# TEMA 5. MODELADO GEOMÉTRICO Y CINEMÁTICO DEL ROBOT

ROBÓTICA

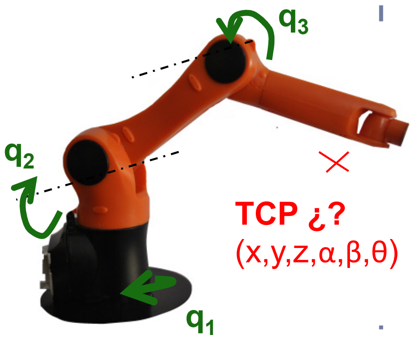
# ÍNDICE

# INTRODUCCIÓN

## CINEMÁTICA DE **POSICION**

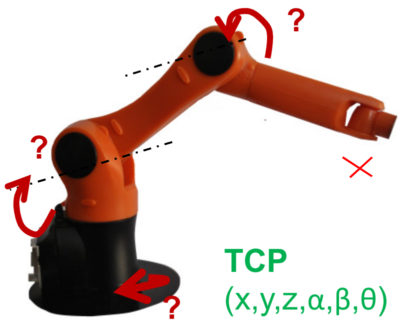
*Calculo de **coordenadas articulares** respecto de la localizacion en el espacio y viceversa.*

### DIRECTA




**Geométrico** **D-H**

### INVERSA



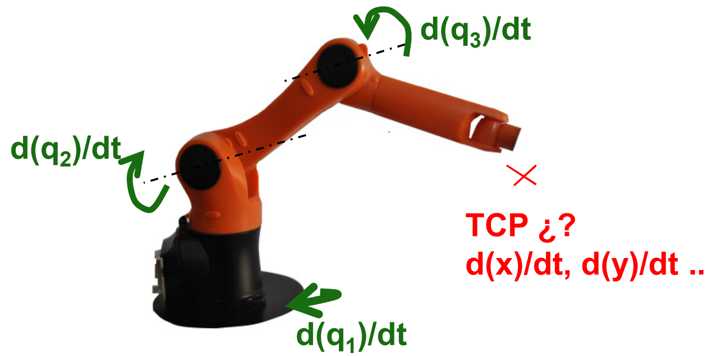

**Geométrico** **Algebraico** **Desacoplo**

## CINEMÁTICA DE **MOVIMIENTO**

*Calculo de **velocidades angulares y lineales** de los distintos componentes del robot (articulaciones, eslabones etc…) respecto de velocidades articulares y viceversa.*

### ECUACIONES DE PROPAGACIÓN

### MATRIZ JACOBIANA (Directa e inversa)



# INTRODUCCIÓN

- Un robot industrial esta destinado a realizar una función con una herramienta determinada.
- Para ello es necesario localizar (posicionar y orientar) el terminal del robot en cada instante.
- **La localización del terminal repercute en el movimiento del resto de sus articulaciones.**

# CINEMÁTICA DE POSICIÓN

La **cinemática** del robot estudia el **movimiento** del mismo con **respecto a un sistema de referencia fijo** sin considerar las fuerzas y momentos que originan dicho movimiento.

- Busca las relaciones entre la **localización** (posición y orientación) del extremo del robot y los valores de sus **coordenadas articulares.**
- Busca las relaciones entre las **velocidades** del movimiento de las articulaciones y el **extremo** (modelo diferencial – matriz Jacobiana).

# CINEMÁTICA DE POSICIÓN

**Cinemática DIRECTA**

Determina la localización del extremo del robot, con respecto a un sistema de coordenadas de referencia, <u>conocidos los valores de las articulaciones</u> y los parámetros geométricos de los elementos del robot.

**Cinemática INVERSA**

<u>Conocida la localización del robot</u>, determina cual debe ser la configuración del robot (articulaciones y parámetros geométricos).

Desde el punto de vista de la robótica, el problema cinemático inverso es más complejo.


Jon Legarreta / Raquel Martinez

# CINEMÁTICA DE POSICIÓN

**Valores de las coordenadas articulares**

$(q_1, q_2, \ldots .q_n)$

**Cinemática DIRECTA** →

← **Cinemática INVERSA**

**Localización del extremo del robot**

$(x, y, z, \alpha, \beta, \Upsilon)$

$x = f_x(q_1, q_2, \ldots .q_n)$
$y = f_y(q_1, q_2, \ldots .q_n)$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\Upsilon = f_\Upsilon(q_1, q_2, \ldots .q_n)$

$q_1 = f_1(x, y, z, \alpha, \beta, \Upsilon)$
$q_2 = f_2(x, y, z, \alpha, \beta, \Upsilon)$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$
$q_n = f_n(x, y, z, \alpha, \beta, \Upsilon)$

# CINEMÁTICA DE POSICIÓN DIRECTA

- Formas de abordar el problema cinemático directo:

**Métodos geométricos**

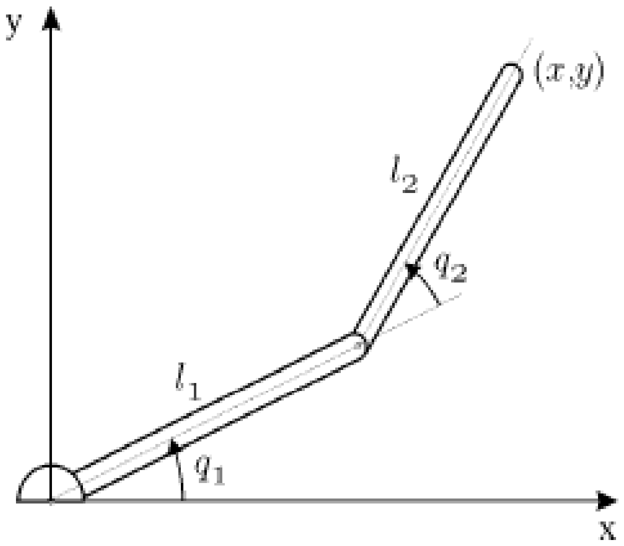
- Método no sistemático (aplicación limitada a robots con pocos grados de libertad).
- Utiliza relaciones geométricas para obtener directamente la posición del extremo del robot en función de las variables articulares.
- Requiere buena visión espacial

**Métodos basados en cambios de sistemas de referencia**

- Método sistemático (Adopta determinadas convenciones para resolver el modelo, independientemente de las características geométricas del robot).
- Utiliza las **matrices de transformación homogénea** => Método de Denavit Hartenberg (1955)

# CINEMÁTICA DIRECTA: MÉTODO GEOMÉTRICO

- Es un método no sistemático que utiliza las relaciones geométricas para obtener la posición del extremo del robot.
- Normalmente se emplea para la obtención de la posición y no de la orientación
- Se usan en robots de pocos grados de libertad.




