^2\,\dot{q}_1^2$$

La velocidad **angular** del eslabón 1 seria:

$$\boxed{\vec{w}_1 = \dot{q}_1\,\vec{z}_0}$$

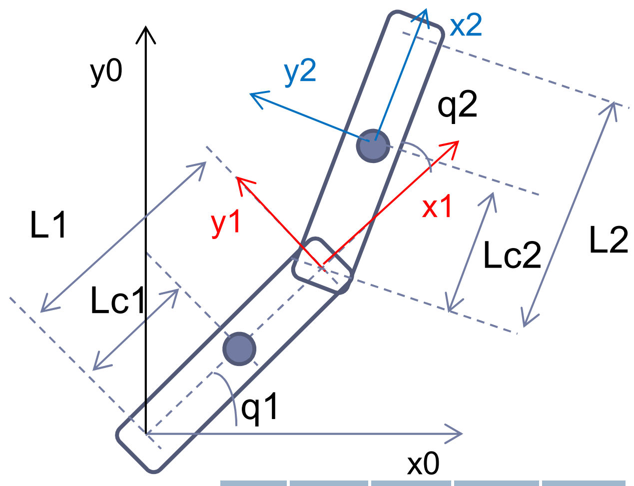
Por lo que la energía cinética del eslabón 1:

$$\boxed{K_1 = \boxed{\frac{1}{2} m_1 L_{c1}^2\,\dot{q}_1^2} + \boxed{\frac{1}{2} I_1\,\dot{q}_1^2}}$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

DINÁMICA - FORMULACIÓN DE LAGRANGE

EJEMPLO 2 : **Robot plano de 2 grados de libertad**



1er paso cálculo de la Energía cinética (K)

Eslabón 2: $$K_2 = \boxed{\frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2} + \boxed{\frac{1}{2} \omega_2^T I_2 \omega_2}$$

	θi	di	ai	αi
1	q1	0	L_1	0º
2	q2	0	L_{c2}	0º

Calculamos inicialmente la MTH del segundo eslabón

$$ {}^0_2A = {}^0_1A\,{}^1_2A = \begin{bmatrix} Cq1 & -Sq1 & 0 & L_1Cq1 \\ Sq1 & Cq1 & 0 & L_1Sq1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cq2 & -Sq2 & 0 & L_{c2}Cq2 \\ Sq2 & Cq2 & 0 & L_{c2}Sq2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ \begin{array}{l} {}^0_2A = {}^0_1A\,{}^1_2A = \begin{bmatrix} Cq1Cq2 - Sq1Sq2 & -Cq1Sq2 - Sq1Cq2 & 0 & \boxed{Cq1L_{c2}Cq2 - Sq1L_{c2}Sq2 + L_1Cq1} \\ Sq1Cq2 + Cq1Cq2 & -Sq1Sq2 + Cq1Cq2 & 0 & \boxed{Sq1L_{c2}Cq2 - Cq1L_{c2}Sq2 + L_1Sq1} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} =x \\ =y \\ =z \\ \end{array} \end{array} $$

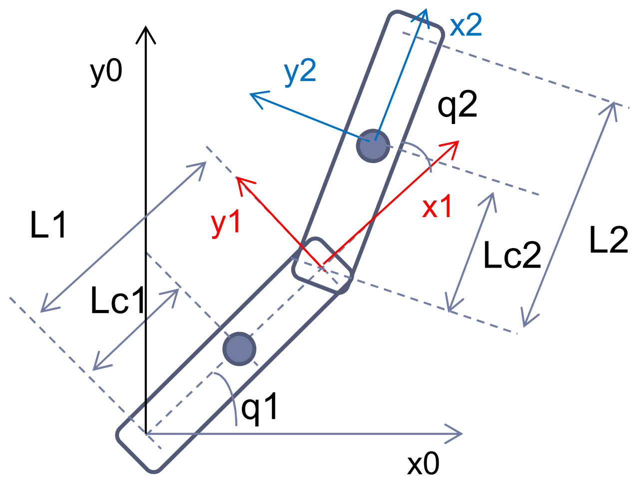
Jon Legarreta / Raquel Martinez

DINÁMICA - FORMULACIÓN DE LAGRANGE

EJEMPLO 2 : **Robot plano de 2 grados de libertad**

<u>1er paso cálculo de la Energía cinética (K)</u>

Eslabón 2: $K_2 = \boxed{\frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2} + \boxed{\frac{1}{2} \omega_2^T I_2 \omega_2}$



recordatorio

$$\boxed{\begin{aligned} S(q1 \pm q2) &= Sq1Cq2 \pm Cq1Sq2 \\ C(q1 \pm q2) &= Cq1Cq2 \mp Sq1Sq2 \end{aligned}}$$

Haciendo uso del jacobiano, nos queda de la siguiente manera:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1Sq1 - L_{c2}[S(q1+q2)] & -L_{c2}[S(q1+q2)] & 0 \\ L_1Cq1 - L_{c2}[C(q1+q2)] & L_{c2}[C(q1+q2)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -L_1Sq1 - L_{c2}[S(q1+q2)] & -L_{c2}[S(q1+q2)] & 0 \\ L_1Cq1 - L_{c2}[C(q1+q2)] & L_{c2}[C(q1+q2)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}1 \\ \dot{q}2 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} (-L_1Sq1 - L_{c2}[S(q1+q2)])\dot{q}1 - L_{c2}[S(q1+q2)]\dot{q}2 \\ (L_1Cq1 - L_{c2}[C(q1+q2)])\dot{q}1 + L_{c2}[C(q1+q2)]\dot{q}2 \\ 0 \end{bmatrix} = v_2}$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

DINÁMICA - FORMULACIÓN DE LAGRANGE

EJEMPLO 2 : **Robot plano de 2 grados de libertad**

1er paso cálculo de la Energía cinética (K)

Eslabón 2:
$$K_2 = \boxed{\frac{1}{2} m_2 \, v_2^T v_2} + \boxed{\frac{1}{2} \omega_2^T I_2 \omega_2}$$

$$v_2^T v_2 = \begin{bmatrix} (-L_1 Sq1 - L_{c2}[S(q1+q2)])\,\dot{q}1 - L_{c2}[S(q1+q2)]\,\dot{q}2 & (L_1 Cq1 - L_{c2}[C(q1+q2)])\,\dot{q}1 + L_{c2}[C(q1+q2)]\,\dot{q}2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-L_1 Sq1 - L_{c2}[S(q1+q2)])\,\dot{q}1 - L_{c2}[S(q1+q2)]\,\dot{q}2 \\ (L_1 Cq1 - L_{c2}[C(q1+q2)])\,\dot{q}1 + L_{c2}[C(q1+q2)]\,\dot{q}2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La velocidad **angular** del eslabón 2 seria:

$$\boxed{\vec{w}_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\,\vec{z}_0}$$

La energía cinética queda finalmente:

$$\boxed{K_2 = \boxed{\frac{1}{2} m_2 \left[L_1^2 \dot{q}_1^2 + L_{c2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2 L_1 L_{c2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2)\cos q_2 \right]} + \boxed{\frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2}}$$

DINÁMICA - FORMULACIÓN DE LAGRANGE

EJEMPLO 2 : **Robot plano de 2 grados de libertad**

2º paso cálculo de la Energía Potencial (U)

Para el calculo de la energía potencial, se deben considerar cada una de las energías potenciales almacenadas en cada eslabón, esto es:

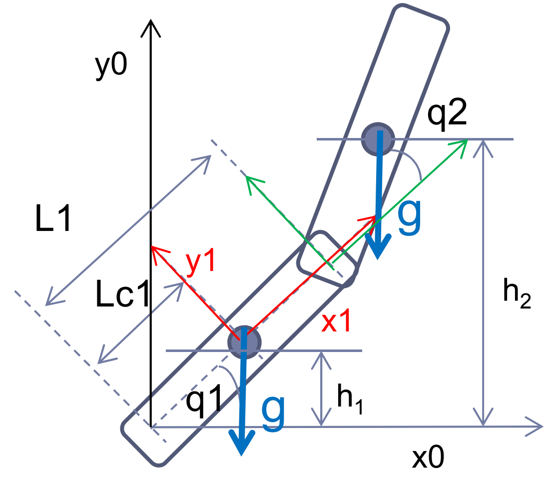
$$U = \sum_{1=1}^{n} U_i \qquad U_i = m_i g^T p_{ci}$$

$$U = U(q)$$

m_i= masa eslabón i
g= vector de gravedad
p_{ci}=vector que localiza el CM del eslabón i respecto del sistema referencia del mundo

$$\boxed{U_1 = m_1 g \overbrace{L_{c1} sen\, q_1}^{h1}}$$

$$\boxed{U_2 = m_2 g \overbrace{[L_1 sen\, q_1 + L_{c2} sen(q_1 + q_2)]}^{h2}}$$



Jon Legarreta / Raquel Martinez

EJEMPLO 2 : **Robot plano de 2 grados de libertad**

3º y 4º paso cálculo de **Lagrangiano y ecuación de movimiento**

$$L(q,\dot{q}) = K(q,\dot{q}) - U(q)$$

El lagrangiano en forma matricial : $L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} - U(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(q)\cdot\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j - U(q)$

Ecuación de movimiento :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}\right) - \boxed{\frac{\partial L}{\partial q}} = \tau}$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\cdot\dot{q}_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\cdot\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}d_{kj}(q)\cdot\dot{q}_j =$$

$$\boxed{= \sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\cdot\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_j}\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j}$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k}}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\cdot\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k} = \tau_k}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\cdot\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ijk}(q)\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j + \phi(q) = \tau_k}$$

Forma matricial $\boxed{D(q)\cdot\ddot{q} + C(q,\dot{q})\cdot\dot{q} + g(q) = \tau}$

Inercial Coriolis gravedad

Jon Legarreta / Raquel Martinez

EJEMPLO 2 : **Robot plano de 2 grados de libertad**

3º paso cálculo de **Lagrangiano**

$$L(q,\dot{q}) = K - U \Rightarrow \boxed{L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} - U(q)}$$

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} = \frac{1}{2}[\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2] \cdot \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[\dot{q}_1 d_{11} + \dot{q}_2 d_{21} \quad \dot{q}_1 d_{12} + \dot{q}_2 d_{22}\right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[d_{11}\dot{q}_1\dot{q}_1 + d_{21}\dot{q}_1\dot{q}_2 + d_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + d_{22}\dot{q}_2\dot{q}_2\right]$$

$$d_{12} = d_{21}$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\left[d_{11}\dot{q}_1\dot{q}_1 + 2 \cdot d_{21}\dot{q}_1\dot{q}_2 + d_{22}\dot{q}_2\dot{q}_2\right]}$$

$$\boxed{L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} - U(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j - U(q)}$$

EJEMPLO 2 : **Robot plano de 2 grados de libertad**

<u>3º paso cálculo de **Lagrangiano**</u>

$$L(q,\dot{q}) = K - U$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones obtenidas anteriormente:

$$\boxed{L(q,\dot{q}) = K_1 + K_2 - U_1 - U_2}$$

$$\boxed{L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} - U(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(q)\cdot\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j - U(q)}$$

$$L = \frac{1}{2}\underbrace{m_1 L_{c1}^2}_{d_{11}}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\underbrace{I_1}_{d_{11}}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\underbrace{m_2}\left[\underbrace{L_1^2\dot{q}_1^2}_{d_{11}} + \underbrace{L_{c2}^2}_{\substack{d_{11}\\ d_{22}\\ d_{12}=d_{12}}}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2 + \underbrace{2L_1L_{c2}}_{\substack{d_{11}\\ d_{12}=d_{21}}}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2)\cos q_2\right] + \frac{1}{2}\underbrace{I_2}_{\substack{d_{11}\\ d_{22}\\ d_{12}=d_{12}}}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2 - m_1 g\, L_{c1} sen\, q_1 - m_2 g\,[L_1 sen\, q_1 + L_{c2} sen(q_1+q_2)]$$

Como se puede observar en la fórmula, los términos **d_{ij}**: solo aparecen en la energía cinética.

Los términos donde aparece d_{11} es porque el término q_1 está elevado al cuadrado (q_1 * q_1) y aparece dos veces

Los términos donde aparece d_{22} es porque el término q_2 está elevado al cuadrado (q_2 * q_2) y aparece dos veces

Los términos donde aparece d_{12} o d_{21} es porque el término q_1 y q_2

DINÁMICA - FORMULACIÓN DE LAGRANGE

EJEMPLO 2 : **Robot plano de 2 grados de libertad**

4º paso cálculo de la **ecuación de movimiento**

Forma matricial

$$\boxed{D(q)\cdot\ddot{q}+C(q,\dot{q})\cdot\dot{q}+g(q)=\tau}$$

Inercial Coriolis gravedad

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\cdot\ddot{q}_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ijk}(q)\,\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j+\phi_k(q)=\tau_k}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones obtenidas anteriormente, se calculan los coeficientes c_{ijk} (k=1,2):

$$\boxed{d_{11}}=m_1L_{c1}^{\;2}+I_1+m_2L_1^{\;2}+m_2L_{c2}^{\;2}+2m_2L_1L_{c2}\cos q2+I_2$$

$$d_{12}+d_{21}=2\cdot m_2L_{c2}^{\;2}+2\cdot m_2L_1L_{c2}\cos q2+2\cdot I_2$$

$$\boxed{d_{12}}=d_{21}=m_2L_{c2}^{\;2}+m_2L_1L_{c2}\cos q2+I_2$$

$$\boxed{d_{22}}=m_2L_{c2}^{\;2}+I_2$$

$$\boxed{c_{ijk}=\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right)}$$

$$\left\{\begin{aligned}
c_{111}&=\frac{\partial d_{11}}{\partial q_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_1}=0\\
c_{121}&=\frac{\partial d_{12}}{\partial q_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{12}}{\partial q_1}=0\\
c_{112}&=\frac{\partial d_{21}}{\partial q_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2}=m_2L_1L_{c2}sen\,q_2\\
c_{122}&=\frac{\partial d_{22}}{\partial q_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{12}}{\partial q_2}=-\frac{1}{2}m_2L_1L_{c2}sen\,q_2\\
c_{211}&=\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{21}}{\partial q_1}=-2m_2L_1L_{c2}sen\,q_2\\
c_{221}&=\frac{\partial d_{12}}{\partial q_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_1}=-m_2L_1L_{c2}sen\,q_2\\
c_{212}&=\frac{\partial d_{21}}{\partial q_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{21}}{\partial q_2}=-\frac{1}{2}m_2L_1L_{c2}sen\,q_2\\
c_{222}&=\frac{\partial d_{22}}{\partial q_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_2}=0
\end{aligned}\right.$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

DINÁMICA - FORMULACIÓN DE LAGRANGE

EJEMPLO 2 : **Robot plano de 2 grados de libertad**

4º paso cálculo de la **ecuación de movimiento**

$$U = -m_1 g\, L_{c1} sen\, q_1 - m_2 g\,[L_1 sen\, q_1 + L_{c2} sen(q_1 + q_2)]$$

El término de gravedad:

$$\boxed{\phi_1 = -\frac{\partial U}{\partial q_1}} = m_1 g\, L_{c1} \cos q_1 + m_2 g\, L_1 \cos q_1 + m_2 g L_{c2} \cos(q_1 + q_2)]$$

$$\boxed{\phi_2 = -\frac{\partial U}{\partial q_2}} = m_2 g L_{c2} \cos(q_1 + q_2)$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\cdot \ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ijk}(q)\,\dot{q}_i \cdot \dot{q}_j + \boxed{\phi_k(q)} = \tau_k}$$

K=1

K=2

$$\sum_{j=1}^{n} d_{1j}(q)\cdot \ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij1}(q)\,\dot{q}_i \cdot \dot{q}_j + \phi_1(q) = \tau_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{2j}(q)\cdot \ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij2}(q)\,\dot{q}_i \cdot \dot{q}_j + \phi_2(q) = \tau_2$$

Solución a las ecuaciones de movimiento

$$\tau_1 = d_{11}\cdot \ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + c_{111}\,\dot{q}_1^{\,2} + (c_{121} + c_{211})\dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + c_{221}\cdot \dot{q}_2^{\,2} + \phi_1$$

$$\tau_2 = d_{21}\cdot \ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 + c_{112}\,\dot{q}_1^{\,2} + (c_{122} + c_{212})\dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + c_{222}\cdot \dot{q}_2^{\,2} + \phi_2$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

CONTROL CINEMÁTICO - INTRODUCCIÓN

El **control cinemático** se basa en el modelo cinemático del robot y utiliza posiciones y velocidades.

OBJETIVO:

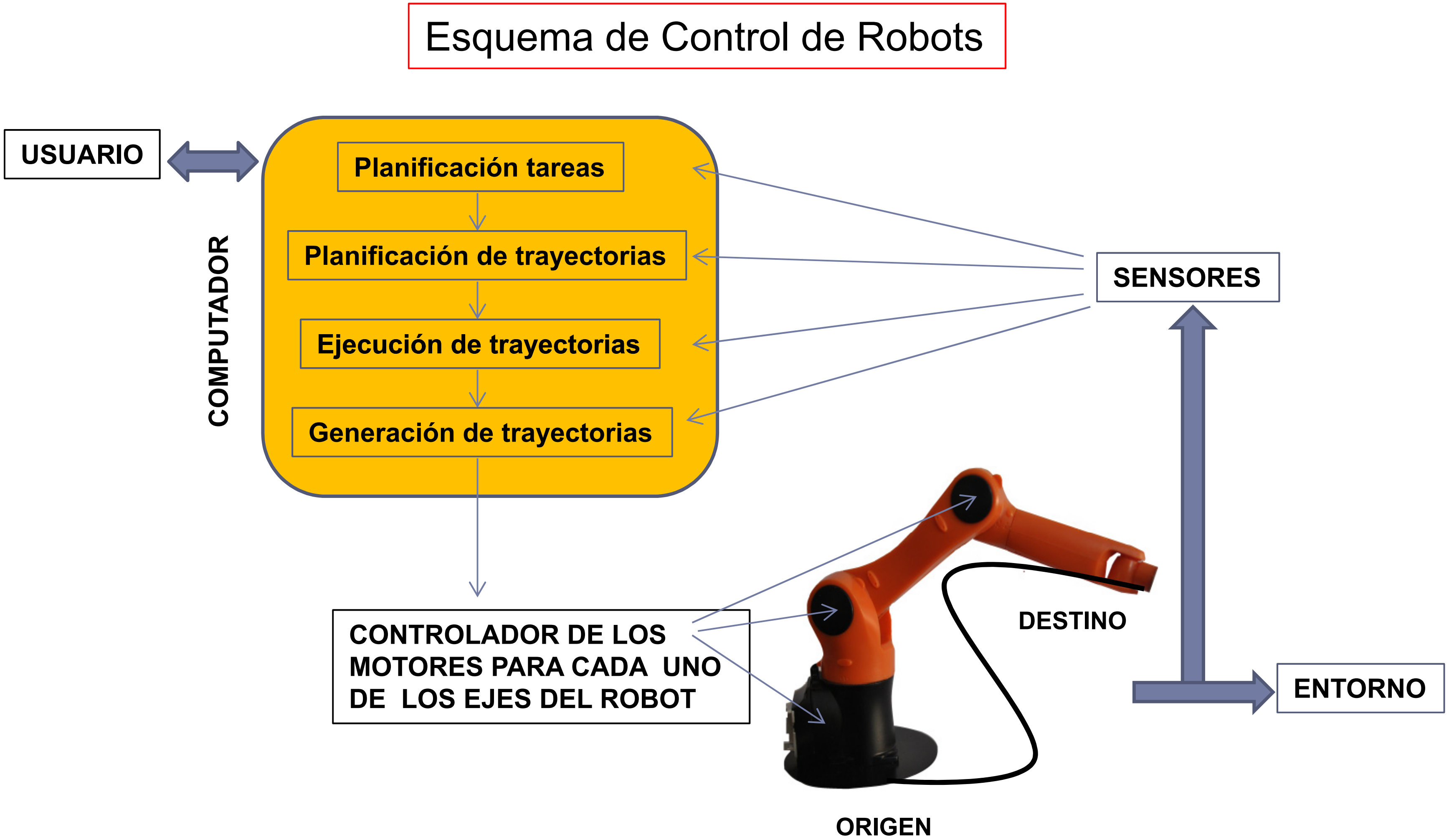
1) Establecer cuales son las trayectorias que debe seguir cada articulación del robot a lo largo del tiempo para conseguir los objetivos fijados por el usuario:

- Punto de destino.
- Tipo de trayectoria del extremo.
- Tiempo invertido.
- etc.

2) Es necesario atender a las restricciones físicas de los accionamientos y criterios de calidad (suavidad, precisión, ...)

Jon Legarreta / Raquel Martinez

CONTROL CINEMÁTICO - INTRODUCCIÓN

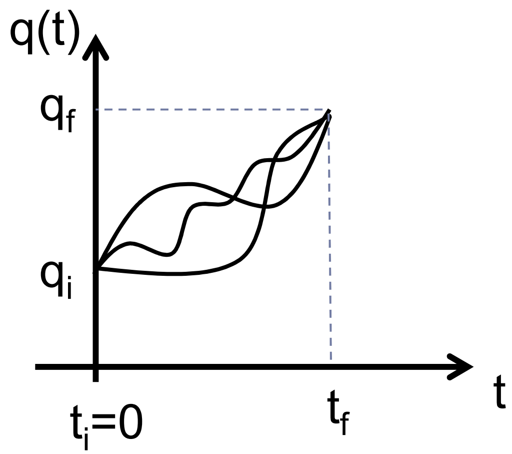


Jon Legarreta / Raquel Martinez

CONTROL CINEM. - GENERACIÓN TRAYECTORIAS

Para poder controlar el movimiento de un robot, es necesario generar previamente una trayectoria en el espacio para que este lo realice. Esta trayectoria puede realizarse de dos maneras:

1) Generación de trayectoria **en el espacio articular (q_i)**. Desplazar el brazo de un punto a otro en un tiempo determinado, sin importar la trayectoria en concreto.



2) Generación de trayectoria en el **espacio cartesiano**. Cuando es necesario que el robot siga una determinada trayectoria (ejemplo un línea de soldadura).

CONTROL CINEM. - GENERACIÓN TRAYECTORIAS

Tipos de trayectorias en el espacio articular

- Trayectorias punto a punto

  Movimiento de cada articulación de manera independiente al resto

  - Movimiento eje a eje

    Movimiento de cada articulación se produce de manera consecutiva. Tiempos de ejecución altos.

  - Movimiento simultaneo de ejes

    Movimiento de cada articulación se produce de manera simultanea, pero cada articulación alcanzara su posición final en tiempos distintos dependiendo de las velocidades asignadas etc.. Se producen Desgastes innecesarios al exigir máximas velocidades

- Trayectorias coordinadas o isócronas

  Movimiento de cada articulación se produce de manera simultanea. Todas las articulaciones comenzaran a moverse al mismo tiempo y alcanzaran también su posición final simultáneamente, ajustando para ello las velocidades de giro de cada articulación .

Trayectorias en el espacio articular

1) Conversión de los puntos cartesianos inicial, final e intermedios a valores articulares para cada articulación (cinemática inversa, *tema 5*).
2) Interpolación de los valores de las articulares de cada articulación <u>con o sin puntos</u> intermedios.
3) Movimiento de cada articulación de forma independiente siguiendo la trayectoria elegida.

Interpolación ↔ trayectoria articular

Interpolación → Cúbica, Lineal con ajuste parabólico

trayectoria articular → Puntos inicio y fin, Puntos intermedios

Interpolación de trayectoria articular con puntos inicio y fin

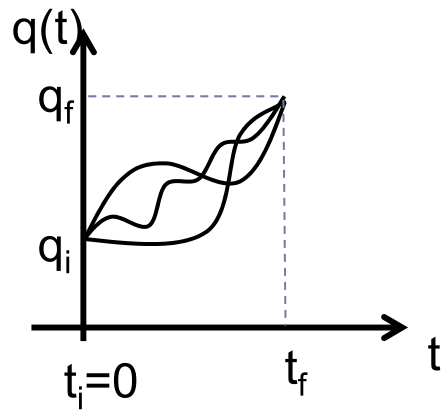
Se considera solo los puntos inicio y final, no se consideran puntos intermedios, por lo que las posibles trayectorias son diversas (ver figura). Para producir movimientos suaves es necesario imponer 4 condiciones de contorno:

$$\left.\begin{aligned} q(t_{ini}) &= q(0) = q_{ini} \\ q(t_{fin}) &= q_{fin} \end{aligned}\right\}$$

Aseguran que comienza y acaba en los puntos adecuados.

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}(t_{ini}) &= \dot{q}(0) = 0 \\ \dot{q}(t_{fin}) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Aseguran que las velocidades de inicio y final son nulas.



Interpolación de trayectoria articular con puntos inicio y fin

Interpolación CÚBICA

Las 4 condiciones se puede cumplir con un polinomio de grado 3 del tipo:

$$\boxed{q(t) = a + b\,t + c\,t^2 + d\,t^3}$$

derivando

$$\dot{q}(t) = b + 2c\,t + 3\,d\,t^2$$

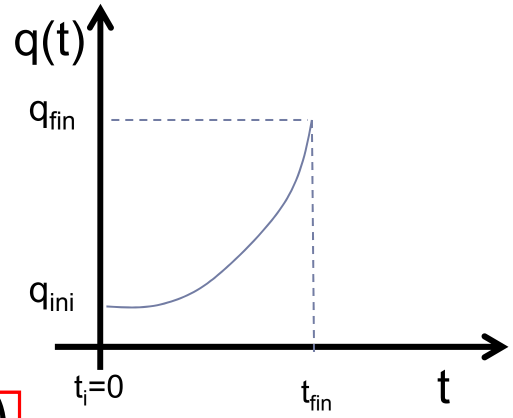
$$q(t_{ini}) = q(0) = q_{ini} \rightarrow \boxed{a = q_{ini}}$$

$$q(t_{fin}) = q_{fin} \rightarrow q(t_{fin}) = a + b\,t_{fin} + c\,t_{fin}^2 + d\,t_{fin}^3 = q_{fin}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{q}(t_{ini}) = \dot{q}(0) = 0 \\ \dot{q}(t_{fin}) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \dot{q}(t_{ini}) = \dot{q}(0) = b \Rightarrow \boxed{b = 0} \\ \dot{q}(t_{fin}) = 2c\,t_{fin} + 3\,d\,t_{fin}^2 = 0 \end{array}$$

Interpolación de trayectoria articular con puntos inicio y fin

Interpolación CÚBICA



$$q(t_{fin}) = a + b\,t_{fin} + c\,t_{fin}^2 + d\,t_{fin}^3 = q_{fin}$$

$$\boxed{a = q_{ini}} \qquad \boxed{b = 0}$$

$$q_{ini} + c\,t_{fin}^2 + d\,t_{fin}^3 = q_{fin}$$

$$2\,c\,t_{fin} + 3\,d\,t_{fin}^2 = 0$$

$$\boxed{c = \frac{3\left(q_{fin} - q_{ini}\right)}{t_{fin}^2}}$$

$$\boxed{d = \frac{-2\left(q_{fin} - q_{ini}\right)}{t_{fin}^3}}$$

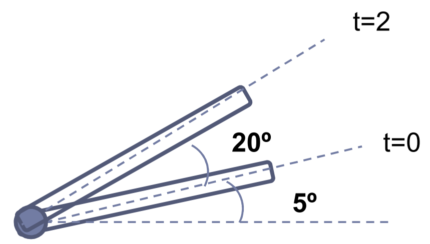
Jon Legarreta / Raquel Martinez

Interpolación de trayectoria articular con puntos inicio y fin

Interpolación CÚBICA

Ejemplo:
Consideremos un robot de una articulación rotacional que inicialmente se encuentra girada 5º. **Calcular la interpolación cubica** que haga que el robot gire 20º en 2 s.

$$\left.\begin{aligned} a &= q_{ini} = 5^{o} \\ b &= 0 \\ c &= \frac{3\left(q_{fin} - q_{ini}\right)}{t_{fin}^{2}} = \frac{3(25-5)}{4} = 15 \\ d &= \frac{-2\left(q_{fin} - q_{ini}\right)}{t_{fin}^{3}} = \frac{-2(25-5)}{8} = -5 \end{aligned}\right\}$$



$$\boxed{q(t) = 5 + 15t^{2} - 5t^{3}}$$

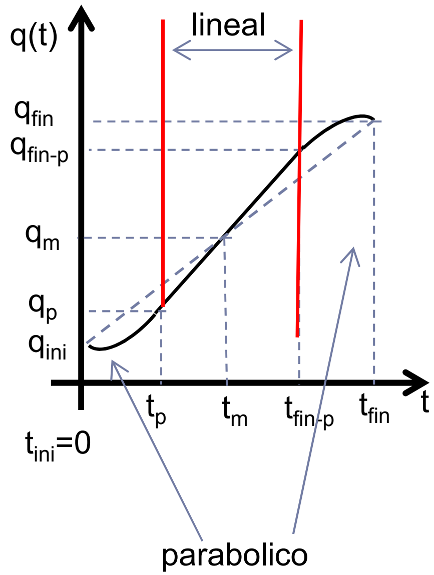
Jon Legarreta / Raquel Martinez

Interpolación de trayectoria articular con puntos inicio y fin

Interpolación lineal con ajuste PARABÓLICO

Un segundo método de interpolación es realizar un ajuste lineal entre los puntos inicio y fin. Sin embargo, con este tipo de ajuste la velocidad de la articulación permanece constante en todo el intervalo de tiempo, lo que lleva a aceleraciones infinitas al principio y al final.