Para un brazo con dos GDL:

$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1+q_2)$$

$$y = l_1 \operatorname{sen} q_1 + l_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2)$$


Jon Legarreta / Raquel Martinez

# CINEMÁTICA DIRECTA: MTH

Un robot se puede considerar como una **cadena cinemática** formada por objetos rígidos (**eslabones**) unidos entre sí por **articulaciones**.

- Si se establece un sistema de referencia fijo en la base del robot y se describe la localización de cada eslabón con respecto a dicho sistema de referencia.

$$\Downarrow$$

- Se puede encontrar una matriz de transformación homogénea T que:
  - Será función de las coordenadas articulares.
  - Relacione la localización del extremo del robot respecto al sistema de referencia fijo.

# CINEMÁTICA DIRECTA: MTH

- A cada eslabón se le asocia un sistema de referencia solidario.
- Es posible representar las traslaciones y rotaciones relativas entre los distintos eslabones.
- La matriz ${}^{i-1}_{i}A$ representa la posición y orientación relativa entre los stmas asociados a dos eslabones consecutivos del robot.
- La cadena cinemática del robot se puede representar parcial o totalmente, concatenando las matrices A:
  - $${}^{0}_{i}T = {}^{0}_{1}A \; {}^{1}_{2}A \; {}^{2}_{3}A ..... \; {}^{i-1}_{i}A$$
- Existe un método sistemático para situar los sistemas de coordenadas asociados a cada eslabón y obtener la cadena cinemática del robot. Método de Denavit-Hatenberg (1955).

**Algoritmo Denavit-Hartenberg:**

## Asignación de sistemas de referencia

- Seguir las reglas de D-H.

## Identificación de los parámetros D-H

- Tabla: $\theta_i$, $d_i$, $a_i$, $\alpha_i$.

## Obtención de las matrices

- Para cada fila de la tabla anterior.

$$ {}^{i-1}_{i}A = \begin{bmatrix} C\theta i & -C\alpha i\, S\theta i & S\alpha i\, S\theta i & ai\ C\theta i \\ S\theta i & C\alpha i C\ \theta i & -S\alpha i C\ \theta i & ai\ S\theta i \\ 0 & S\alpha i & C\alpha i & di \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

## Matrices de localización del….

- …extremo del robot respecto a la base.

$$ {}^{0}_{i}T = {}^{0}_{1}A\ {}^{1}_{2}A\ {}^{2}_{3}A \ldots\ {}^{i-1}_{i}A $$

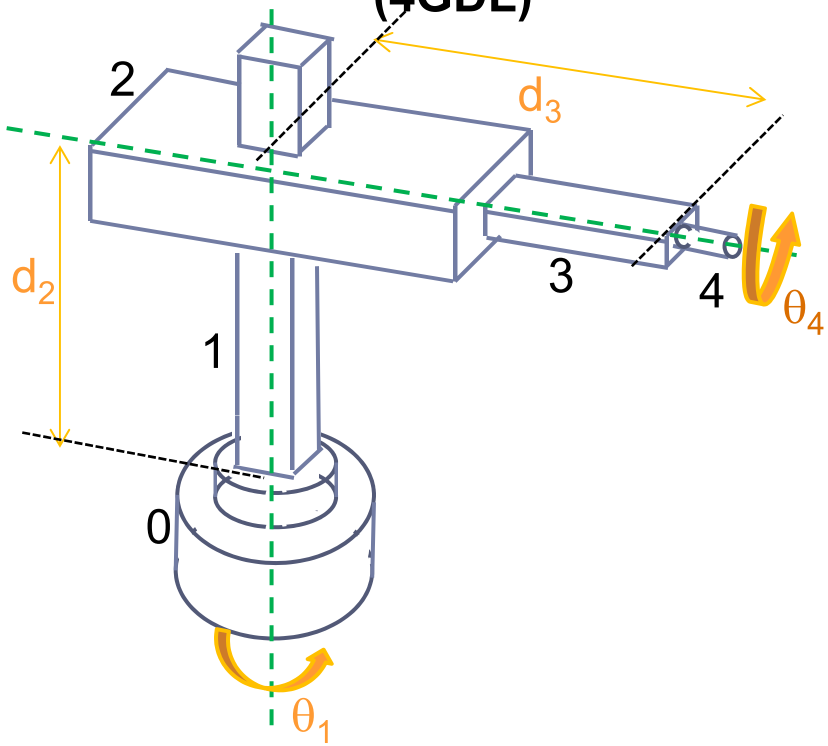
Algoritmo D-H:

**Asignación de Sistemas de Referencia**

- D-H1: Numerar los eslabones desde 1 hasta n (n=GLD). Se numerará como elemento 0 la base del robot.
- D-H2: Numerar cada articulación desde 1 hasta n.
- D-H3: Localizar los ejes de las articulaciones. Si ésta es rotativa, el eje será el propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

Ejemplo:

**Modelado cinematico directo robot cilindrico (4GDL)**





Jon Legarreta / Raquel Martinez

# CINEMÁTICA DIRECTA: MTH

Algoritmo D-H:

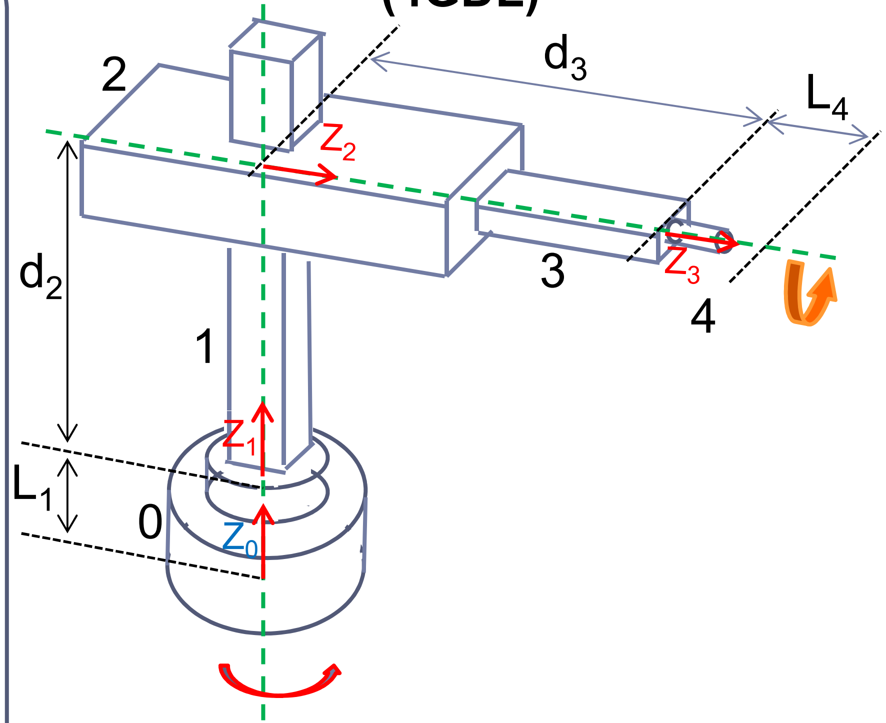
**Asignación de Sistemas de Referencia**

Establecer el sistema de referencia de cada elemento i

- D-H4: Para i de 0 a n-1, situar el eje Zi sobre el eje de la articulación i+1.

Ejemplo:

**Modelado cinematico directo robot cilindrico (4GDL)**






Jon Legarreta / Raquel Martinez

Algoritmo D-H:

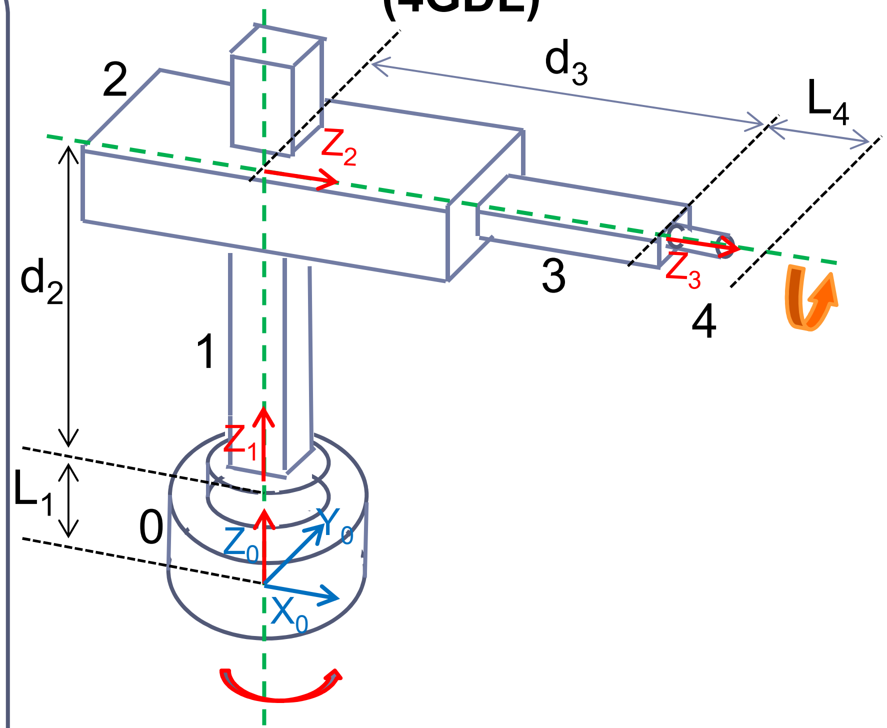
**Asignación de Sistemas de Referencia**

Establecer el sistema de referencia de cada elemento i

- D-H4: Para i de 0 a n-1, situar el eje Zi sobre el eje de la articulación i+1.
- D-H5: Situar el origen del sistema base So en cualquier punto del eje Z0 (eje de la articulacion 1). Los ejes X0 e Y0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con Z0.

Ejemplo:

**Modelado cinematico directo robot cilindrico (4GDL)**



Algoritmo D-H:

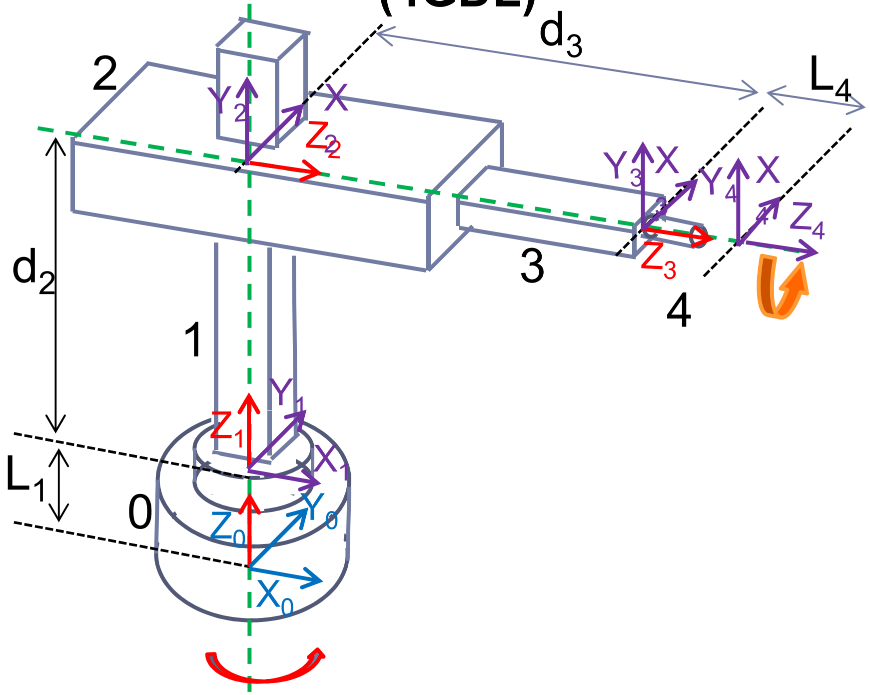
**Asignación de Sistemas de Referencia**