Para evitar este inconveniente, **se realiza la trayectoria en 3 tramos**, el primero parabólico, el intermedio lineal y el final nuevamente parabólico. El primer tramo permite alcanzar una velocidad deseada con aceleración constante. En el segundo tramo lineal se mantiene la velocidad constante (aceleración cero). Finalmente en el ultimo tramo se aplica una deceleración constante hasta alcanzar la velocidad nula en el punto $\mathbf{q_{fin}}$.



Jon Legarreta / Raquel Martinez

Interpolación de trayectoria articular con puntos inicio y fin

Interpolación lineal con ajuste PARABÓLICO

I tramo parabólico: $t \in (0, t_p)$

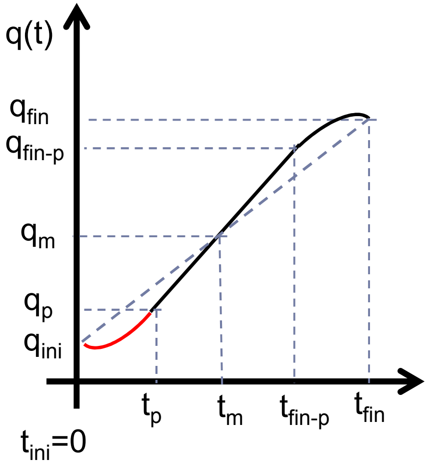
Ecuación: $q_I(t) = a_I + b_I\, t + c_I\, t^2 \xrightarrow{\text{derivando}} \dot{q}_I(t) = b_I + 2c_I\, t \xrightarrow{\text{derivando}} \ddot{q}_I(t) = 2c_I$

Condiciones iniciales:

$$q_I(t_{ini}) = q_I(0) = q_{ini} \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_I = q_{ini}}$$

$$\dot{q}_I(t_{ini}) = \dot{q}_I(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{b_I = 0}$$

$$\ddot{q} = cte \quad\Rightarrow\quad \boxed{c_I = \frac{\ddot{q}}{2}}$$



La ecuación del **I** tramo parabólico es:

$$\boxed{q_I(t) = q_{ini} + \frac{\ddot{q}}{2} t^2} \Rightarrow \mathbf{t \in (0, t_p)}$$

Interpolación de trayectoria articular con puntos inicio y fin

Interpolación lineal con ajuste PARABÓLICO

II tramo LINEAL: $t \in (t_p \,,\, t_{fin-p})$

Ecuación: $q_{II}(t) = \alpha + \beta(t - t_p)$ $\xrightarrow{\text{derivando}}$ $\dot{q}_{II}(t) = \beta$

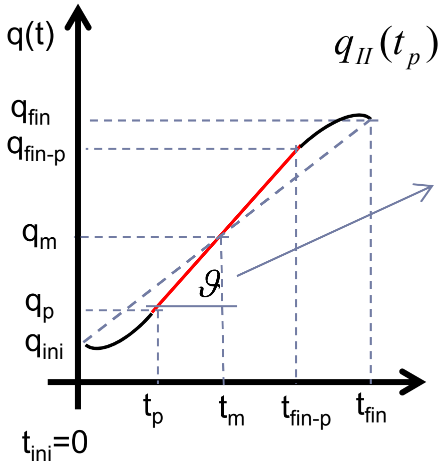
Velocidad de articulación = velocidad en tp del tramo I

$$\underbrace{\dot{q}_{II}(t) = \beta \qquad \dot{q}_I(t_p) = \ddot{q}\, t_p}$$

$$\boxed{\beta = \ddot{q}\, t_p}$$

$$\left.\begin{aligned} & q_I(t_p) = q_{II}(t_p) = q_p \\ & q_I(t_p) = \boxed{q_p = q_{ini} + \frac{\ddot{q}}{2} t_p^{\,2}} \\ & q_{II}(t_p) = \alpha \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\alpha = q_p}$$

Pendiente = Velocidad



$$tg\,\vartheta = \frac{q_m - q_p}{t_m - t_p} = \beta$$

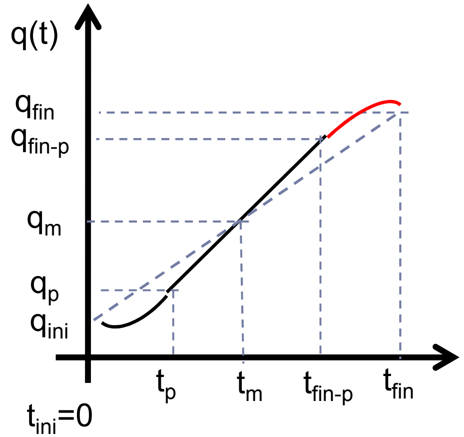
$$\boxed{\begin{aligned} t_m &= \frac{t_{fin} + t_{ini}}{2} \\ q_m &= \frac{q_{fin} + q_{ini}}{2} \end{aligned}}$$

$$\ddot{q}\, t_p = \frac{q_{fin} + q_{ini} - 2\boxed{q_p}}{t_{fin} + t_{ini} - 2t_p} = \frac{q_{fin} - q_{ini} - \ddot{q}\, t_p^{\,2}}{t_{fin} + t_{ini} - 2t_p}$$

$$\boxed{t_p = t_m - \frac{\sqrt{\ddot{q}^2 t_m^{\,2} - \ddot{q}(q_{fin} - q_{ini})}}{\ddot{q}}}$$

Interpolación de trayectoria articular con puntos inicio y fin

Interpolación lineal con ajuste PARABÓLICO



III tramo parabólico: $t \in (t_{fin-p}\ ,\ t_{fin})$

Ecuación: $q_{III}(t) = a_{III} + b_{III}\, t + c_{III}\, t^2$

Derivando:

$$\dot{q}_{III}(t) = b_{III} + 2c_{III}\, t$$

$$\dot{q}_{III}(t_{fin}) = 0^{o}/s \Rightarrow 0 = b_{III} + 2c_{III}\, t_{fin} \Rightarrow \boxed{b_{III} = -2c_{III}\, t_{fin}}$$

Velocidad tramo II en t_{fin-p}= velocidad en t_{fin-p} del tramo III

$$\dot{q}_{III}(t_{fin} - t_p) = \ddot{q}\, t_p \Rightarrow \boxed{\ddot{q}\, t_p = b_{III} + 2c_{III}\,(t_{fin} - t_p)}$$

$$\boxed{c_{III} = -\frac{\ddot{q}}{2} \qquad b_{III} = \ddot{q}\, t_{fin}}$$

$$q_{III}(t_{fin}) = \boxed{q_{fin} = a_{III} + b_{III}\, t_{fin} + c_{III}\, t_{fin}^{\;2}}$$

$$\boxed{a_{III} = q_{fin} - \frac{\ddot{q}}{2} t_{fin}^2}$$

Interpolación de trayectoria articular con puntos inicio y fin

Interpolación lineal con ajuste PARABÓLICO

Ejemplo:
Consideremos un robot de una articulación rotacional que inicialmente se encuentra girada 5º y con una aceleración de 40º/s² . **Calcular la interpolación lineal con ajuste parabólico** que haga que el robot gire 20º en 2 s.

Datos:

$$t_{fin} = 2\,s$$
$$t_m = 1\,s$$
$$q_{ini} = 5^{\circ}$$
$$q_{fin} = 25^{\circ}$$
$$q_m = 15^{\circ}$$
$$\ddot{q} = 40^{\circ}/s^2$$

$$t_p = 1 - \frac{\sqrt{40^2 1^2 - 40(25-5)}}{40} = 0.293\,s$$

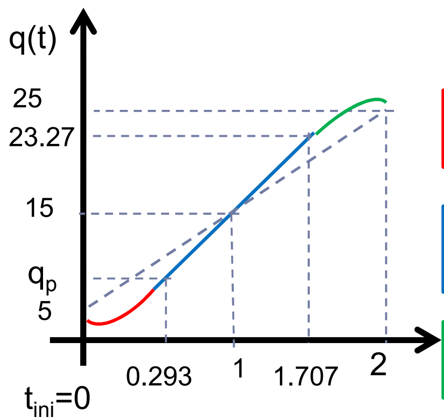
$$\beta = \ddot{q}\, t_p = 40 \cdot 0.293 = 11.71^{\circ}/s$$

$$q_p = \alpha = 5 + 20 t_p^{\,2} = 6.716^{\circ}$$

$$a_{III} = q_{fin} - \frac{\ddot{q}}{2} t_{fin}^2 = -55$$

$$c_{III} = -\frac{\ddot{q}}{2} = -20$$

$$b_{III} = \ddot{q}\, t_{fin} = 80$$



$$\boxed{q_I(t)} = q_{ini} + \frac{\ddot{q}}{2} t^2 = \boxed{5 + 20 t^2} \longrightarrow$$ **t ∈ (0 , 0.293 s)**

$$\boxed{q_{II}(t)} = \alpha + \beta(t - t_p) = \boxed{6.716 + 11.71(t - 0.293)} \longrightarrow$$ **0.293 < t < 1.707**

$$\boxed{q_{III}(t)} = a_{III} + b_{III}\, t + c_{III}\, t^2 = \boxed{-55 + 80 t - 20 t^2} \longrightarrow$$ **1.707 < t < 2**

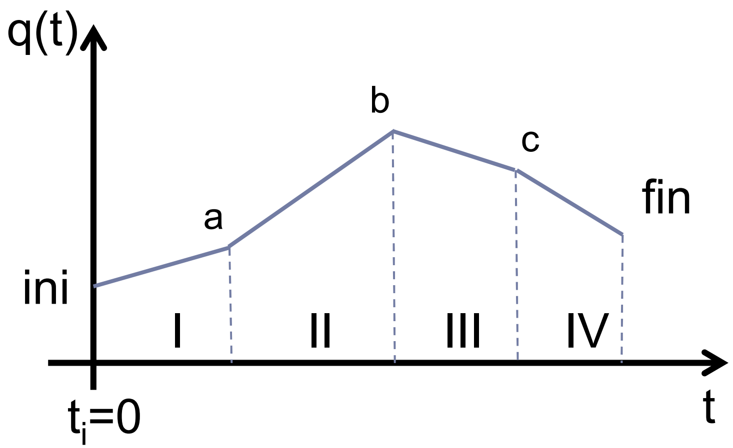
Jon Legarreta / Raquel Martinez

Interpolación de trayectoria articular con puntos **INTERMEDIOS**

Interpolación CÚBICA

Los valores de las velocidades intermedias se tienen que indicar por el usuario. Generalmente, si las pendientes de los tramos consecutivos son **de signo contrario**, las **velocidades se toman nulas**. En cambio si la pendientes no cambian de signo, se toma la **media de las dos velocidades** de cada tramo.

Ejemplo:
Velocidad punto **a**= media de las velocidades tramo I y II
Velocidad punto **b**= 0, pendientes de signo contrario
Velocidad punto **c**= media de las velocidades tramo III y IV



Interpolación de trayectoria articular con puntos **INTERMEDIOS**

En ocasiones es necesario definir puntos intermedios en las trayectorias a realizar por cada articulación. En principio se podrían utilizar los métodos vistos anteriormente, tomando cada punto de paso como el fin de un tramo y principio de otro; el único inconveniente es que obliga a que en esos puntos la velocidad sea cero, cuando en realidad no es necesario.

Interpolación CÚBICA

$$\boxed{q(t) = a + b\,t + c\,t^2 + d\,t^3} \xrightarrow{\text{derivando}} \dot{q}(t) = b + 2c\,t + 3\,d\,t^2$$

$$\begin{aligned} q(t_{ini}) &= q(0) = q_{ini} \\ q(t_{fin}) &= q_{fin} \end{aligned} \rightarrow \boxed{a = q_{ini}}$$

las velocidades:

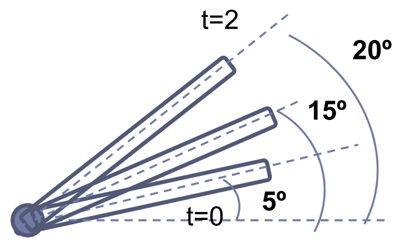
$$\begin{aligned} \dot{q}(t_{ini}) &= \dot{q}(0) = \dot{q}_{ini} \\ \dot{q}(t_{fin}) &= \dot{q}_{fin} \end{aligned}$$

$$\dot{q}(t_{ini}) = \dot{q}(0) = b \Rightarrow \boxed{b = \dot{q}_{ini}}$$

$$\left.\begin{aligned} q(t_{fin}) &= q_{ini} + \dot{q}_{ini}\,t_{fin} + c\,t_{fin}^2 + d\,t_{fin}^3 = q_{fin} \\ \dot{q}(t_{fin}) &= \dot{q}_{ini} + 2\,c\,t_{fin} + 3\,d\,t^2{}_{fin} = \dot{q}_{fin} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{aligned} c &= \frac{3(q_{fin} - q_{ini})}{t_{fin}^2} - \frac{2\dot{q}_{ini} + \dot{q}_{fin}}{t_{fin}} \\ d &= \frac{-2(q_{fin} - q_{ini})}{t_{fin}^3} + \frac{\dot{q}_{fin} + \dot{q}_{ini}}{t_{fin}^2} \end{aligned}}$$

Interpolación de trayectoria articular con puntos **INTERMEDIOS**

Interpolación CÚBICA



Ejemplo:
Consideremos un robot de una articulación rotacional que inicialmente se encuentra girada 5º y acaba en 20º en 2 s. Calcular las interpolaciones cubicas a realizar de forma que pase por un punto intermedio en el que el ángulo de giro sea 15º y con una velocidad de 5º/s. Se consideran las velocidades iniciales y finales cero.

Tramo I

$$\boxed{q_I(t) = a_I + b_I\,t + c_I\,t^2 + d_I\,t^3}$$

$$a_I = q_{ini} = 5^{\circ}$$

$$b_I = \dot{q}_{ini} = 0$$

$$c_I = \frac{3(q_{fin} - q_{ini})}{t_{fin}^2} - \frac{2\dot{q}_{ini} + \dot{q}_{fin}}{t_{fin}} = \frac{3(15-5)}{1^2} - \frac{2\cdot 0 + 5}{1} = 25$$

$$d_I = \frac{-2(q_{fin} - q_{ini})}{t_{fin}^3} + \frac{\dot{q}_{fin} + \dot{q}_{ini}}{t_{fin}^2} = \frac{-2(15-5)}{1^3} + \frac{5+0}{1^2} = -15$$

Tramo II

$$\boxed{q_{II}(t) = a_{II} + b_{II}\,t + c_{II}\,t^2 + d_{II}\,t^3}$$

$$a_{II} = q_{II\,ini} = 15^{\circ}$$

$$b_{II} = \dot{q}_{II\,ini} = 5$$

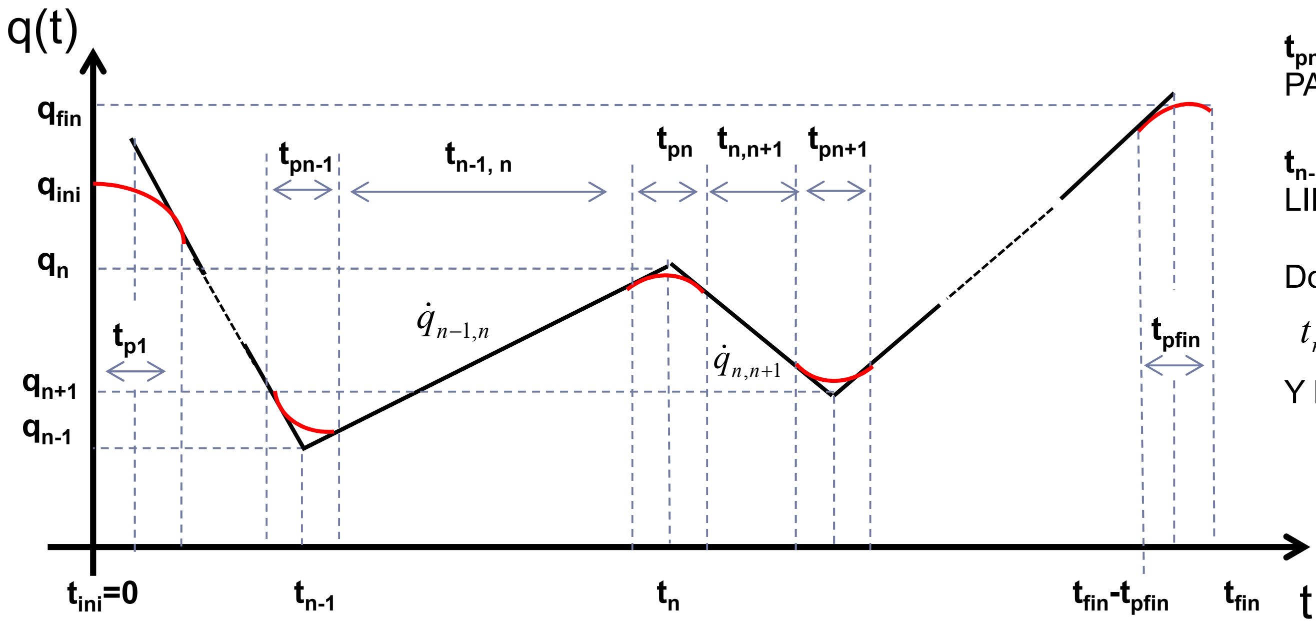
$$c_I = \frac{3(q_{fin} - q_{II\,ini})}{t_{fin}^2} - \frac{2\dot{q}_{II\,ini} + \dot{q}_{fin}}{t_{fin}} = \frac{3(15-15)}{1^2} - \frac{2\cdot 5 + 0}{1} = 5$$

$$d_I = \frac{-2(q_{fin} - q_{II\,ini})}{t_{fin}^3} + \frac{\dot{q}_{fin} + \dot{q}_{II\,ini}}{t_{fin}^2} = \frac{-2(20-15)}{1^3} + \frac{0+5}{1^2} = -5$$

Interpolación de trayectoria articular con puntos **INTERMEDIOS**

Interpolación lineal con ajuste PARABÓLICO

En este tipo de interpolación y debido a que en los puntos intermedios las velocidades de paso son distintas, los tramos parabólicos iniciales y finales en cada tramo no pueden ser simétricos como si lo eran en el caso anterior (sin puntos intermedios).