Establecer el sistema de referencia de cada elemento i

- D-H4: Para i de 0 a n-1, situar el eje Zi sobre el eje de la articulación i+1.
- D-H5: Situar el origen del sistema base So en cualquier punto del eje Z0 (eje de la articulacion 1). Los ejes X0 e Y0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con Z0.
- D-H6: Para i de 1 a n-1, situar el sistema Si (solidario al elemento i) en la intersección del eje Zi con la línea normal común a Zi-1 y Zi. Si ambos ejes se cortasen se situaría Si en el punto de corte. Si fuesen paralelos se situaría en la articulación i+1.
- D-H7: Situar Xi en la línea normal común al eje Zi-1y Zi. Si los ejes se cortan se sitúa perpendicular al plano formado por Zi-1y Zi. Situar Xi en la línea normal al eje Zi-1, lo corta y apunta hacia afuera de él.
- D-H8: Situar Yi de modo que forme un sistema dextrógiro con Xi y Zi.
- D-H9: Situar el sistema {Sn} en el extremo del robot de modo que Zn coincida con la dirección de Zn-1 y Xn sea normal a Zn-1 y Zn.

Ejemplo:

**Modelado cinematico directo robot cilindrico (4GDL)**



## Algoritmo D-H:

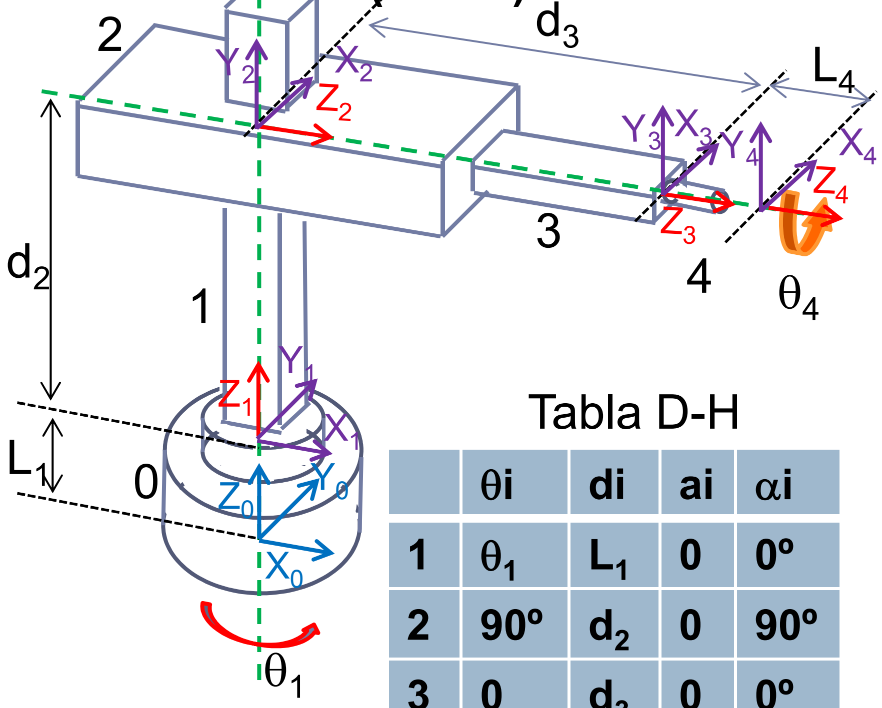
## Identificación parámetros D-H

Crear una tabla con los parámetros de Denavit-Hartenberg:

- D-H10: Obtener **$\theta i$** como el ángulo que hay que girar en torno a Zi-1 para que Xi-1 y Xi queden paralelos.
- D-H11: Obtener **di** como la distancia medida a lo largo de Zi-1, que habría que desplazar {Si-1} para que Xi y Xi-a quedasen en el mismo plano.
- D-H12:Obtener **ai** como la distancia medida a lo largo de Xi (que ahora coincidiría con Xi-1) que habría que desplazar el nuevo {Si-1} para que su origen coincidiese con {Si}.
- D-H13:Obtener $\alpha i$ como el ángulo que habría que girar entorno a Xi (que ahora coincidiría con Xi-1) para que el nuevo {Si-1} coincidiese totalmente con {Si}.

## Ejemplo:

## Modelado cinematico directo robot cilindrico (4GDL)




### Tabla D-H

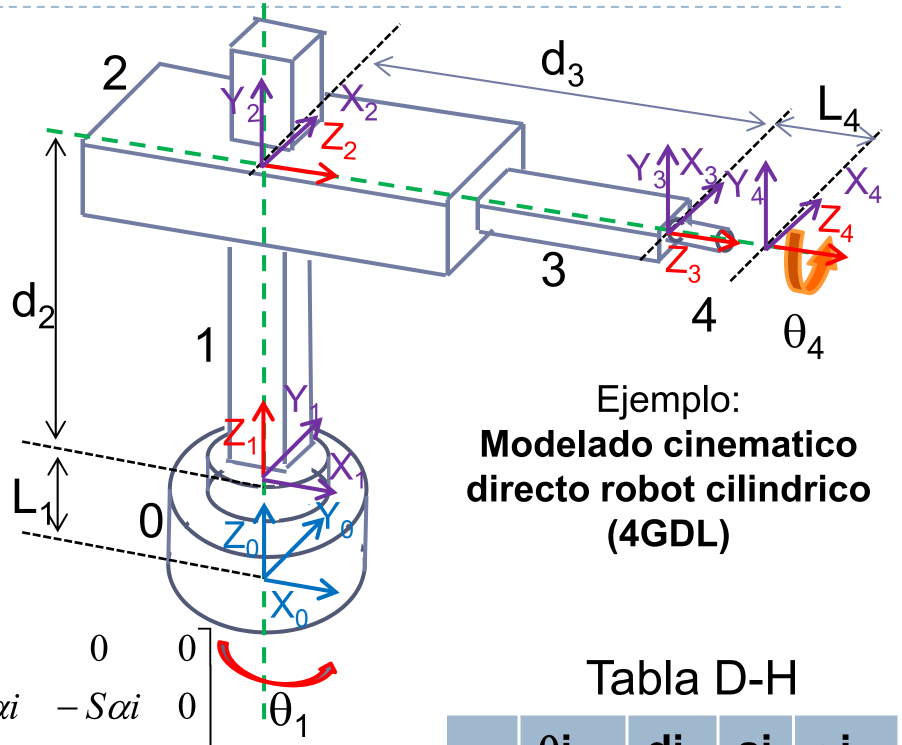
| | $\theta i$ | di | ai | $\alpha i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\theta_1$ | $L_1$ | 0 | 0º |
| 2 | 90º | $d_2$ | 0 | 90º |
| 3 | 0 | $d_3$ | 0 | 0º |
| 4 | $\theta_4$ | $L_4$ | 0 | 0º |

Algoritmo D-H:

**Formar las Matrices Homogéneas**

- D-H14: Obtener las matrices de transformación $^{i-1}A_i$

  *Rotación* $\boldsymbol{\theta i}$ *del Zi-1, seguida de translación* ***di*** *(a lo largo de Zi-1, posteriormente translación* ***ai*** *(a lo largo Xi y finalmente rotación* $\boldsymbol{\alpha i}$ *respecto de Xi :*




Ejemplo:
**Modelado cinematico directo robot cilindrico (4GDL)**

$$^{i-1}_{i}A = T(Zi-1,\vartheta i)T(di)T(ai)T(xi,\alpha i) =$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta i & -S\theta i & 0 & 0 \\ S\theta i & C\theta i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & di \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ai \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha i & -S\alpha i & 0 \\ 0 & S\alpha i & C\alpha i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{i-1}_{i}A = \begin{bmatrix} C\theta i & -C\alpha i\, S\theta i & S\alpha i\, S\theta i & ai\, C\theta i \\ S\theta i & C\alpha i C\theta i & -S\alpha i C\theta i & ai\, S\theta i \\ 0 & S\alpha i & C\alpha i & di \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabla D-H

| | θi | di | ai | αi |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $\theta_1$ | $L_1$ | **0** | **0º** |
| **2** | **90º** | $d_2$ | **0** | **90º** |
| **3** | **0** | $d_3$ | **0** | **0º** |
| **4** | $\theta_4$ | $L_4$ | **0** | **0º** |

## Algoritmo D-H: **Formar las Matrices Homogéneas**

$$ {}^{i-1}_{\;i}A = \begin{bmatrix} C\theta i & -C\alpha i\, S\theta i & S\alpha i\, S\theta i & ai\, C\theta i \\ S\theta i & C\alpha i C\theta i & -S\alpha i C\theta i & ai\, S\theta i \\ 0 & S\alpha i & C\alpha i & di \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Tabla D-H

| | θi | di | ai | αi |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\theta_1$ | $L_1$ | 0 | 0º |
| 2 | 90º | $d_2$ | 0 | 90º |
| 3 | 0 | $d_3$ | 0 | 0º |
| 4 | $\theta_4$ | $L_4$ | 0 | 0º |

$$ {}^{0}_{1}A = \begin{bmatrix} C\theta 1 & -S\theta 1 & 0 & 0 \\ S\theta 1 & C\theta 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{1}_{2}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{2}_{3}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{3}_{4}A = \begin{bmatrix} C\theta 4 & -S\theta 4 & 0 & 0 \\ S\theta 4 & C\theta 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

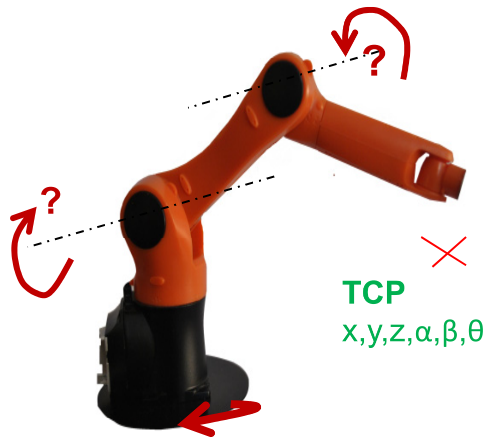
- D-H15: Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot ${}^{0}T_4 = {}^{0}A_1\, {}^{1}A_2\, {}^{2}A_3\, {}^{3}A_4$.

$$ {}^{0}_{4}T = {}^{0}_{1}A\, {}^{1}_{2}A\, {}^{2}_{3}A\, {}^{3}_{4}A = \begin{bmatrix} -S\theta 1 C\theta 4 & S\theta 1 S\theta 4 & C\theta 1 & C\theta 1(d3+L4) \\ C\theta 1 C\theta 4 & -C\theta 1 S\theta 4 & S\theta i & S\theta 1(d3+L4) \\ S\theta 4 & C\theta 4 & 0 & d2+L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

**La matriz T define la orientación y posición del extremo referido a la base en función de las n coordenadas articulares.**

## PROBLEMA CINEMATICO INVERSO

Conocida la localización del robot, determina cual debe ser la configuración del robot (articulaciones y parámetros geométricos).




1) La resolución del problema no es sistemático.
2) Depende fuertemente de la configuración del robot
3) Es encontrar la siguiente relación explicita (solución cerrada):

$$q_k=f(x,y,z,\alpha,\beta,\Upsilon) \quad k=1\ldots n \text{ (GDL)}$$

4) No existe siempre solución cerrada.
   Condiciones para que exista solución cerrada:
   a) 3 ejes de articulación adyacentes interseccionan en un punto (robot PUMA y stanford).
   b) 3 ejes de articulación adyacentes son paralelos entre si (ASEA, etc.).

**Soluciones cerradas**

**Geometrico**

**Algebraico**

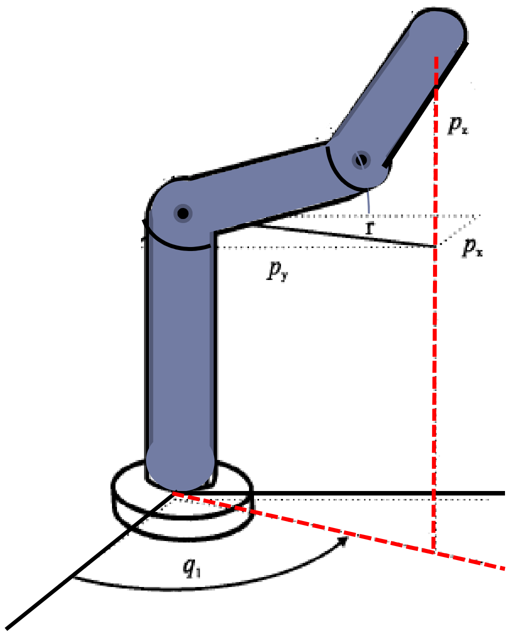
**Desacoplo**

# CINEMÁTICA INVERSA: MÉTODO GEOMÉTRICO

Se basan en descomponer la cadena cinemática en distintos planos geométricos y resolviendo por trigonometría cada plano. Se trata de encontrar el numero suficiente de relaciones geométricas para posicionar el extremo del robot. Se utiliza para las primeras articulaciones.

## Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

Datos: Px, Py, Pz donde se quiere situar el extremo del robot.




$$\boxed{q_1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}$$

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}$$

$$\sin q_3 = \pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

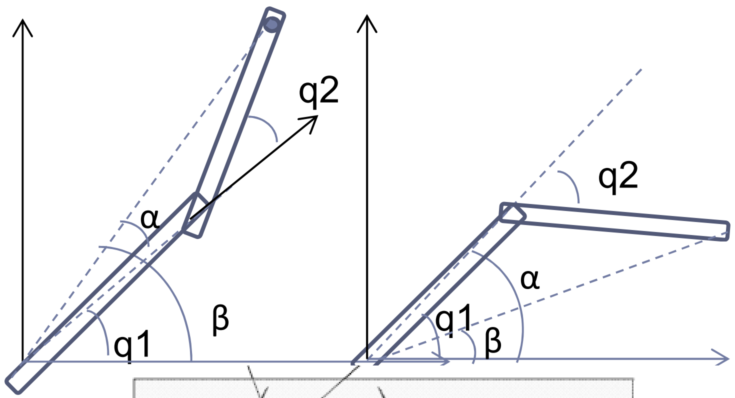
$$\boxed{q_3 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right)}$$

a articulación $q_2$ tiene dos soluciones: (codo arriba y codo abajo):

$$q_2 = \beta - \alpha$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{p_z}{r}\right) = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$




$$\boxed{q_2 = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) - \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)}$$

# CINEMÁTICA INVERSA: MATRICES HOMOGÉNEAS

Se basan en manipular las ecuaciones resultantes obtenidas a partir del modelo Cinematico Directo:

Esto es, despejar las n variables $\mathbf{q_i}$ en función de los vectores **n, o, a, p:**

Utilizando las **Matrices de Transformación Homogénea**, operamos de la siguiente forma:

$$ {}^{0}_{n}T = {}^{0}_{1}A\, {}^{1}_{2}A\, {}^{2}_{3}A \cdots {}^{n-1}_{n}A $$

$$ \left({}^{0}_{1}A\right)^{-1}\, {}^{0}_{n}T = {}^{1}_{2}A\, {}^{2}_{3}A \cdots {}^{n-1}_{n}A \Rightarrow depejamos \quad q_1 $$

$$ \left({}^{1}_{2}A\right)^{-1}\left({}^{0}_{1}A\right)^{-1}\, {}^{0}_{n}T = {}^{2}_{3}A \cdots {}^{n-1}_{n}A \Rightarrow depejamos \quad q_2 $$

$$ \vdots $$

$$ \left({}^{2}_{3}A\right)^{-1}\left({}^{0}_{1}A\right)^{-1}\, {}^{0}_{n}T = \cdots {}^{n-1}_{n}A \Rightarrow depejamos \quad q_{n-1} \ y \ q_n $$

$$ {}^{0}_{n}T(q_1,..,q_n) = \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{o} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Consideraciones:
Se trata de igualar elementos de ambos lados de cada ecuación, tomando los casos en los que solo aparezca una variable de articulación, empleando identidades trigonométricas y buscando divisiones en función de arco tangentes.

# CINEMÁTICA INVERSA: MATRICES HOMOGÉNEAS

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

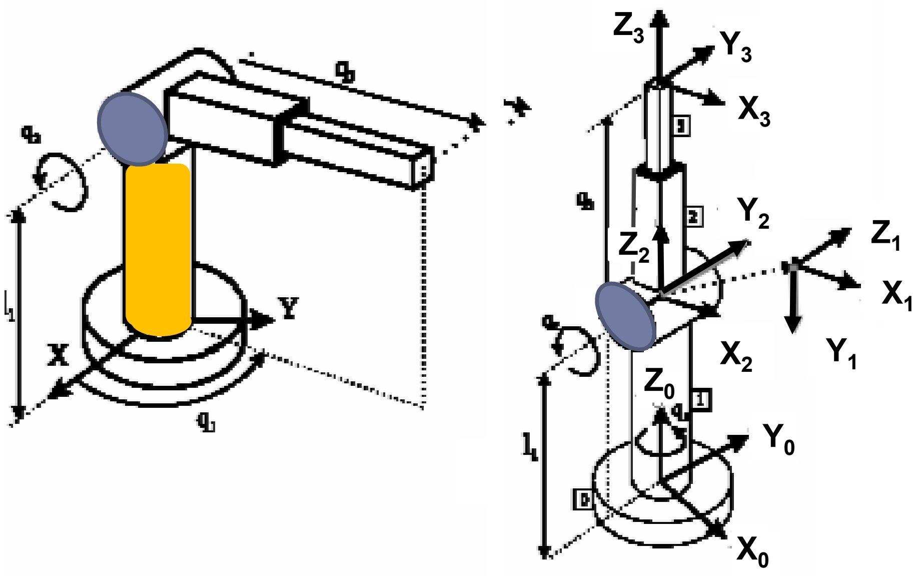



Tabla D-H

| | θi | di | ai | αi |
|---|---|---|---|---|
| **1** | **q1** | **$L_1$** | **0** | **-90º** |
| **2** | **q2** | **0** | **0** | **90º** |
| **3** | **0** | **q3** | **0** | **0º** |

MTH:

$${}^{0}_{1}A = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & -Cq1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{1}_{2}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Cq}2 & 0 & -\boldsymbol{Sq}2 & 0 \\ \boldsymbol{Sq}2 & 0 & \boldsymbol{Cq}2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{2}_{3}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{q}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# CINEMÁTICA INVERSA: MATRICES HOMOGÉNEAS

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

$$ {}^0_3T = {}^0_1A\,{}^1_2A\,{}^2_3A $$

$$ \left({}^0_1A\right)^{-1}\,{}^0_nT = {}^1_2A\,{}^2_3A \Rightarrow despejamos \quad q_1 $$

px py pz DATOS (Posición del terminal)

$$ \left({}^0_1A\right)^{-1}\,{}^0_nT = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & -Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & Cq1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & Sq2 & 0 \\ Sq2 & 0 & -Cq2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ \left({}^0_1A\right)^{-1}\,{}^0_nT = \begin{bmatrix} Cq1 & Sq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L1 \\ -Sq1 & Cq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & Sq2 & \boxed{Sq2\,q3} \\ Sq2 & 0 & -Cq2 & -Cq2\,q3 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ -p_x\,Sq1 + p_y\,Cq1 = 0 \Rightarrow \frac{Sq1}{Cq1} = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \boxed{q1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)} $$

# CINEMÁTICA INVERSA: MATRICES HOMOGÉNEAS

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

$$\left({}^{1}_{2}A\right)^{-1}\left({}^{0}_{1}A\right)^{-1}\,{}^{0}_{3}T = {}^{2}_{3}A \Rightarrow despejamos \quad q_2 \quad y \quad q_3$$

$$\left({}^{1}_{2}A\right)^{-1}\left({}^{0}_{1}A\right)^{-1}\,{}^{0}_{n}T = \begin{bmatrix} Cq2 & Sq2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -Sq2 & Cq2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Cq1 & Sq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L1 \\ -Sq1 & Cq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left({}^{1}_{2}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\left({}^{0}_{1}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\,{}^{0}_{n}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Cq2Cq1} & \boldsymbol{Cq2Sq1} & \boldsymbol{Sq2} & \boldsymbol{-L1Sq2} \\ \boldsymbol{-Sq1} & \boldsymbol{Cq1} & 1 & 0 \\ \boldsymbol{-Sq2Cq1} & \boldsymbol{-Sq2Sq1} & \boldsymbol{Cq2} & \boldsymbol{-L1Cq2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{n_x} & \boldsymbol{o_x} & \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{p_x} \\ \boldsymbol{n_y} & \boldsymbol{o_y} & \boldsymbol{a_y} & \boldsymbol{p_y} \\ \boldsymbol{n_z} & \boldsymbol{o_z} & \boldsymbol{a_z} & \boldsymbol{p_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{q3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PxCq2Cq1 + PySq1Cq2 + PzSq2 - L1Sq2 = 0 \Rightarrow -\frac{Sq2}{Cq2} = \frac{PxCq1+PySq1}{Pz-L1} \Rightarrow \boxed{q2 = \arctan\left(-\frac{PxCq1+PySq1}{Pz-L1}\right)}$$

$$\boldsymbol{-Sq2Cq1Pz - Sq2Sq1Py + PzCq2 - L1Cq2 = q3} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{q3 = Cq2(Pz-L1) - Sq2(Cq1Pz + Sq1Py)}}$$

# CINEMÁTICA INVERSA: DESACOPLO CINEMÁTICO

Se basan en al resolución independiente de los grados de libertad que posicionan (3) y de los que orientan la muñeca (3).
Por lo que el problema cinemático inverso se divide en dos subproblemas:

1. Resolver las tres primeras articulaciones de posición.
2. Resolver las tres ultimas articulaciones que corresponden a la muñeca.

**El método de resolución**:

1) A partir de la posición y orientación que se busca [n,o,a,p], se obtiene el punto de corte de los 3 últimos grados de libertad (punto de muñeca Pm).
2) Se resuelve el problema cinemático inverso para el brazo de 3 GDL ($q_1$,$q_2$,$q_3$) que llega hasta la **Pm** (desde la base).
3) Se resuelve el problema cinemático inverso que va desde **Pm** hasta el punto final pf (calculando $q_4$,$q_5$,$q_6$).


Jon Legarreta / Raquel Martinez

# CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MODELO DIFERENCIAL

Hasta ahora se ha considerado únicamente las relaciones de las articulaciones de una manera **estática** en ausencia de movimiento del robot (problemas Cinemático Directo e Inverso).

**Cuando el robot se desplaza**, los elementos de la cadena cinemática **propagan** de una articulación a al siguiente tanto **velocidades lineales como angulares**.
La velocidad del elemento i+1 será la del elemento **i** mas las componentes que añade la articulación **i+1.**

Métodos de resolución
**Modelo Diferencial**

Propagación de velocidades

**Ecuaciones de revolución**

**Ecuaciones de Translación**

Cálculo Matriz Jacobiana

Velocidades de las articulaciones

Velocidades del extremo del robot

$$\begin{bmatrix} \dot{q}1 \\ \dot{q}2 \\ \vdots \\ \dot{q}n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Jacobiano DIRECTO}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}1 \\ \dot{q}2 \\ \vdots \\ \dot{q}n \end{bmatrix} \xleftarrow[\text{Jacobiano INVERSO}]{} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$



Jon Legarreta / Raquel Martinez

# CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MATRIZ JACOBIANA

**La jacobiana es una matriz en derivadas**. En general, para un conjunto de m funciones que dependen de n variables independientes:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Si se considera que las n variables son dependientes del tiempo, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \cdot \dot{x}_n \\ \dot{y}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \cdot \dot{x}_n \\ &\vdots \\ \dot{y}_m &= \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \cdot \dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \cdot \dot{x}_n \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{y}} = \boxed{\mathbf{J}(x)} \cdot \dot{x}$$

Matriz Jacobiana

Se puede observar que al ser ***x*** función del tiempo, para cada instante de tiempo la Matriz Jacobiana es distinta.

# CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MATRIZ JACOBIANA

**En robótica,** la jacobiana se utiliza tomando como funciones las correspondientes a las posiciones del extremo del robot siendo las variables independientes de dichas funciones las articulaciones:

$$x = f_x(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$y = f_y(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$z = f_z(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$\beta = f_\beta(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$\gamma = f_\gamma(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

Jacobiana

Velocidad lineal del extremo

$$\dot{x} = \frac{\partial f_x}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_x}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 \cdots + \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n$$
$$\dot{y} = \frac{\partial f_y}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_y}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 \cdots + \frac{\partial f_y}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n$$
$$\dot{z} = \frac{\partial f_z}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_z}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 \cdots + \frac{\partial f_z}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n$$
$$\dot{\alpha} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 \cdots + \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n$$
$$\dot{\beta} = \frac{\partial f_\beta}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 \cdots + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n$$
$$\dot{\gamma} = \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 \cdots + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n$$

Velocidad angular extremo

Representación matricial

Velocidades del extremo del robot

Velocidades de las articulaciones

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v(q) \\ J_\omega(q) \end{bmatrix} \cdot \dot{q}$$

# CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MATRIZ JACOBIANA

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

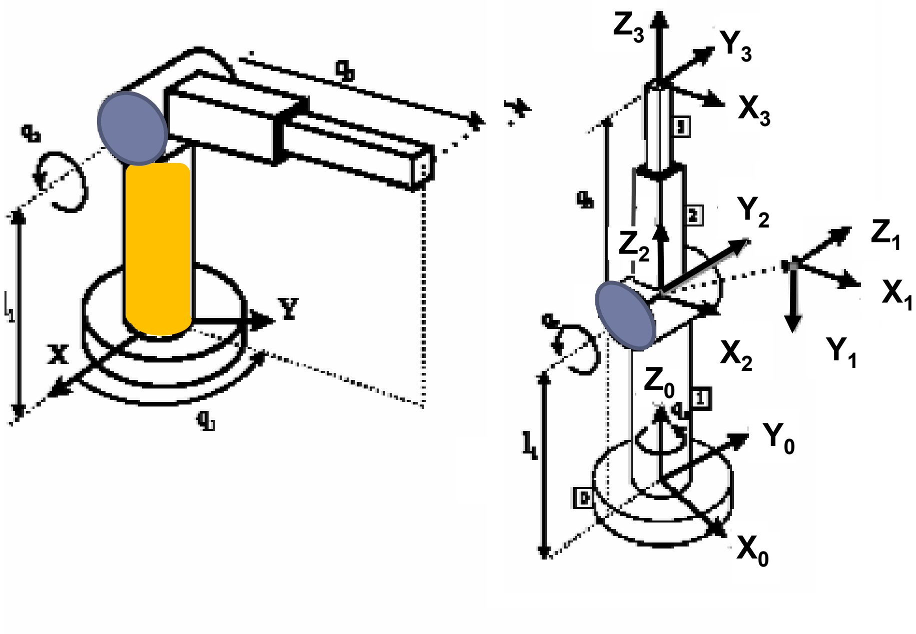



Tabla D-H

| | θi | di | ai | αi |
|---|---|---|---|---|
| **1** | **q1** | **$L_1$** | **0** | **-90º** |
| **2** | **q2** | **0** | **0** | **90º** |
| **3** | **0** | **q3** | **0** | **0º** |

MTH:

$$ {}^0_1A = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & -Cq1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Cq}2 & 0 & -\boldsymbol{Sq}2 & 0 \\ \boldsymbol{Sq}2 & 0 & \boldsymbol{Cq}2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{q}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$


Jon Legarreta / Raquel Martinez

# CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MATRIZ JACOBIANA

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

$$
{}^0_3A = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & -Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & Cq1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & Sq2 & 0 \\ Sq2 & 0 & -Cq2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
{}^0_3A = \left[\begin{array}{ccc|c} Cq1Cq2 & -Sq1 & Cq1Sq2 & \boxed{q3Cq1Sq2} \\ Sq1Cq2 & Cq1 & Sq1Sq2 & \boxed{q3Sq1Sq2} \\ Sq2 & 0 & Cq2 & \boxed{q3Cq2+L1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\begin{array}{l} \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}_x(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n) \\ \rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}_y(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n) \\ \rightarrow \boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}_z(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n) \end{array}
$$

$$x = q3\,Cq1\,Sq2$$

$$y = q3\,Sq1\,Sq2$$

$$z = q3Cq2 + L1$$

Ahora se calcula el Jacobiano, a partir de las ecuaciones de posición del extremo

# CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MATRIZ JACOBIANA

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

$$x = q3\,Cq1\,Sq2$$
$$y = q3\,Sq1\,Sq2$$
$$z = q3Cq2 + L1$$

Jacobiano $\Rightarrow$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q3Sq1Sq2 & q3Cq1Cq2 & Cq1Sq2 \\ q3Cq1Sq2 & q3Sq1Cq2 & Sq1Sq2 \\ 0 & -q3Sq2 & Cq2 \end{bmatrix}$$

Las velocidades del extremo del robot, en función de las aceleraciones de las articulaciones y las posiciones de las mismas.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q3Sq1Sq2 & q3Cq1Cq2 & Cq1Sq2 \\ q3Cq1Sq2 & q3Sq1Cq2 & Sq1Sq2 \\ 0 & -q3Sq2 & Cq2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$



Jon Legarreta / Raquel Martinez

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

Supongamos que la posición del robot viene definida por las articulaciones: $q_1$=0, $q_2$=90, $q_3$=1m. El robot tiene una longitud L1=1 m y esta sometido a unas velocidades articulares de $q_1$'=90º/s, $q_2$'=0º/s y $q_3$'=0.5 m/s. Calcular la velocidad del extremo del robot utilizando el Jacobiano.

$$J = \begin{bmatrix} q3Sq1Sq2 & -q3Cq1Cq2 & -cq1Sq2 \\ -q3Cq1Sq2 & -q3Sq1Cq2 & -sq1Sq2 \\ 0 & -q3Sq2 & Cq2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Velocidad del extremo del robot será:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix} m/s$$