t_{pn}= intervalo de tiempo del ajuste PARABOLICO en un q_n

$t_{n-1,n}$= intervalo de tiempo del ajuste LINEAL entre los puntos de paso q_{n-1} y q_n

Donde:

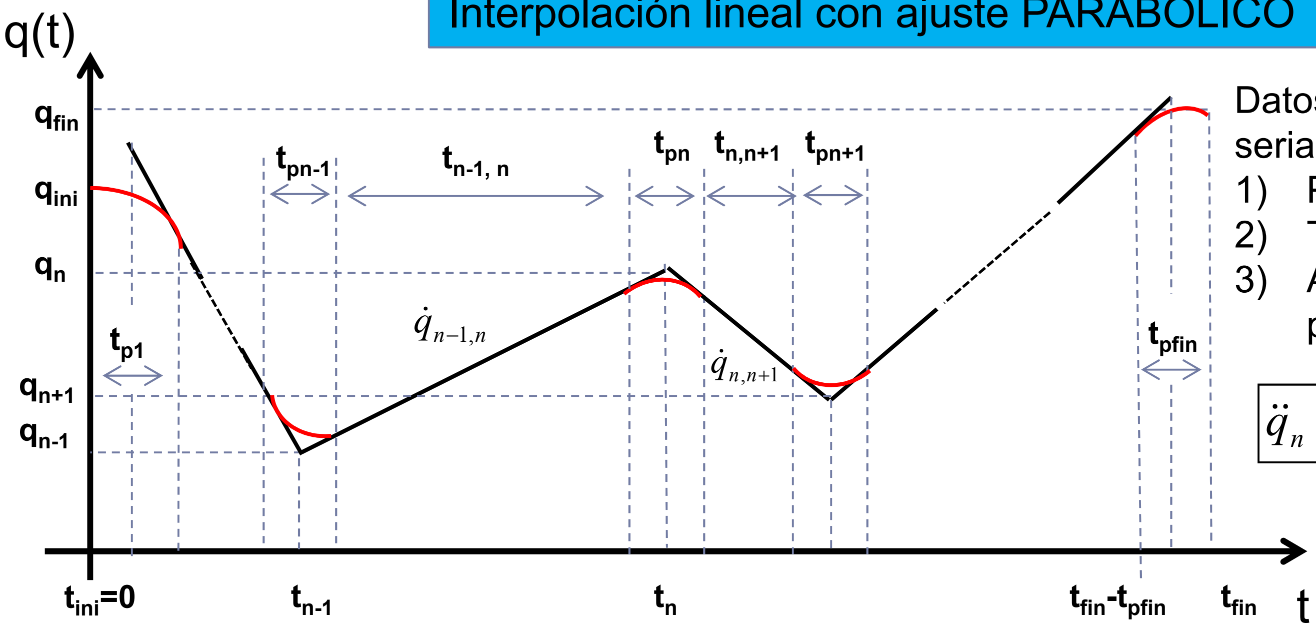
$$t_{n-1,n} = (t_n - t_{n-1}) - 0.5\,t_{pn} - 0.5\,t_{pn-1}$$

Y la velocidad del tramo lineal es:

$$\dot{q}_{n-1,n} = \frac{q_n - q_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$$

Interpolación de trayectoria articular con puntos **INTERMEDIOS**

Interpolación lineal con ajuste PARABÓLICO



Datos requeridos para la interpolación serian:

1) Puntos de paso (q_1 …)
2) Tiempo en esos puntos (t_n …)
3) Aceleración de los tramos parabólicos, que seria:

$$\boxed{\ddot{q}_n = signo\,(\dot{q}_{n,n+1} - \dot{q}_{n-1,n})\left|\ddot{q}_n\right|}$$

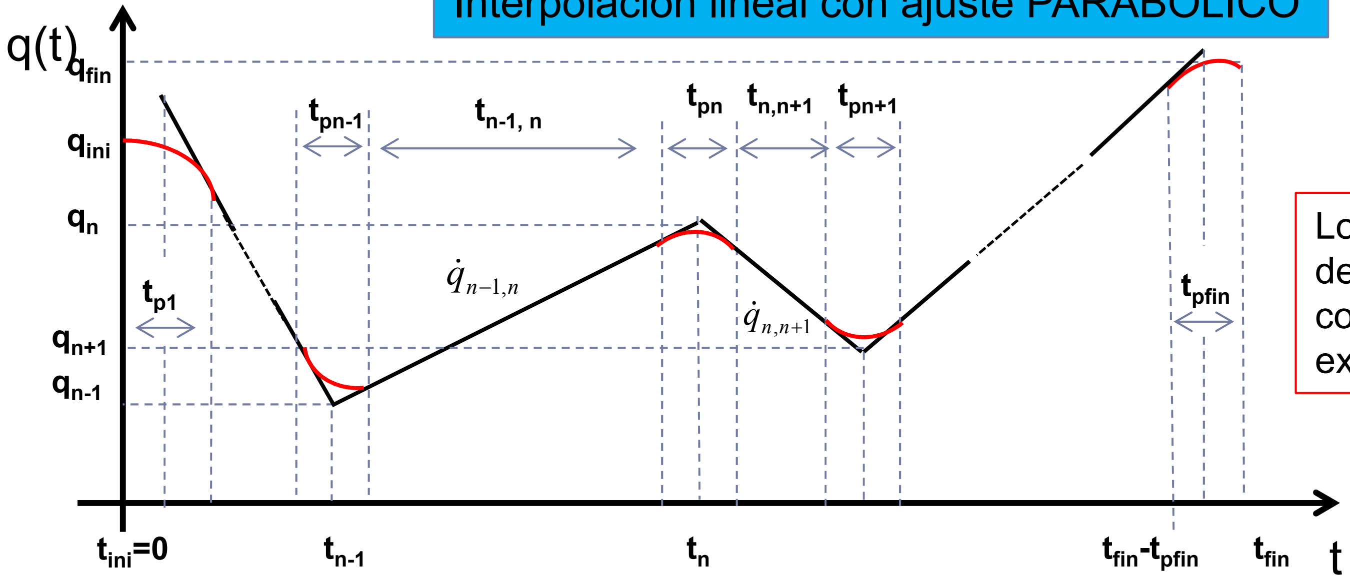
Para tener determinada la trayectoria hay que calcular el tiempo transcurrido durante el tramo parabólico en el que le punto se aproxima a un punto de paso:

$$\boxed{t_{pn} = \frac{\dot{q}_{n,n+1} - \dot{q}_{n-1,n}}{\ddot{q}_n}}$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

Interpolación de trayectoria articular con puntos **INTERMEDIOS**

Interpolación lineal con ajuste PARABÓLICO



Los tramos **inicial y final** deben ser tramos parabólicos completos, esto modifica las expresiones anteriores:

INICIAL

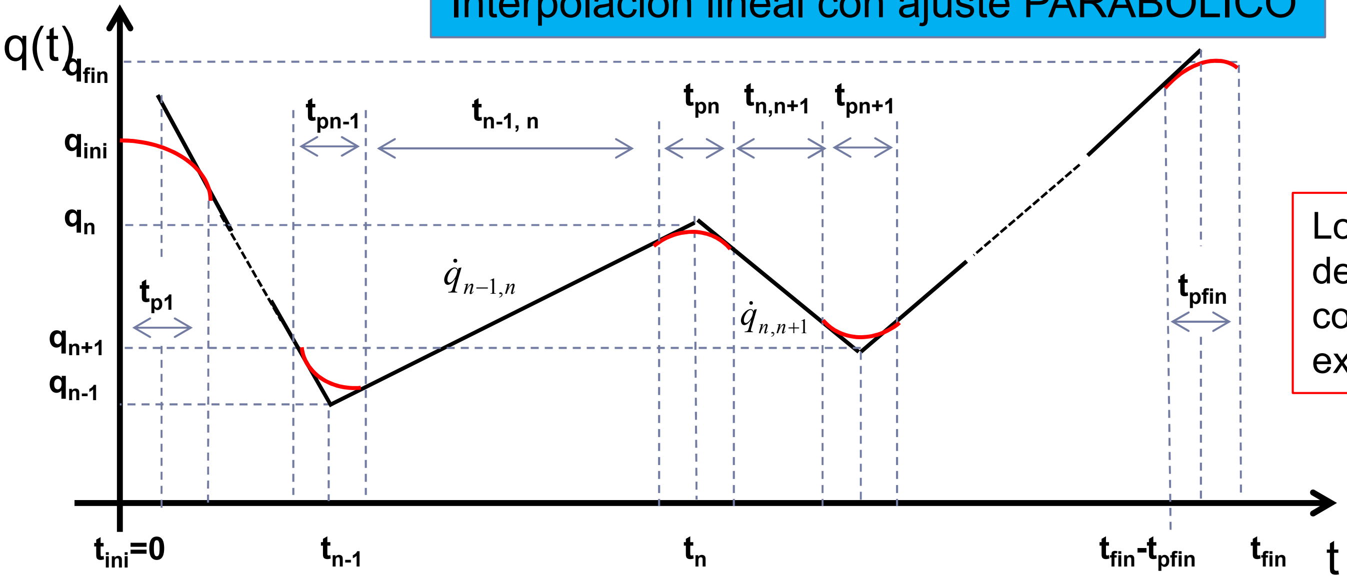
$$t_{1,2} = t_2 - t_{p1} - 0.5\,t_{p2} \qquad t_{p1} = t_2 - \sqrt{t_2^{\,2} - \frac{2\,(q_2 - q_1)}{\ddot{q}_1}}$$

$$\ddot{q}_1 = signo\ (q_2 - q_1)\,|\ddot{q}_1| \qquad \dot{q}_{1,2} = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - 0.5\,t_{p1}}$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

Interpolación de trayectoria articular con puntos **INTERMEDIOS**

Interpolación lineal con ajuste PARABÓLICO



Los tramos **inicial y final** deben ser tramos parabólicos completos, esto modifica las expresiones anteriores:

FINAL

$$t_{fin-1,fin} = t_{fin} - t_{fin-1} - t_{pfin} - 0.5\,t_{n+1}$$

$$t_{p\,fin} = (t_{fin} - t_{fin-1}) - \sqrt{(t_{fin} - t_{fin-1})^2 - \frac{2(q_{fin} - q_{fin-1})}{\ddot{q}_{fin}}}$$

$$\ddot{q}_{fin} = signo\ (q_{fin} - q_{fin-1})\,|\ddot{q}_{fin}|$$

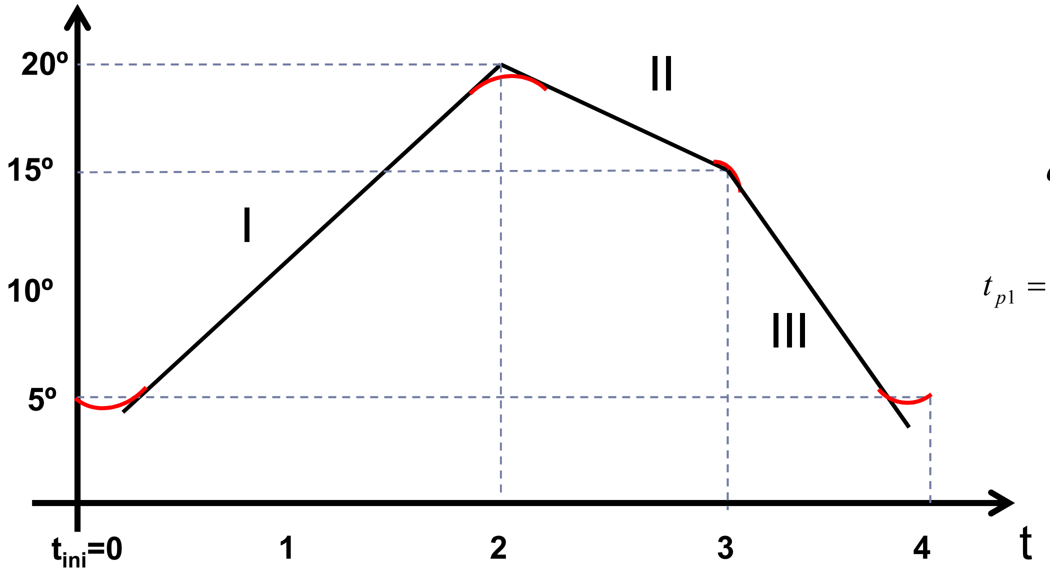
$$\dot{q}_{fin-1,fin} = \frac{q_{fin} - q_{fin-1}}{(t_{fin} - t_{fin-1}) - 0.5\,t_{pfin}}$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

Interpolación de trayectoria articular con puntos **INTERMEDIOS**

Interpolación lineal con ajuste PARABÓLICO

Ejemplo:
Consideremos un robot de una articulación rotacional que pase por los siguientes puntos articulares 5º, 20º, 15º, 5º. Estos puntos se alcanzan en los tiempos 2, 3, 4 s y que la aceleración es de 30º/s². Calcular los parámetros del interpolador con ajuste parabólico necesario. Se consideran las velocidades iniciales y finales cero.



I tramo

Aceleración tramo I parabólico:

$$\ddot{q}_1 = signo\ (q_2 - q_1)\left|\ddot{q}_1\right| = 30\,^{o}/s^2$$

$$t_{p1} = t_2 - \sqrt{{t_2}^2 - \frac{2(q_2 - q_1)}{\ddot{q}_1}} = 2 - \sqrt{2^2 - \frac{2(20-5)}{30}} = 0.268\ s$$

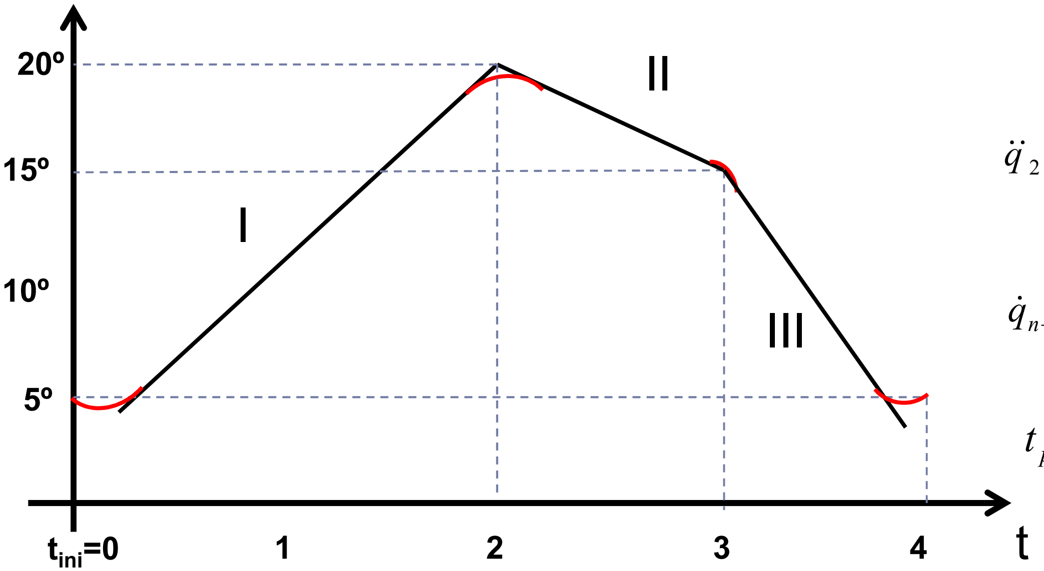
Velocidad lineal tramo I:

$$\dot{q}_{1,2} = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - 0.5t_{p1}} = \frac{20-5}{2 - 0.5\cdot 0.268} = 8.04\,^{o}/s$$

Interpolación de trayectoria articular con puntos **INTERMEDIOS**

Interpolación lineal con ajuste PARABÓLICO

Ejemplo:
Consideremos un robot de una articulación rotacional que pase por los siguientes puntos articulares 5º, 20º, 15º, 5º. Estos puntos se alcanzan en los tiempos 2, 3, 4 s y que la aceleración es de 30º/s². Calcular los parámetros del interpolador con ajuste parabólico necesario. Se consideran las velocidades iniciales y finales cero.



II tramo

Aceleración tramo II parabólico:

$$\ddot{q}_2 = signo\ (\dot{q}_{2,3} - \dot{q}_{1,2})\left|\ddot{q}_2\right| = -30\,^{o}/s^2$$

Velocidad lineal tramo II:

$$\dot{q}_{n-1,n} = \frac{q_n - q_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \rightarrow \dot{q}_{2,3} = \frac{q_3 - q_2}{t_3 - t_2} = \frac{15-20}{3-2} = -5^{o}/s$$

$$t_{pn} = \frac{\dot{q}_{n,n+1} - \dot{q}_{n-1,n}}{\ddot{q}_n} \rightarrow t_{p2} = \frac{\dot{q}_{2,3} - \dot{q}_{1,2}}{\ddot{q}_2} = 0.435\,s$$

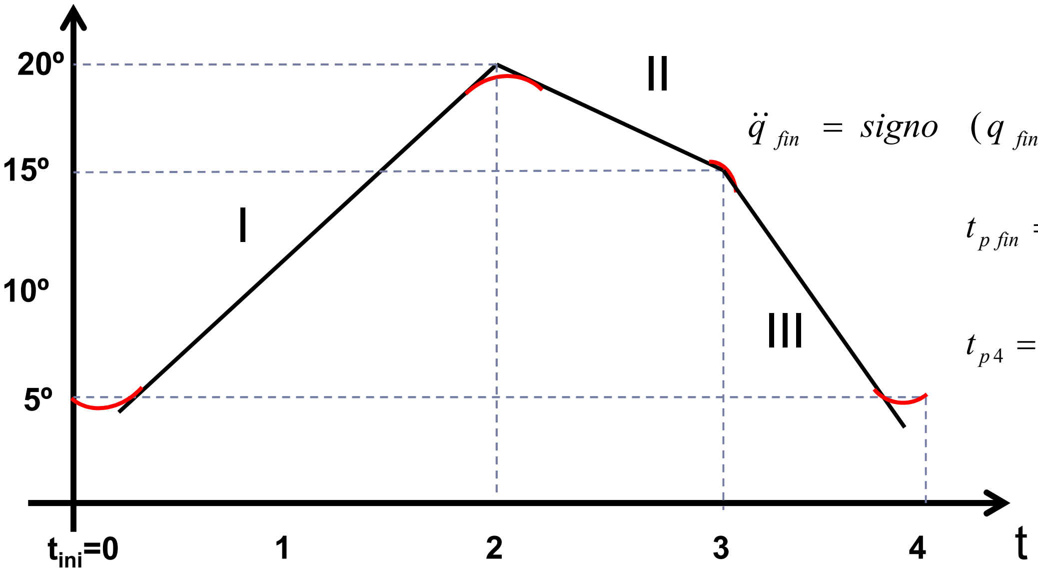
$$t_{1,2} = t_2 - t_{p1} - 0.5\,t_{p2} = 2 - 0.268 - 0.5\cdot 0.435 = 1.514\,s$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

Interpolación de trayectoria articular con puntos **INTERMEDIOS**

Interpolación lineal con ajuste PARABÓLICO

Ejemplo:
Consideremos un robot de una articulación rotacional que pase por los siguientes puntos articulares 5º, 20º, 15º, 5º. Estos puntos se alcanzan en los tiempos 2, 3, 4 s y que la aceleración es de 30º/s^2. Calcular los parámetros del interpolador con ajuste parabólico necesario. Se consideran las velocidades iniciales y finales cero.



Aceleración último tramo parabólico:

$$\ddot{q}_{fin} = signo\ (q_{fin} - q_{fin-1})\left|\ddot{q}_{fin}\right| = signo\ (q_4 - q_3)\left|\ddot{q}_4\right| = -30\ ^{o}/s^2$$

$$t_{p\,fin} = (t_{fin} - t_{fin-1}) - \sqrt{(t_{fin} - t_{fin-1})^2 - \frac{2\,(q_{fin} - q_{fin-1})}{\ddot{q}_{fin}}} =$$

$$t_{p4} = (4-3) - \sqrt{(4-3)^2 - \frac{2\,(5-15)}{-30}} = 0.423\ s$$

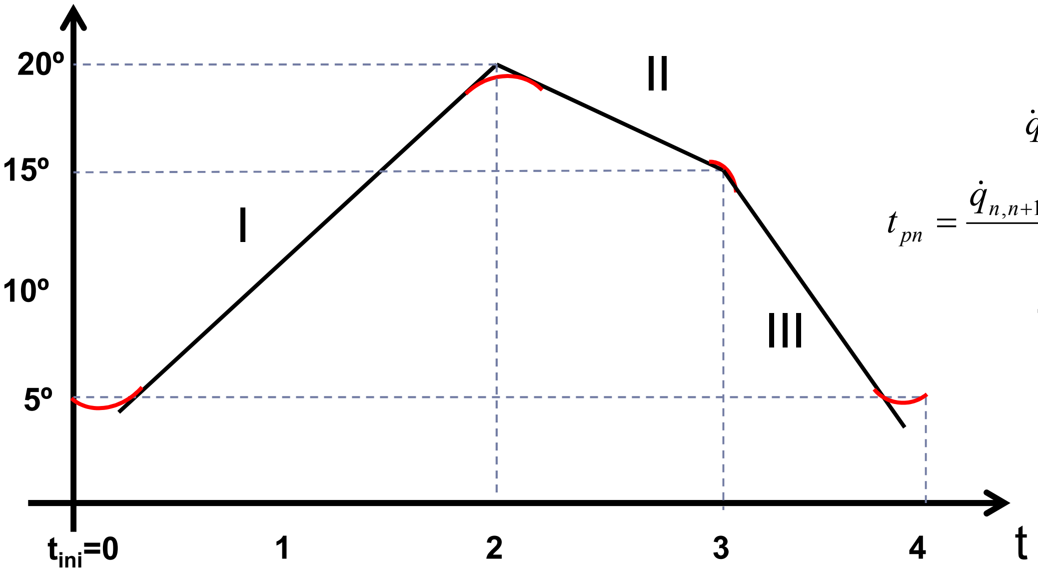
Velocidad último tramo lineal:

$$\dot{q}_{3,4} = \frac{q_4 - q_3}{(t_4 - t_3) - 0.5\,t_{p4}} = \frac{-10}{1 - 0.5 \cdot 0.423} = -12.68\ ^{o}/s$$

Interpolación de trayectoria articular con puntos **INTERMEDIOS**

Interpolación lineal con ajuste PARABÓLICO

Ejemplo:
Consideremos un robot de una articulación rotacional que pase por los siguientes puntos articulares 5º, 20º, 15º, 5º. Estos puntos se alcanzan en los tiempos 2, 3, 4 s y que la aceleración es de 30º/s². Calcular los parámetros del interpolador con ajuste parabólico necesario. Se consideran las velocidades iniciales y finales cero.



Aceleración penúltimo tramo parabólico:

$$\ddot{q}_3 = signo\ (\dot{q}_{3,4} - \dot{q}_{2,3})\,|\ddot{q}_3| = -30\ º/s^2$$

$$t_{pn} = \frac{\dot{q}_{n,n+1} - \dot{q}_{n-1,n}}{\ddot{q}_n} \rightarrow t_{p3} = \frac{\dot{q}_{3,4} - \dot{q}_{2,3}}{\ddot{q}_3} = \frac{-12.68-(-5)}{-30} = 0.256\,s$$

Tiempos del tercer y cuarto tramo lineal:

$$t_{n-1,n} = (t_n - t_{n-1}) - 0.5\,t_{pn} - 0.5\,t_{pn-1}$$

$$t_{2,3} = (t_3 - t_2) - 0.5\,t_{p3} - 0.5\,t_{p2} = 0.654\,s$$

$$t_{3,4} = (t_4 - t_3) - 0.5\,t_{p4} - 0.5\,t_{p3} = 0.66\,s$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

Control del movimiento en el espacio articular

Para que el extremo del robot describa una trayectoria, es necesario que cada articulación siga una trayectoria determinada. Por tanto, se puede controlar el movimiento del robot en el espacio articular puesto que son conocidas las referencias de cada una de las trayectorias.

TIPOS DE CONTROL

Control desacoplado o monoarticular

Se considera el modelo del robot compuesto por una ***superposición de articulaciones independientes,*** *sin tener en cuenta la interacción entre ellas. En este caso el modelo dinámico empleado es el de un accionador (motor eléctrico).*
La desventaja principal es la influencia del movimiento de una articulación en las siguientes y en consecuencia en el movimiento global.

Control multiarticular

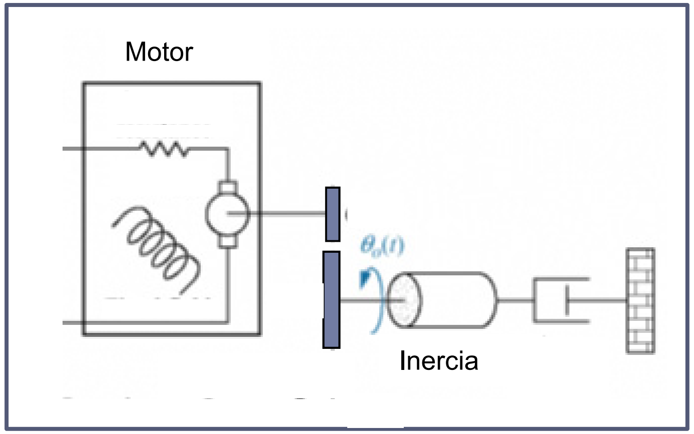
Se considera un modelo del robot en el que se considera ***el modelo dinámico global*** *del robot. Esto es,* ***tiene en cuenta el movimiento de todas las articulaciones*** *entre si. Analíticamente la resolución del problema es mas compleja*

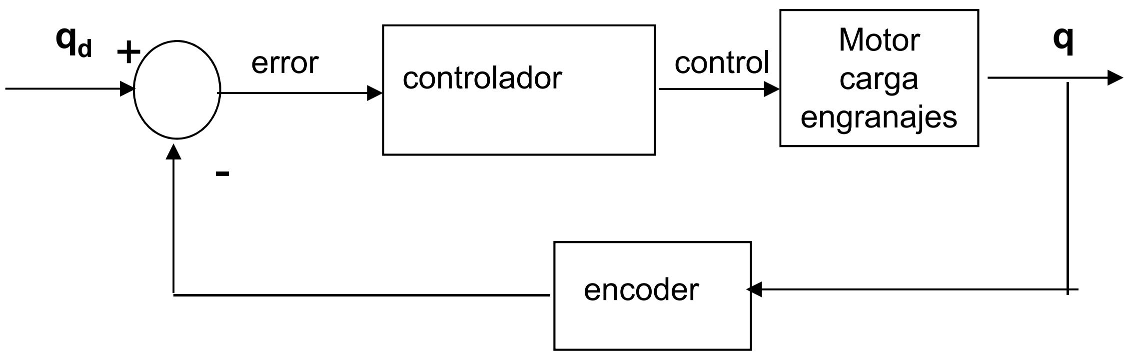
Control del movimiento en el espacio articular

Control monoarticular

En este caso el planificador de trayectorias genera las correspondientes trayectorias para cada una de las articulaciones por separado, obteniéndose en cada acaso los puntos de referencia necesarios para generar el movimiento de cada articulación de forma independiente. Los accionadores mas utilizados en Robótica son los **motores de corriente continua**.

El modelo dinámico de un motor de corriente continua y el diagrama de bloques seria el siguiente :





Jon Legarreta / Raquel Martinez

Control del movimiento en el espacio articular

Control Multiarticular

Para realizar un control preciso del robot es necesario modelarlo como un sistema MIMO (Múltiple Input Multiple Output). Teniendo en cuenta los **vectores de posición, velocidad y aceleración** de las articulaciones, el controlador enviara un **vector de señales de control (ley de control)** para accionar cada uno de los motores articulares.

Recordando la **ecuación de movimiento** obtenida anteriormente: $\boxed{D(q)\cdot\ddot{q}+C(q,\dot{q})\cdot\dot{q}+g(q)=\tau}$

Inercia Coriolis gravedad

Y utilizando un controlador **PD** (Proporcional-Deribativo), la ley de control quedaría de la siguiente manera para un robot de n grados de libertad: $\tau = K_p(q_d - q) + K_v(\dot{q}_d - \dot{q}) = D(q)\cdot\ddot{q}+C(q,\dot{q})\cdot\dot{q}+g(q)$

Donde **Kp** y **Kv** son matrices nxn, correspondiente al controlador PD.

Diagrama de bloques del sistema del control: