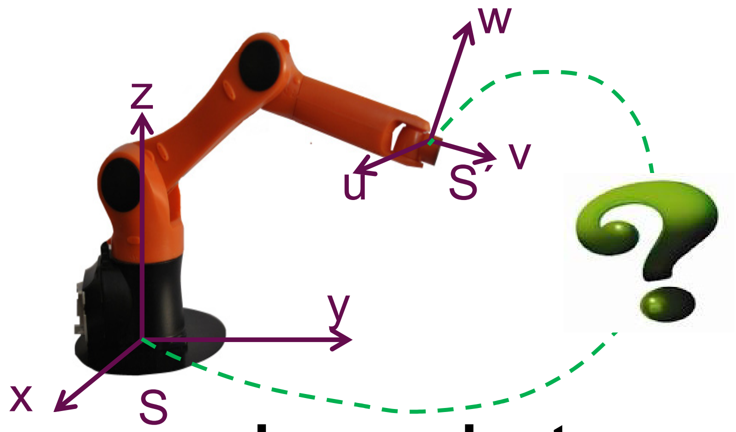
TEMA 4. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS PARA LA LOCALIZACIÓN ESPACIAL

ROBÓTICA

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

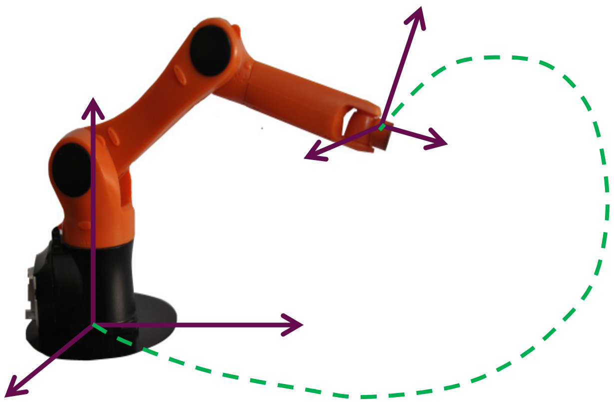
- La manipulación de la pieza llevada a cabo por el robot implica el movimiento espacial de su extremo.
- Para que el robot pueda manipular una pieza, es necesario conocer su **LOCALIZACIÓN**, es decir la **posición y orientación** de ésta con **respecto a la base del robot**.



- **Necesidad de una herramienta matemática** para especificar la posición y orientación del extremo del robot respecto la base del robot.

INTRODUCCIÓN

- El Sistema de coordenadas de **referencia** situado en la base del robot se denomina **{S}** y sus **ejes** asociados **XYZ,** formando el sistema OXYZ.
- El Sistema de coordenadas situado en la muñeca del robot se denomina **{S'}** y sus **ejes** asociados **UVW,** formando el sistema O'UVW .
- La matriz ${}^{S}_{S'}T$ relaciona matemáticamente el sistema S con el S'.



LOCALIZACIÓN ESPACIAL

- Representación de la:

Posición

- Coordenadas cartesianas.
- Coordenadas cilíndricas.
- Coordenadas esféricas.

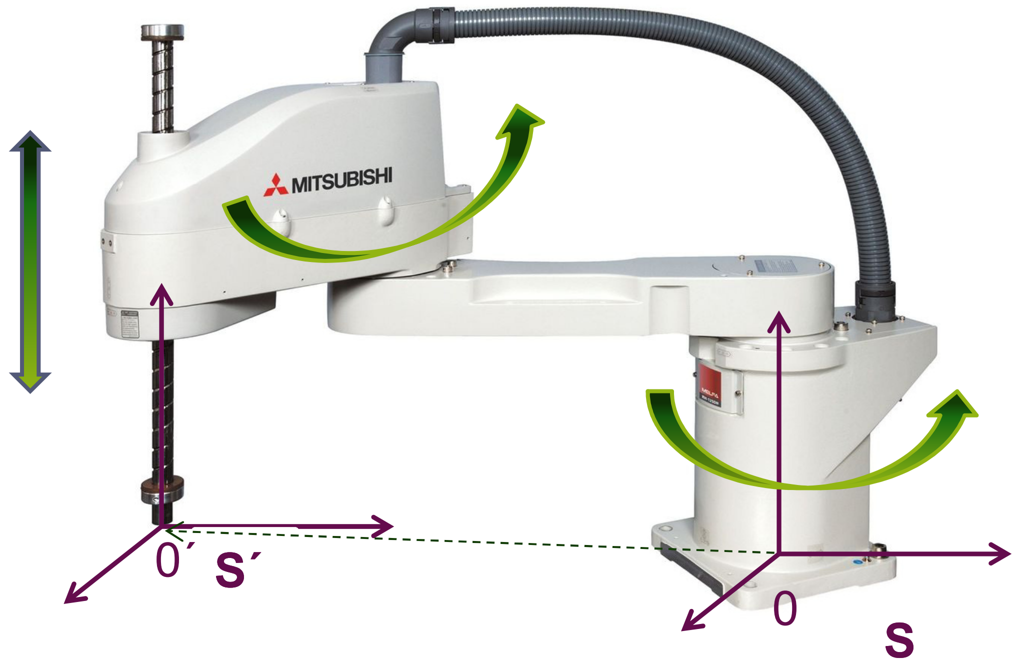
Orientación

- Matrices de rotación.
- Ángulos de Euler.
- Par de rotación.

Localización (posición + orientación)

- Coordenadas homogéneas.
- Matrices de transformación homogénea (MTH).

REPRESENTACIÓN DE LA **POSICIÓN**



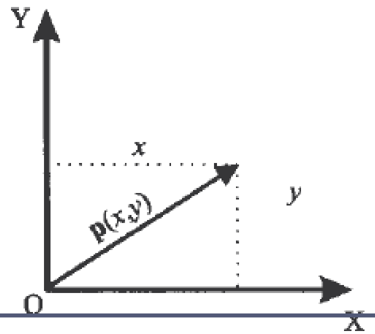
- Algunos robots solo necesitan posicionar su extremo.

REPRESENTACIÓN DE LA **POSICIÓN**

- Se puede posicionar un punto en el plano o en el espacio.

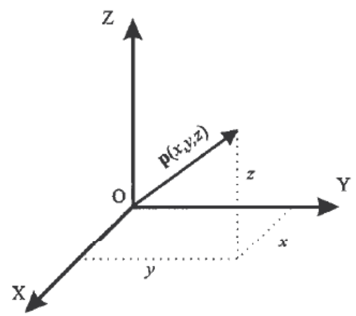
Posición en un PLANO

Posicionamiento por **2 GDL** a través de 2 componentes independientes.
Vectores de coordenadas: OX y OY en el **stma. coordenado de referencia OXY.**



Posición en el ESPACIO

Posicionamiento por 3 **GDL** a través de 3 componentes independientes.
Vectores de coordenadas: OX, OY y OZ en el **stma coordenado de referencia OXYZ.**

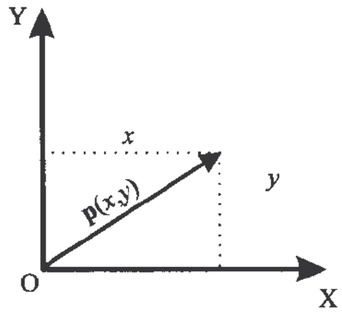


- Existen diferentes sistemas de coordenadas para posicionar un punto, estas son: cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas.

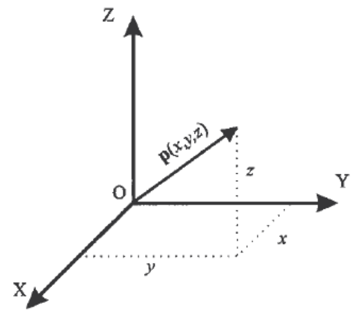
Jon Legarreta / Raquel Martinez

REPRESENTACIÓN DE LA **POSICIÓN**

- Posición mediante **Coordenadas CARTESIANAS.**



- Vector de posición **p**(x,y).
- **(x,y):**
  Coordenadas cartesianas donde (x,y) son la proyección del vector p en los ejes OX y OY respectivamente.



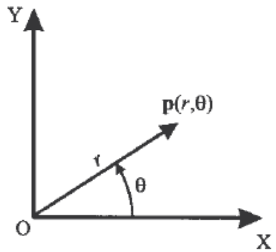
- Vector de posición **p**(x,y,z).
- **(x,y,z):**
  Coordenadas cartesianas donde (x,y,z) son la proyección del vector p en los ejes OX, OY y OZ respectivamente.

Jon Legarreta / Raquel Martinez

REPRESENTACIÓN DE LA **POSICIÓN**

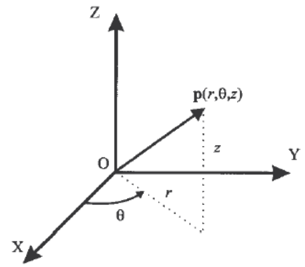
- Posición mediante **Coordenadas POLARES Y CILÍNDRICAS.**

Coordenadas POLARES



- Vector de posición **p**(r, θ).
- **(r,θ):**
  Coordenadas polares donde r es la distancia desde el origen O hasta el punto "a" y θ es el ángulo de p con el eje OX.

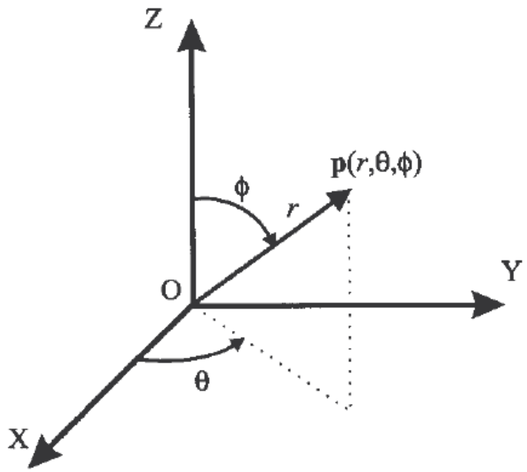
Coordenadas CILÍNDRICAS



- Vector de posición **p**(r, θ ,z).
- **(r,θ,z):**
  Coord. cilíndricas donde r es la distancia desde el origen O hasta el punto "a", θ es el ángulo de p con el eje OXY y z es la proyección de p sobre OY.

REPRESENTACIÓN DE LA **POSICIÓN**

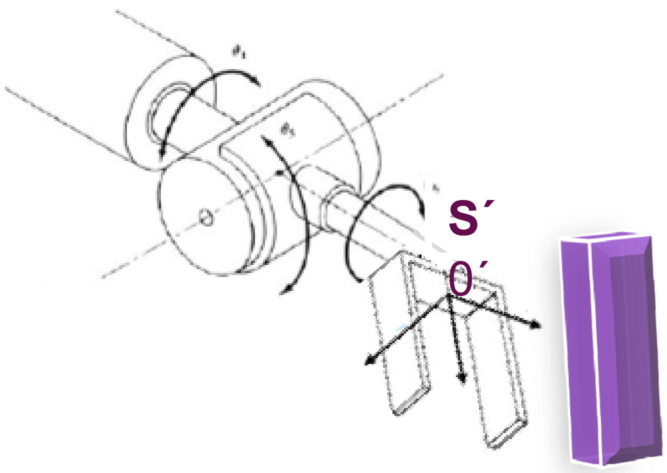
- Posición mediante **Coordenadas ESFÉRICAS.**



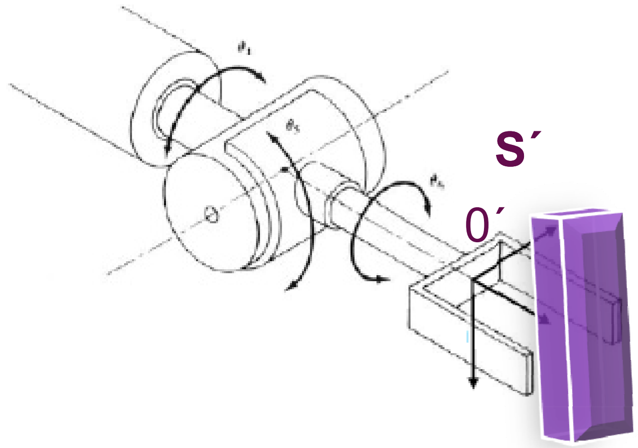
- Vector de posición **p(r, θ, ϕ).**
- **(r, θ, ϕ):**
  Coordenadas esféricas donde r es la distancia desde el origen O hasta el punto "a" o extremo del vector p , θ es el ángulo de p con el eje OXY y ϕ es el ángulo de p con respecto del OZ.

Jon Legarreta / Raquel Martinez

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**



Para manejar una pieza, no basta con posicionar …

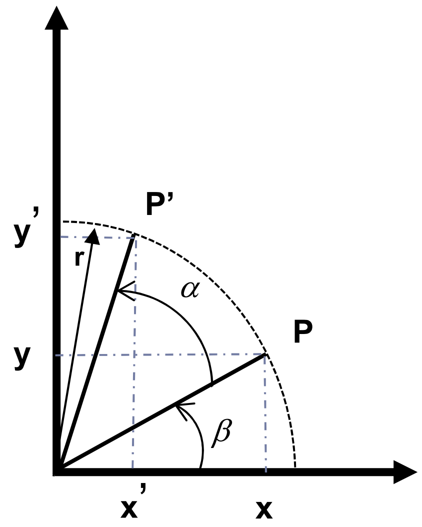


…. sino que es necesario orientar.

MATRICES DE ROTACIÓN 2D

- **Se tiene que:**

$$x = r\cos\beta$$
$$y = r sen\beta$$
$$x' = r\cos(\beta+\alpha) = r(\cos\beta\cos\alpha - sen\beta sen\alpha)$$
$$= x\cos\alpha - y sen\alpha$$
$$y' = r sen(\beta+\alpha) = r(sen\beta\cos\alpha + \cos\beta sen\alpha)$$
$$= y\cos\alpha + x sen\alpha = x sen\alpha + y\cos\alpha$$



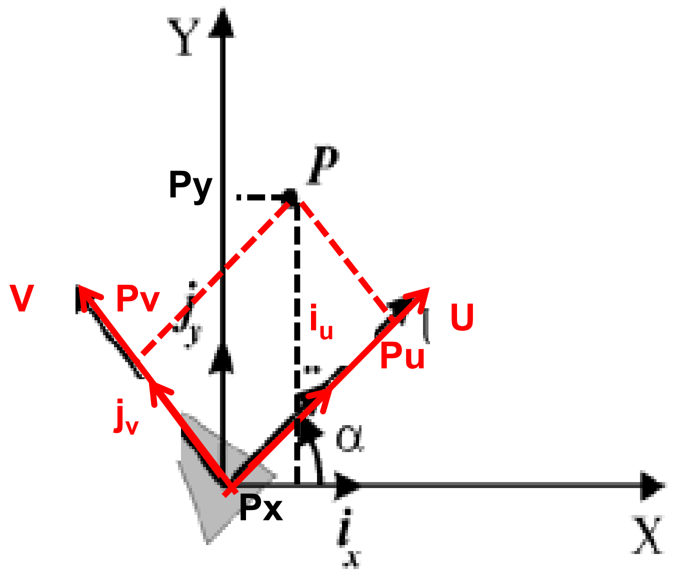
- **Cuya representación matricial es:**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- **Es decir** $p_{xy} = R\, p_{xy}$
- **Siendo R la matriz de rotación, que representa una rotación en el espacio euclídeo.**

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

- **MATRICES DE ROTACIÓN 2D**
  - **Los sistemas {XY}=OXY y {UV}=OUV están girados un ángulo de α grados con orígenes coincidentes.**
  - **Las coordenadas de un punto P**
    - **P respecto al sistema XY:** ${}^{XY}P = (P_x, P_y)$
    - **P respecto al sistema UV:** ${}^{UV}P = (P_U, P_V)$



$$P_{XY} = \begin{bmatrix} p_X \\ p_Y \end{bmatrix} = p_X i_X + p_X j_Y$$

$$P_{UV} = \begin{bmatrix} p_U \\ p_V \end{bmatrix} = p_U i_U + p_V j_V$$

MATRICES DE ROTACIÓN 2D

- Si se conocen las coordenadas de P en {UV} y se desean conocer las coordenadas de P en {XY}:

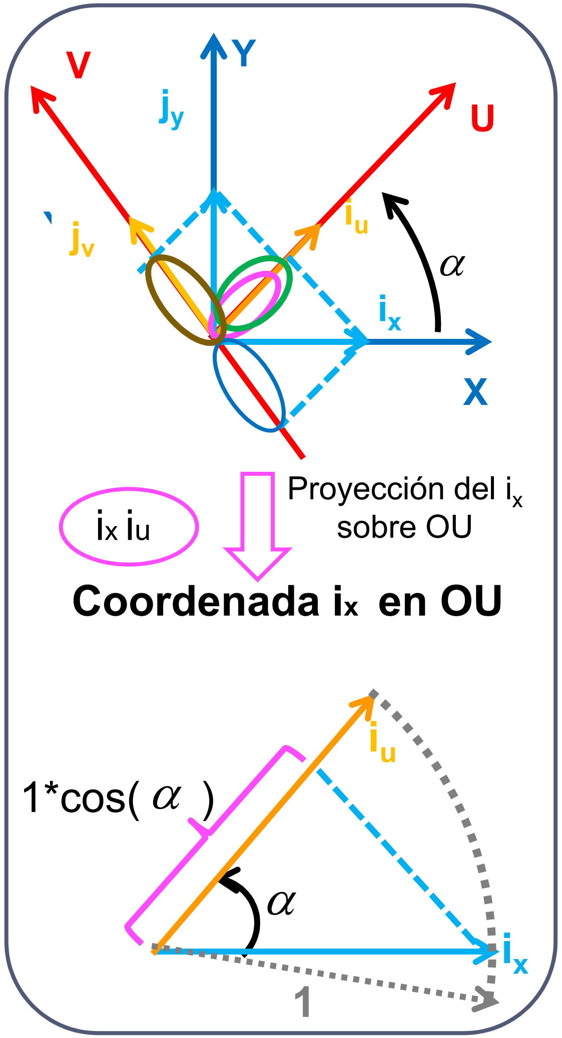
$$\boxed{{}^{XY}P = {}^{XY}_{UV}R \cdot {}^{UV}P}$$

- Proyectando los vectores unitarios de {XY} en cada uno de los vectores unitarios de {UV}.

$${}^{XY}_{UV}R = \begin{bmatrix} i_X \\ j_Y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} i_U & j_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_X\, i_U & i_X\, j_V \\ j_Y\, i_U & j_Y\, j_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Producto tensorial

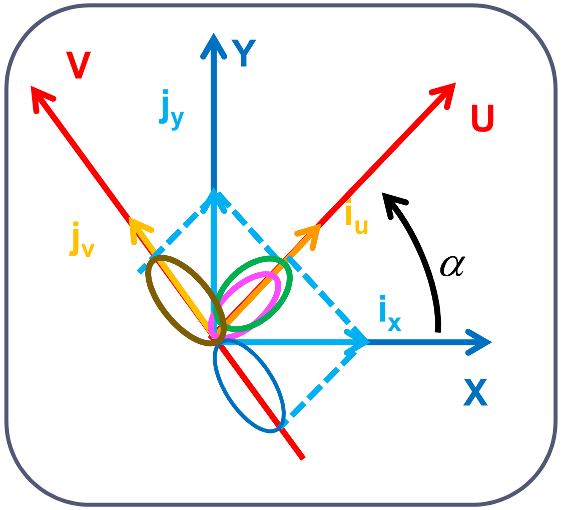
Producto escalar



Jon Legarreta / Raquel Martinez

MATRICES DE ROTACIÓN 2D

- Si se conocen las coordenadas de P en {UV} y se desean conocer las coordenadas de P en {XY}:



$$\begin{bmatrix} p_X \\ p_Y \end{bmatrix} = {}^{XY}_{UV}R \cdot \begin{bmatrix} p_U \\ p_U \end{bmatrix}$$

$$\boxed{{}^{XY}P = {}^{XY}_{UV}R \cdot {}^{UV}P}$$

- Se gira el sistema {XY} α grados, hasta que sea coincidente con el sistema {UV}, denominado a {XY} como sistema FIJO.

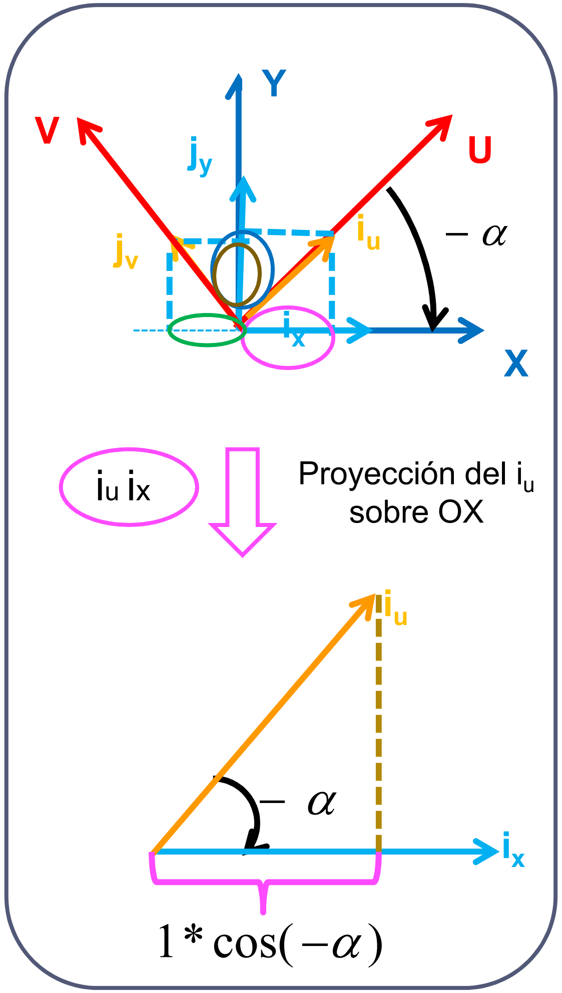
- Es decir, se proyecta el sistema {XY} en {UV}, proyectando los vectores unitarios de {XY} en cada uno de los ejes de sistema {UV}.

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

MATRICES DE ROTACIÓN 2D

- Si se conocen las coordenadas de P en {XY} y se desean conocer las coordenadas de P en {UV}:

$$\boxed{{}^{UV}P = {}^{UV}_{XY}R \cdot {}^{XY}P}$$



- Se gira el sistema {UV} -α grados, hasta que sea coincidente con el sistema {XY}, denominado a {UV} como sistema FIJO .
- Se proyecta el sistema {UV} sobre {XY}.

$${}^{UV}_{XY}R = \begin{bmatrix} i_U \\ j_V \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} i_X & j_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_U\, i_X & i_U\, j_Y \\ j_V\, i_X & j_V\, j_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$$

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

- **MATRICES DE ROTACIÓN 2D**

$$
{}^{XY}_{UV}R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}
$$

$$
\boxed{{}^{UV}_{XY}R = ({}^{XY}_{UV}R)^{-1}}
$$

$$
{}^{UV}_{XY}R = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}
$$

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS MATRICES DE ROTACIÓN

La coordenada de ix en el sistema {UV}.

ix en OU

ix en OV

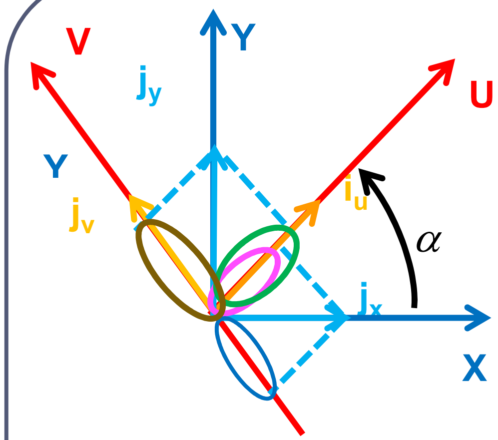
$$ {}^{XY}_{UV}R = \begin{bmatrix} i_X \\ j_Y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} i_U & j_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_X\, i_U & i_X\, j_V \\ j_Y\, i_U & j_Y\, j_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} $$

jy en OU

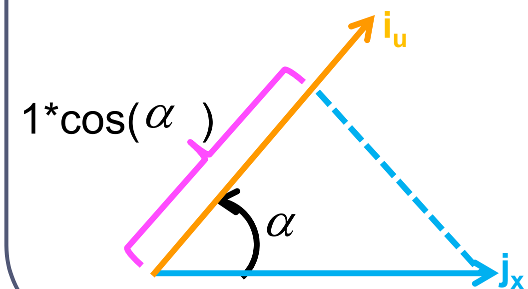
jy en OV

La coordenada de jy en el sistema {UV}

- Las **filas** de la matriz de rotación R son los vectores unitarios del sistema {XY} expresados respecto al sistema {UV}.



Coordenada i_x en OU



Jon Legarreta / Raquel Martinez

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS MATRICES DE ROTACIÓN

$$ {}^{XY}_{UV}R = \left({}^{UV}_{XY}R\right)^{-1} $$

$$ {}^{XY}_{UV}R = \begin{bmatrix} i_U\, i_X & i_U\, j_Y \\ j_V\, i_X & j_V\, j_Y \end{bmatrix}^{-1} $$

$$ {}^{XY}_{UV}R = \begin{bmatrix} i_U\, i_X & j_V\, i_X \\ i_U\, j_Y & j_V\, j_Y \end{bmatrix} $$

La coordenada de iu en el sistema {XY}

La coordenada de jv en el sistema {XY}

iu en OX

jv en OX

$$ {}^{XY}_{UV}R = \begin{bmatrix} i_U\, i_X & j_V\, i_X \\ i_U\, j_Y & j_V\, j_Y \end{bmatrix} $$

iu en OY

jv en OY

- Las **columnas** de la matriz de rotación R son los vectores unitarios del sistema {UV} expresados respecto al sistema {XY}.

Jon Legarreta / Raquel Martinez

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS MATRICES DE ROTACIÓN

Resumiendo:

Las filas de la matriz rotación R, son las coordenadas de los vectores unitarios del sistema {XY} en el sistema {UV}.

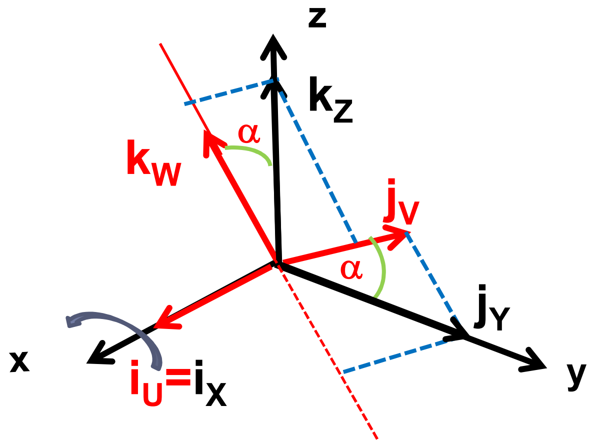
Las columnas de la matriz rotación R, son las coordenadas de los vectores unitarios del sistema {UV} en el sistema {XY}.

$$
{}^{XY}_{UV}R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}
$$

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

MATRICES DE ROTACIÓN 3D

- De igual manera, se puede generalizar para tres dimensiones.
- Rotación de un ángulo α en torno al eje OX.
- La matriz de rotación sería:



$$P_{XY} = [p_X, p_y, p_z]^T = p_X i_X + p_y j_Y + p_z k_z$$

$$P_{UV} = [p_U, p_V, p_W]^T = p_U i_U + p_V j_V + p_W k_W$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = R(x,\alpha) \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

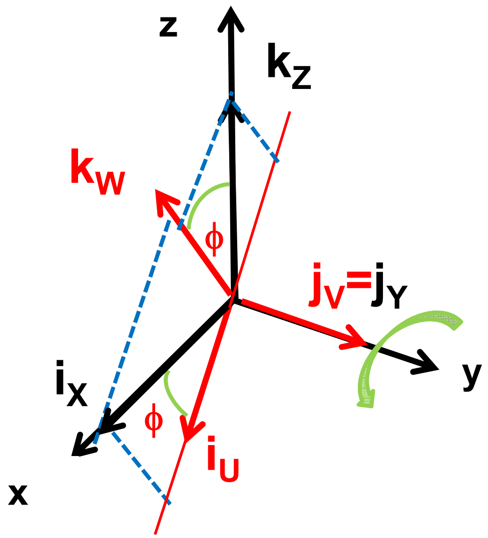
$$R(x,\alpha) = \begin{bmatrix} i_X \\ j_Y \\ k_Z \end{bmatrix} \otimes [i_U \quad j_V \quad k_W] = \begin{bmatrix} i_X\, i_U & i_X\, j_V & i_X\, k_W \\ j_Y\, i_U & j_Y\, j_V & j_Y\, k_W \\ k_Z i_U & k_Z\, j_V & k_Z k_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

MATRICES DE ROTACIÓN 3D

Rotación en torno al eje OY un ángulo ϕ, calcular **R(y,** ϕ**).**

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = R(y,\phi) \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$



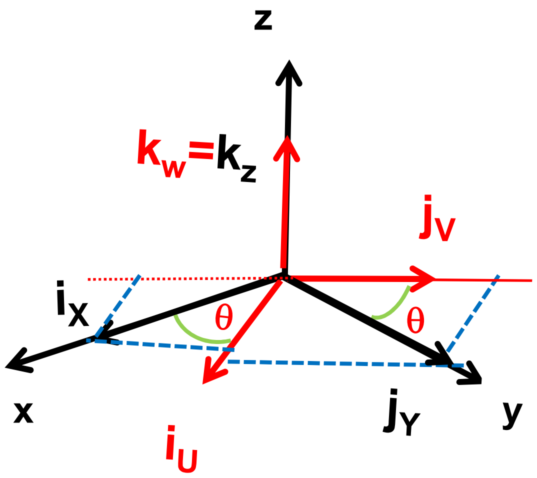
$$\boldsymbol{R}(y,\phi) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_x \\ \boldsymbol{j}_Y \\ \boldsymbol{k}_z \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_U & \boldsymbol{j}_V & \boldsymbol{k}_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_X \boldsymbol{i}_U & \boldsymbol{i}_X \boldsymbol{j}_V & \boldsymbol{i}_X \boldsymbol{k}_W \\ \boldsymbol{j}_Y \boldsymbol{i}_U & \boldsymbol{j}_Y \boldsymbol{j}_V & \boldsymbol{j}_Y \boldsymbol{k}_W \\ \boldsymbol{k}_Z \boldsymbol{i}_U & \boldsymbol{k}_Z \boldsymbol{j}_V & \boldsymbol{k}_Z \boldsymbol{k}_W \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{R}(y,\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

MATRICES DE ROTACIÓN 3D

Rotación en torno al eje OZ un ángulo θ, calcular **R(z, θ).**

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = R(z,\theta) \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

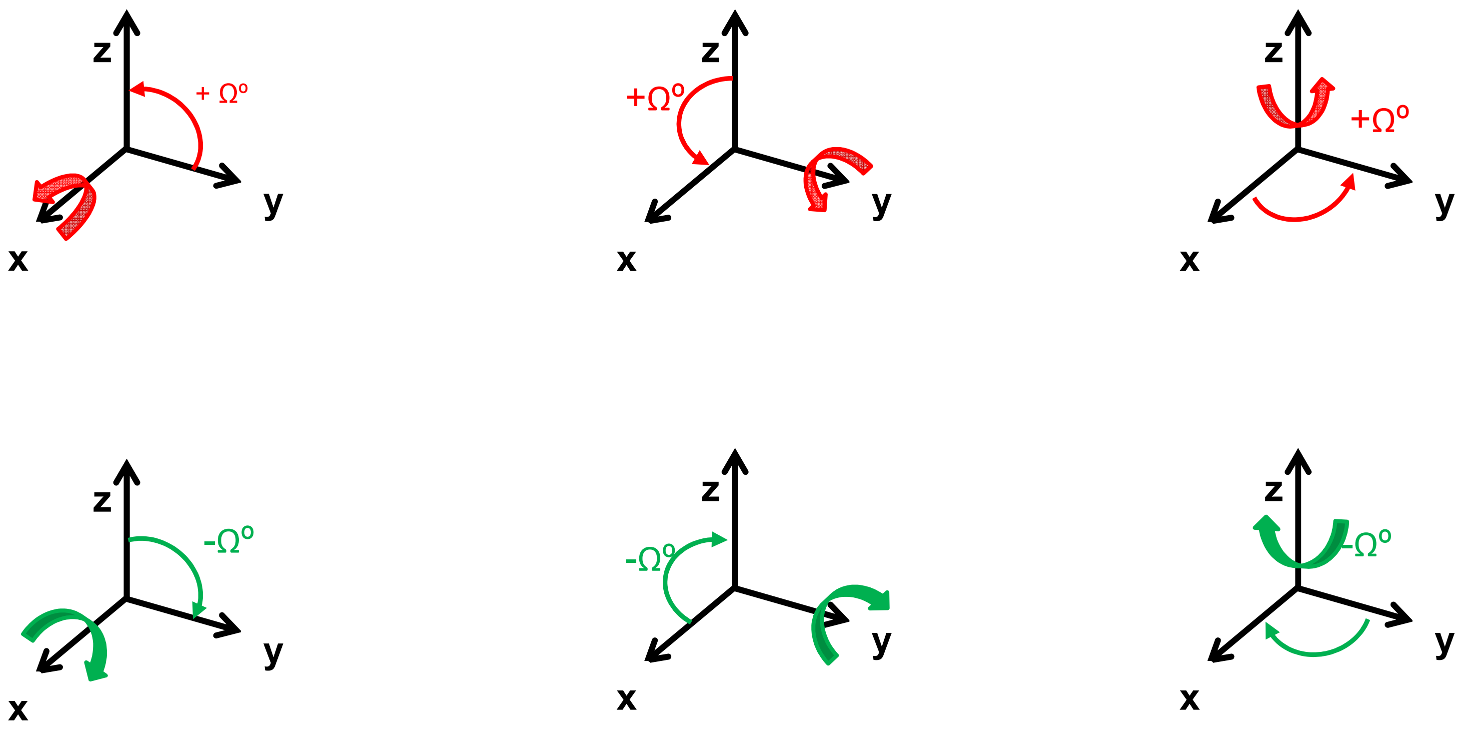


$$R(z,\theta) = \begin{bmatrix} i_X \\ j_Y \\ k_Z \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} i_U & j_V & k_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_X\, i_U & i_X\, j_V & i_X\, k_W \\ j_Y\, i_U & j_Y\, j_V & j_Y\, k_W \\ k_Z i_U & k_Z\, j_V & k_Z k_W \end{bmatrix} \Rightarrow$$

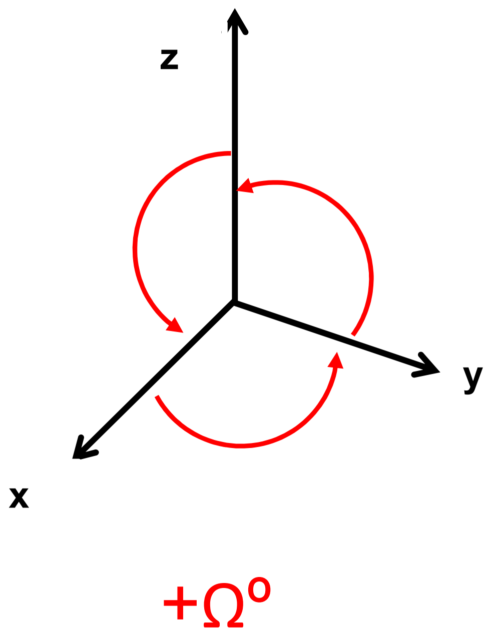
$$R(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

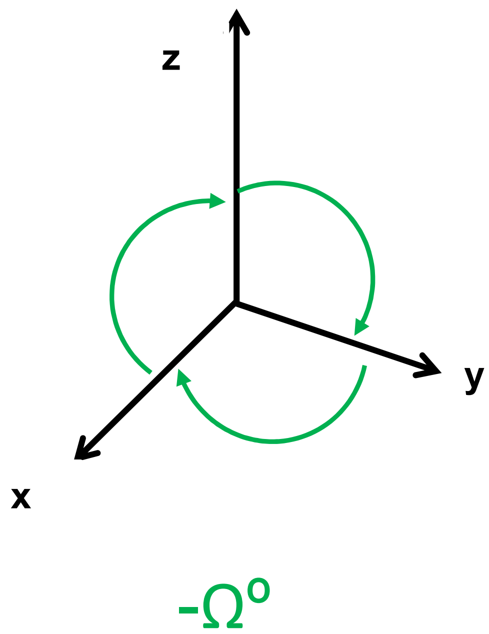
Jon Legarreta / Raquel Martinez

Signos de los giros:



Signos de los giros:





REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

- **COMPOSICIÓN DE MATRICES DE ROTACIÓN**
  - Para representar una secuencia finita de rotaciones respecto del eje principal del sistema de coordenadas OXYZ, se multiplican las matrices de rotación básicas.
  - Pero, hay que tener en cuenta que:
    - Las multiplicación de matrices no es conmutativa.
    - Y por ello, es importante el orden de realización de las rotaciones.
  - También se pueden encadenar rotaciones básicas respecto a los ejes principales de los sistemas de coordenadas obtenidos después de una rotación.

COMPOSICIÓN DE MATRICES DE ROTACIÓN

Regla para componer ordenadamente las rotaciones:

- Inicialmente se suponen coincidentes ambos sistemas de coordenadas ➔ **matriz de rotación inicial =I**.
- Si el sistema **móvil** gira respecto a uno de los ejes principales del sistema fijo, premultiplicar la matriz de rotación previa por la matriz de rotación elemental correspondiente.
- Si el sistema **móvil** gira respecto a uno de sus propios ejes principales, postmultiplicar la matriz de rotación previa por la matriz de rotación elemental correspondiente.
- Simbólicamente:

$$p_{xyz} = \leftarrow \boxed{R_{XYZ} \cdot I \cdot R_{UVW}} \rightarrow \cdot p_{uvw}$$

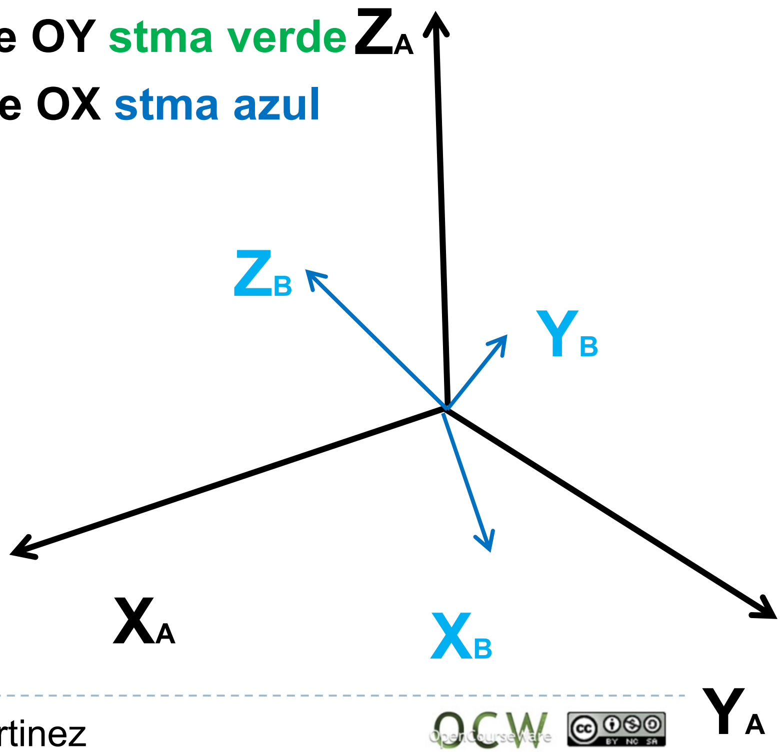
COMPOSICIÓN DE MATRICES DE ROTACIÓN

EJERCICIO 1

Obtener la matriz de rotación de un sistema fijo {A} que gira 3 veces hasta convertirse en el sistema {B} :

1. **Rotación de un ángulo θ sobre el eje OZ stma rojo**
2. **Rotación de un ángulo ϕ sobre el eje OY stma verde**
3. **Rotación de un ángulo α sobre el eje OX stma azul**

$$^{A}_{B}R = ?$$

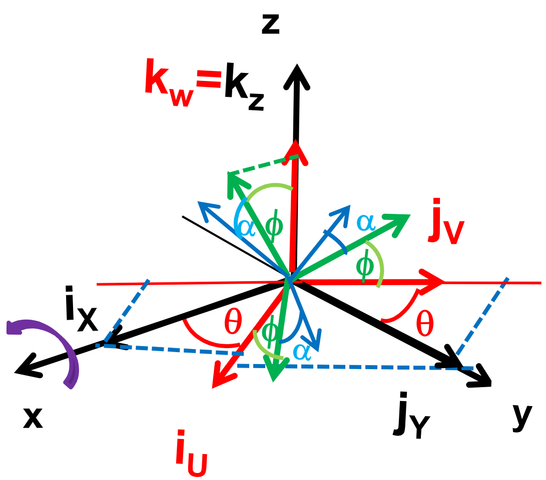


COMPOSICIÓN DE MATRICES DE ROTACIÓN

EJERCICIO 1

Obtener la matriz de rotación de un sistema fijo {A} que gira 3 veces hasta convertirse en el sistema {B} :

1. **Rotación de un ángulo θ sobre el eje OZ stma rojo**
2. **Rotación de un ángulo ϕ sobre el eje OY stma verde**
3. **Rotación de un ángulo α sobre el eje OX stma azul**



$$[1] = R_1 = R(z, \theta) * I = R(z, \theta)$$

$$[2] = R_2 = R(y, \phi) * R_1 = R(y, \phi) * R(z, \theta)$$

$$ {}^{A}_{B}R = [3] = R(x, \alpha) * R_2 = R(x, \alpha) * R(y, \phi) * R(z, \theta)$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

COMPOSICIÓN DE MATRICES DE ROTACIÓN

EJERCICIO 1

Obtener la matriz de rotación de un sistema fijo {A} que gira 3 veces hasta convertirse en el sistema {B} :

1. **Rotación de un ángulo θ sobre el eje OZ stma rojo**
2. **Rotación de un ángulo ϕ sobre el eje OY stma verde**
3. **Rotación de un ángulo α sobre el eje OX stma azul**

$$
{}^{A}_{B}R = R(x,\alpha)*R(y,\phi)*R(z,\theta) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}}_{3}\underbrace{\begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix}}_{2}\underbrace{\begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{1}
$$

$$
{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -C\phi S\theta & S\phi \\ S\alpha S\phi C\theta + C\alpha S\theta & -S\alpha S\phi S\theta - C\alpha C\theta & -S\alpha C\phi \\ -C\alpha S\phi C\theta + S\alpha S\theta & C\alpha S\phi S\theta + S\alpha C\theta & C\alpha C\phi \end{bmatrix}
$$

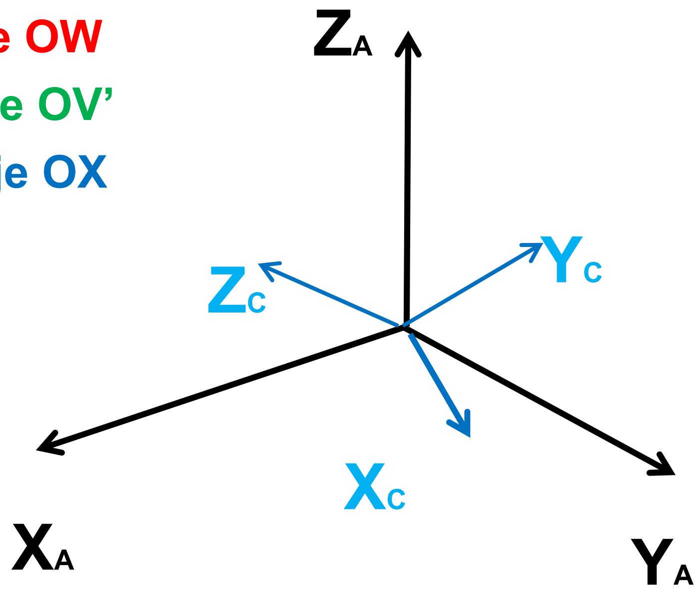
COMPOSICIÓN DE MATRICES DE ROTACIÓN

EJERCICIO 2

Obtener la matriz de rotación de un sistema fijo {A} que gira 3 veces hasta convertirse en el sistema {C} :

1. **Rotación de un ángulo θ sobre el eje OW**
2. **Rotación de un ángulo ϕ sobre el eje OV'**
3. **Rotación de un ángulo α sobre el eje OX**

$$ {}^{A}_{C}R = ? $$

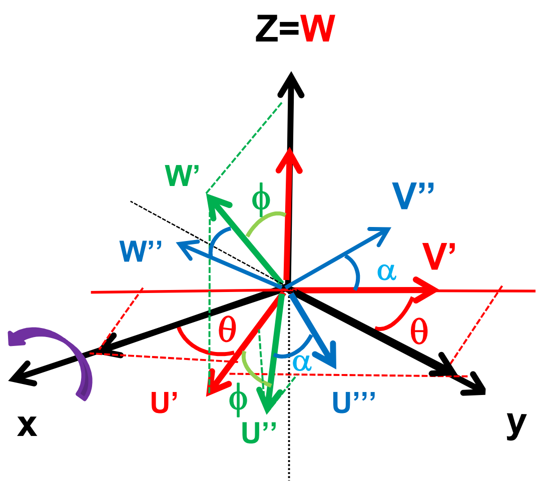


REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

COMPOSICIÓN DE MATRICES DE ROTACIÓN

EJERCICIO 2

Obtener la matriz de rotación de un sistema fijo {A} que gira 3 veces hasta convertirse en el sistema {C} :



1. **Rotación de un ángulo θ sobre el eje OW**
2. **Rotación de un ángulo ϕ sobre el eje OV'**
3. **Rotación de un ángulo α sobre el eje OX**

$$[1] = R_1 = I * R(w,\ \theta) = R(w,\ \theta)$$

$$[2] = R_2 = R_1 * R(v,\ \phi) = R(w,\ \theta) * R(v,\ \phi)$$

$$^{A}_{C}R = [3] = R(x,\ \alpha) * R_2 = R(x,\ \alpha) * R(w,\ \theta) * R(v,\ \phi)$$

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

COMPOSICIÓN DE MATRICES DE ROTACIÓN

EJERCICIO 2

Obtener la matriz de rotación de un sistema fijo {A} que gira 3 veces hasta convertirse en el sistema {C} :

1. **Rotación de un ángulo θ sobre el eje OW**
2. **Rotación de un ángulo ϕ sobre el eje OV'**
3. **Rotación de un ángulo α sobre el eje OX**

$$ {}^{A}_{C}R = R(x,\alpha)R(w,\theta)R(v,\phi) = \overset{\boxed{3}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}} \overset{\boxed{1}}{\begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\boxed{2}}{\begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix}} $$

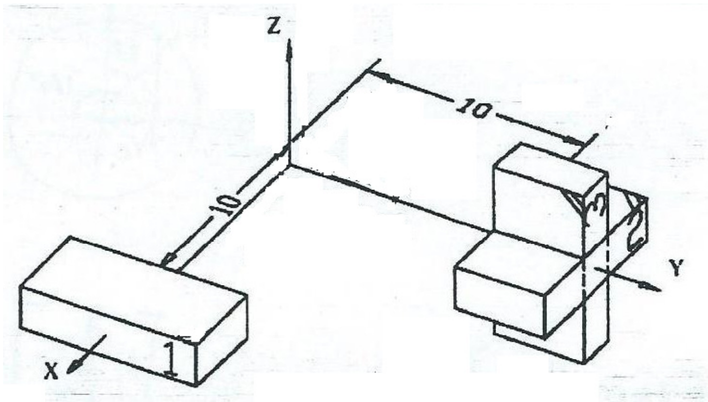
$$ {}^{A}_{C}R = \begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\theta & C\theta S\phi \\ S\alpha S\theta C\phi + S\alpha S\phi & C\alpha C\theta & C\alpha S\theta C\phi - S\alpha C\phi \\ S\alpha S\theta C\phi - C\alpha S\phi & S\alpha C\theta & S\alpha S\theta C\phi - C\alpha C\phi \end{bmatrix} $$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

COMPOSICIÓN DE MATRICES DE ROTACIÓN

EJERCICIO 3

La caja de la figura se mueve desde la posición inicial 1 a la 2 y finalmente a la 3. Determinar cual es la matriz de rotación que coloca la pieza desde la posición 1 a la 3.



Jon Legarreta / Raquel Martinez

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

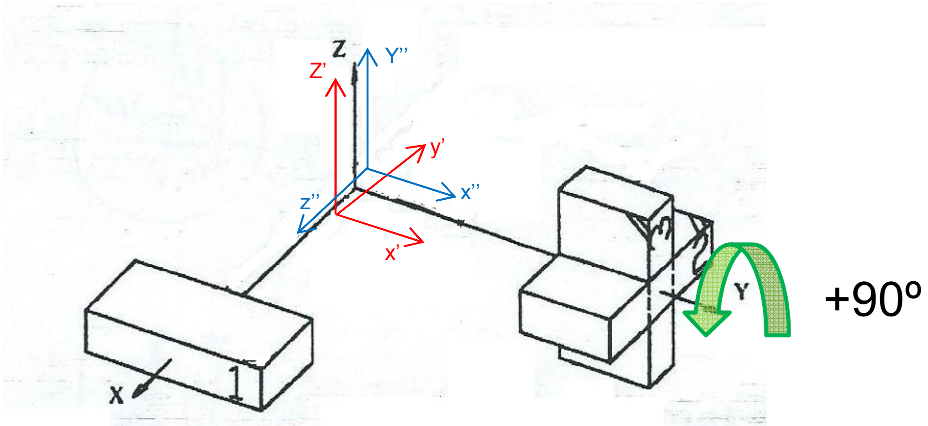
COMPOSICIÓN DE MATRICES DE ROTACIÓN

EJERCICIO 3

La caja de la figura se mueve desde la posición inicial 1 a la 2 y finalmente a la 3. Determinar cual es la matriz de rotación que coloca la pieza desde la posición 1 a la 3. :

1 **Rotación de 90º sobre el eje OZ colocamos la pieza en posicion 2**

2 **Rotación de 90º sobre el eje OY (o también 90 sobre el eje O'X')** 2 **colocamos la pieza en posición 3.**



Jon Legarreta / Raquel Martinez

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

COMPOSICIÓN DE MATRICES DE ROTACIÓN

EJERCICIO 3

La caja de la figura se mueve desde la posición inicial 1 a la 2 y finalmente a la 3. Determinar cual es la matriz de rotación que coloca la pieza desde la posición 1 a la 3. :

1 **Rotación de 90º sobre el eje OZ**

2 **Rotación de 90º sobre el eje OY**

$$
{}^{1}_{3}R = R(y,90)R(z,90) = \underbrace{\begin{bmatrix} C90 & 0 & S90 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S90 & 0 & C90 \end{bmatrix}}^{2}\overbrace{\begin{bmatrix} C90 & -S90 & 0 \\ S90 & C90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\boxed{{}^{1}_{3}R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}
$$

COMPOSICIÓN DE MATRICES DE ROTACIÓN

EJERCICIO 3

La caja de la figura se mueve desde la posición inicial 1 a la 2 y finalmente a la 3. Determinar cual es la matriz de rotación que coloca la pieza desde la posición 1 a la 3. :

1 **Rotación de 90º sobre el eje OZ**

2 **Rotación de 90º sobre el eje O'X'**

$$
{}^{1}_{3}R = R(z,90)R(x,90) = \overset{\boxed{1}}{\begin{bmatrix} C90 & -S90 & 0 \\ S90 & C90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\boxed{2}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C90 & -S90 \\ 0 & S90 & C90 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boxed{{}^{1}_{3}R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}
$$

COMPOSICIÓN DE MATRICES DE ROTACIÓN

EJERCICIO 3

La caja de la figura se mueve desde la posición inicial 1 a la 2 y finalmente a la 3. Determinar cual es la matriz de rotación que coloca la pieza desde la posición 1 a la 3. :

1 **Rotación de 90º sobre el eje OZ del stma {1} formando el stma {2}**

2 **Rotación de 90º sobre el eje O'X' del stma {2} formando el stma {3}**

$$ {}^{1}_{2}R = R(z,90) * I = R(z,90) $$

$$ {}^{2}_{3}R = R(x,90) * I = R(x,90) $$

$$ {}^{1}_{3}R = {}^{1}_{2}R\,{}^{2}_{3}R = R(z,90) * R(x,90) $$

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

- **PROPIEDADES DE LAS MATRICES DE ROTACIÓN**
  - **Son matrices ortonormales:**
    - Sus vectores, por columnas o por filas, son ortonormales entre sí:
      - Producto escalar de un vector por otro cualquiera =0.
      - Producto escalar de un vector por si mismo =1.
      - Productor vectorial de un vector por el siguiente = al tercero.
    - Su inversa coincide con su traspuesta $R^T = R^{-1}$.
    - Su determinante es la unidad: $|R| = 1$.
  - **Su composición se realiza mediante el álgebra de matrices (facilidad de uso).**
  - **Se precisan 9 elementos (hay redundancia).**
  - **Riesgo de inconsistencia numérica tras encadenar varias operaciones (por redondeos).**
    - Adecuadas para la formulación simbólica
    - Menos adecuadas para el cálculo computacional

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

- **PROPIEDADES DE LAS MATRICES DE ROTACIÓN**
  - **Son matrices ortonormales:**
    - Sus vectores, por columnas o por filas, son ortonormales entre sí:
      - Ejemplo

$$R(\alpha, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}$$

1) Producto escalar de un vector por otro cualquiera =0.

$$[1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{C\alpha} \\ -\boldsymbol{S\alpha} \end{bmatrix} = 0 \qquad [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{S\alpha} \\ \boldsymbol{C\alpha} \end{bmatrix} = 0 \qquad [0 \quad \boldsymbol{C\alpha} \quad -\boldsymbol{S\alpha}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{S\alpha} \\ \boldsymbol{C\alpha} \end{bmatrix} = 0$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

PROPIEDADES DE LAS MATRICES DE ROTACIÓN

Son matrices ortonormales:

- Sus vectores, por columnas o por filas, son ortonormales entre sí:
  - Ejemplo

$$R(\alpha, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}$$

2) Producto escalar de un vector por si mismo =1.

$$[1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad [0 \quad S\alpha \quad C\alpha] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ S\alpha \\ C\alpha \end{bmatrix} = 1 \qquad [0 \quad C\alpha \quad -S\alpha] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ C\alpha \\ -S\alpha \end{bmatrix} = 1$$

PROPIEDADES DE LAS MATRICES DE ROTACIÓN

Son matrices ortonormales:

- Sus vectores, por columnas o por filas, son ortonormales entre sí:
  - Ejemplo

$$R(\alpha, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}$$

3) Productor vectorial de un vector por el siguiente = al tercero.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \end{vmatrix} = C\alpha\,\hat{k} + S\alpha\,\hat{j} = \begin{bmatrix} 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES DE LAS MATRICES DE ROTACIÓN

Son matrices ortonormales:

- Sus vectores, por columnas o por filas, son ortonormales entre sí:
  - Ejemplo

$$R(\alpha,x)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{C}\alpha & \text{-}\mathrm{S}\alpha\\ 0 & \mathrm{S}\alpha & \mathrm{C}\alpha\end{bmatrix}$$

4) Su inversa coincide con su traspuesta $R^{-1}=R^{T}$.

$R*R^{T},=I$

$$R(\alpha,x)\,R(\alpha,x)^{T}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{C}\alpha & \text{-}\mathrm{S}\alpha\\ 0 & \mathrm{S}\alpha & \mathrm{C}\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{C}\alpha & \mathrm{S}\alpha\\ 0 & \text{-}\mathrm{S}\alpha & \mathrm{C}\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

PROPIEDADES DE LAS MATRICES DE ROTACIÓN

Son matrices ortonormales:

- Sus vectores, por columnas o por filas, son ortonormales entre sí:
  - Ejemplo

$$R(\alpha,x)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{C}\alpha & \mathrm{-S}\alpha\\ 0 & \mathrm{S}\alpha & \mathrm{C}\alpha\end{bmatrix}$$

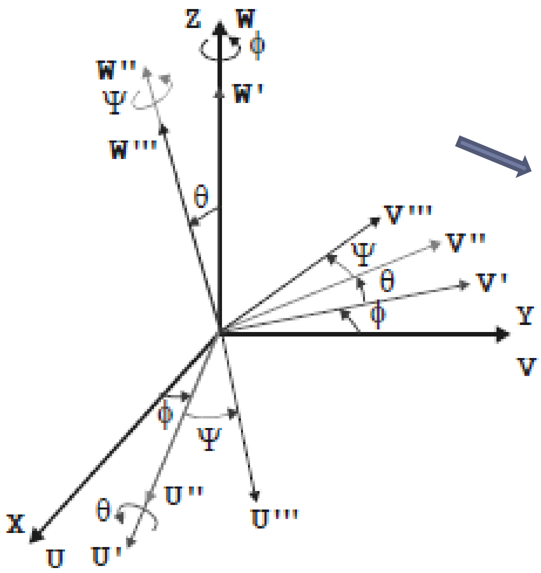
5) Su determinante es la unidad:

$$\left|R(\alpha,x)\right|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & C\alpha & -S\alpha\\ 0 & S\alpha & C\alpha\end{vmatrix}=C^2\alpha+S^2\alpha=1$$

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

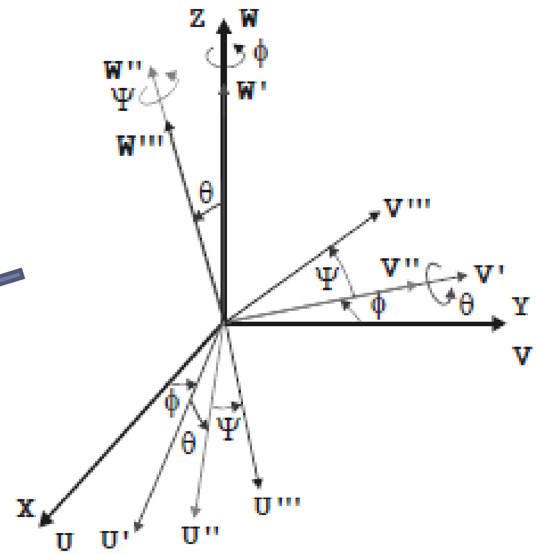
- **ÁNGULOS DE EULER**
  - Método de orientación que utiliza únicamente 3 componentes.
  - El sistema {UVW´} a solidario un cuerpo puede describir su orientación respecto a otro sistema fijo {XYZ} mediante tres ángulos.
    - ϕ, θ, ψ ANGULOS DE EULER
  - Girando sucesivamente el sistema {XYZ} sobre sus ejes ortonormales los ángulos ϕ, θ, ψ , se obtendrá el sistema {UVW´} .
  - Necesario conocer:
    - Ángulos de giro
    - Los ejes sobre los cuales se gira
    - El orden de giro
  - Se partirá de ambos sistemas coincidentes

ÁNGULOS DE EULER



Ángulos de Euler ZXZ (Euler I):

1. Girar OUVW un ángulo ϕ sobre OZ.
2. Girar OU' V' W' un ángulo θ sobre OU'.
3. Girar OU'' V'' W'' un ángulo ψ sobre OW''.



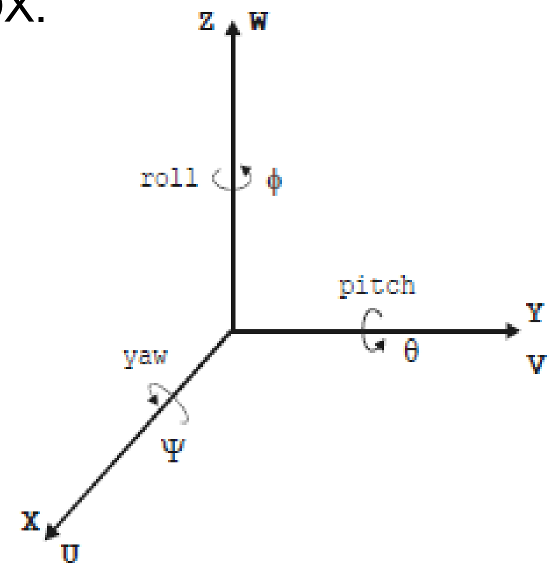
Ángulos de Euler ZYZ (Euler II):

1. Girar OUVW un ángulo ϕ sobre OZ.
2. Girar OU' V' W' un ángulo θ sobre OV'.
3. Girar OU'' V'' W'' un ángulo ψ sobre OW''.

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

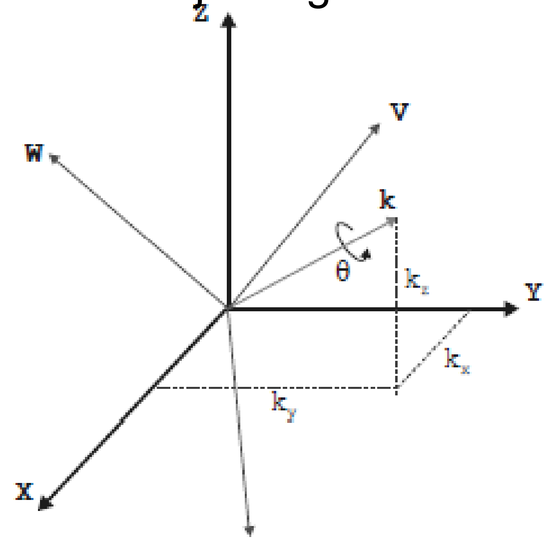
Giro, elevación, desviación (RPY- Roll, Pitch, Yaw)

1. Girar OUVW un ángulo ϕ sobre OZ.
2. Girar OUVW un ángulo θ sobre OY.
3. Girar OU V W un ángulo ψ sobre OX.



Par de rotación:

El sistema OUVW corresponde al OXYZ girado un ángulo sobre el vector K (kx,ky,kz) solidario al eje de giro.



$$\mathbf{R}(\mathbf{k},\theta)\,\mathbf{p} = \mathbf{p}\cos\theta - (\mathbf{k}\times\mathbf{p})\,sen\theta + \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})(1-\cos\theta)$$

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN**

- **RESUMEN**

Matrices de rotación	• Redundancia, algebra matricial y uso cómodo.
Ángulos de Euler	• Mínima información. No hay álgebra asociada. Forma vectorial.
Par de rotación	• 4 elementos, puede considerarse paso intermedio a los cuaternios.

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN** Y LA **POSICIÓN**

POSICIÓN
Coordenadas Cartesianas (XYZ)

+

ORIENTACIÓN
Matrices de rotación

= **LOCALIZACIÓN**
Matrices de transformación homogénea

ORIENTACIÓN
Ángulos De Euler

= **LOCALIZACIÓN**
Vectores

Jon Legarreta / Raquel Martinez

COORDENADAS HOMOGÉNEAS

- **Permite la representación conjunta de la posición y la orientación.**
- **Coordenadas de un espacio (n+1)- dimensional para representar sólidos de un espacio n-dimensional**

•W en robótica siempre =1

- **p(x,y,z) ⟹ P(wx,wy,wz,w), donde w tiene un valor arbitrario y representa un factor de escala.**
- **Vector de coordenadas homogéneas:**

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Ejemplos:** 2i+3j+4k ➔ $[2,3,4,1]^T = [4,6,8,2]^T = [-6,-9,-12,-3]^T$.
- **Vector nulo:** $[0,0,0,n]^T$.
- **Dirección:** $[a,b,c,0]^T$.

MATRIZ DE TRANSFORMACION HOMOGÉNEA (MTH)

- **Es una matriz 4x4 que representa la transformada de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro:**

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times 3} & \mathbf{p}_{3\times 1} \\ \mathbf{f}_{1\times 3} & \mathbf{w}_{1\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

- **En robótica la submatriz f_{1x3} que representa una transformación de perspectiva, es nula, y la submatriz W_{1x1} que representa un escalado global es la unidad:**

- **MATRIZ DE TRANSFORMACION HOMOGÉNEA (MTH)**
  - **Sean dos sistemas {S} y {A}, la matriz ${}^{S}_{A}T$ representa la orientación y posición del sistema {A} rotado y trasladado con respecto al sistema {S}.**

$$
{}^{S}_{A}T = \left[\begin{array}{ccc|c} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & Px \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} & Py \\ R_{3,1} & R_{3.2} & R_{3,3} & Pz \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

- **SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LAS MTH :**
  - **El vector P (Px,Py,Pz), las coordenadas del origen del {A} respecto del {S}.**
  - **La matriz R, la matriz de rotación ${}^{S}_{A}R$.**

$$
{}^{S}_{A}T = \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{o} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN** Y LA **POSICIÓN**

MATRICES BÁSICAS MTH

- **Matriz básica de rotación: sistema O'UVW girado únicamente un ángulo**

α respecto al eje OX

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ϕ respecto al eje OY

$$\left[\begin{array}{ccc|c} C\alpha & 0 & S\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\alpha & 0 & C\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

θ respecto al eje OZ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} C\alpha & -S\alpha & 0 & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- **Matriz básica de traslación: sistema únicamente trasladado**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & Px \\ 0 & 1 & 0 & Py \\ 0 & 0 & 1 & Pz \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

COMPOSICIÓN DE MATRICES DE ROTACIÓN

Regla para componer ordenadamente las rotaciones:

- Inicialmente se suponen coincidentes ambos sistemas de coordenadas ➔ **matriz de rotación inicial =I 4x4**.
- Si el sistema O'UVW se obtiene mediante rotaciones y traslaciones definidas con respecto al sistema fijo OXYZ , la matriz homogénea que representa cada transformación deberá premultiplicar sobre las matrices de transformación previas.
- Si el sistema O'UVW se obtiene mediante rotaciones y traslaciones definidas con respecto al sistema móvil, la matriz homogénea que representa cada transformación deberá postmultiplicar sobre las matrices de transformación previas.

$$T = T_{xyz} \; I \; T_{uvw}$$

- **EJERCICIO 4a:**
- Obtener la matriz de transformación homogénea que relaciona el sistema móvil {S'} con respecto el fijo {S} si los cambios son los siguientes:
  - 1 giro 90º en el eje X respecto al stma fijo
  - 2 giro 90º en el eje Z respecto del stma móvil
  - 3 traslado el vector (4,5,-3) respecto del stma fijo
  - 4 giro 90º en el eje Y respecto del stma movil.

$$ {}^{S}_{S'}T = ? $$

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN** Y LA **POSICIÓN**

- 1) giro 90º en el eje X respecto al stma fijo
- 2) giro 90º en el eje Z respecto del stma móvil
- 3) traslado el vector (4,5,-3) respecto del stma fijo
- 4) giro 90º en el eje Y respecto del stma movil.

$$
{}^{S}_{S'}T = \overset{\boxed{3}}{T(p)}\,\overset{\boxed{1}}{T(x,90)}\,\overset{\boxed{2}}{T(z,90)}\,\overset{\boxed{4}}{T(y,90)}
$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

- 1 giro 90º en el eje X respecto al stma fijo
- 2 giro 90º en el eje Z respecto del stma móvil
- 3 traslado el vector (4,5,-3) respecto del stma fijo
- 4 giro 90º en el eje Y respecto del stma movil.

$$ {}_{S'}^{S}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}_{S'}^{S}T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- **EJERCICIO 4b:**
- Obtener la matriz de transformación homogénea que relaciona el sistema móvil {S'} con respecto el fijo {S} si los cambios son los siguientes:
  - 1 giro 90º en el eje X respecto al stma fijo
  - 2 giro 90º en el eje Z respecto del stma fijo
  - 3 traslado el vector (4,5,-3) respecto del stma movil
  - 4 giro 90º en el eje Y respecto del stma movil.

$$ {}^{S}_{S'}T = ? $$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

REPRESENTACIÓN DE LA **ORIENTACIÓN** Y LA **POSICIÓN**

- 1 giro 90º en el eje X respecto al stma fijo
- 2 giro 90º en el eje Z respecto del stma fijo
- 3 traslado el vector (4,5,-3) respecto del stma móvil
- 4 giro 90º en el eje Y respecto del stma movil.

$$ {}^{S}_{S'}T = T(z,90)T(x,90)T(p)T(y,90) $$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

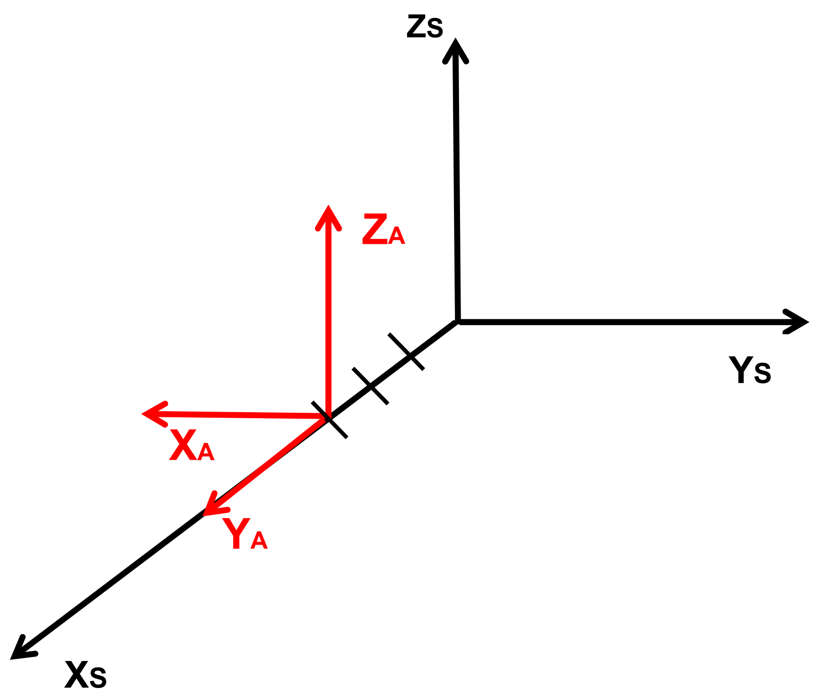
$$ {}^{S}_{S'}T = T(z,90)T(x,90)T(p)T(y,90) $$

$$ {}^{S}_{S'}T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{S}_{S'}T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

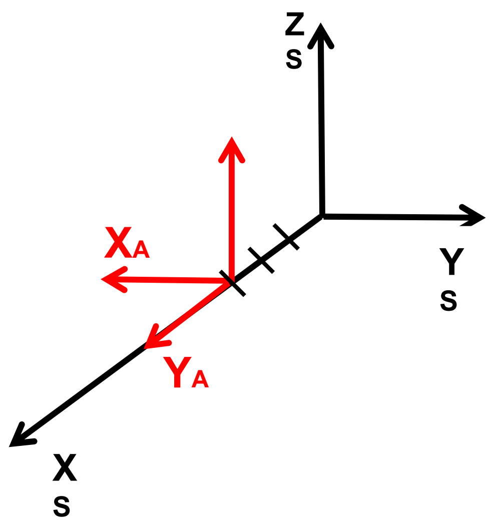
- **EJERCICIO 5:**

  Calcular la MTH del sistema {A} respecto de {S} ${}^{S}_{A}T$.



EJERCICIO 5:

$$ {}^{S}_{A}T = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & Px \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} & Py \\ R_{3,1} & R_{3.2} & R_{3,3} & Pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



Coordenadas del origen de {A} respecto de {S}

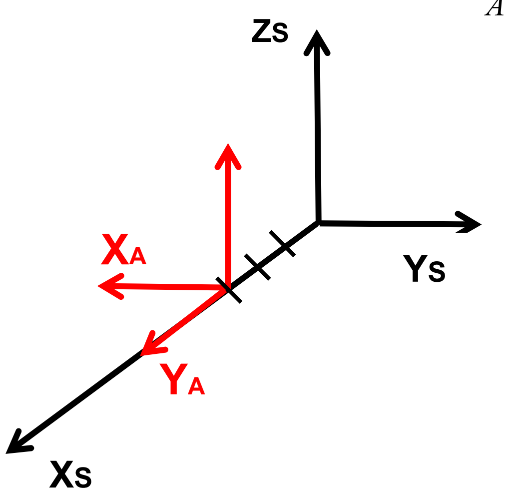
$$ {}^{S}_{A}T = \begin{bmatrix} C(-90) & -S(-90) & 0 & 3 \\ -S(-90) & C(-90) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Rotación de {A} respecto de {S}

Giro en el eje Z de -90º

EJERCICIO 5:

La matriz ${}^{S}_{A}T$



Coordenadas del vector unitario **ix {S} respecto de {A}** suponiendo que no hubiera traslación

Coordenadas del vector unitario **jy {S} respecto de {A}**

Coordenadas del vector unitario **kz {S} respecto de {A}**

$$ {}^{S}_{A}T = \begin{bmatrix} \boxed{0 \quad 1 \quad 0} & 3 \\ \boxed{-1 \quad 0 \quad 0} & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} & 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} $$

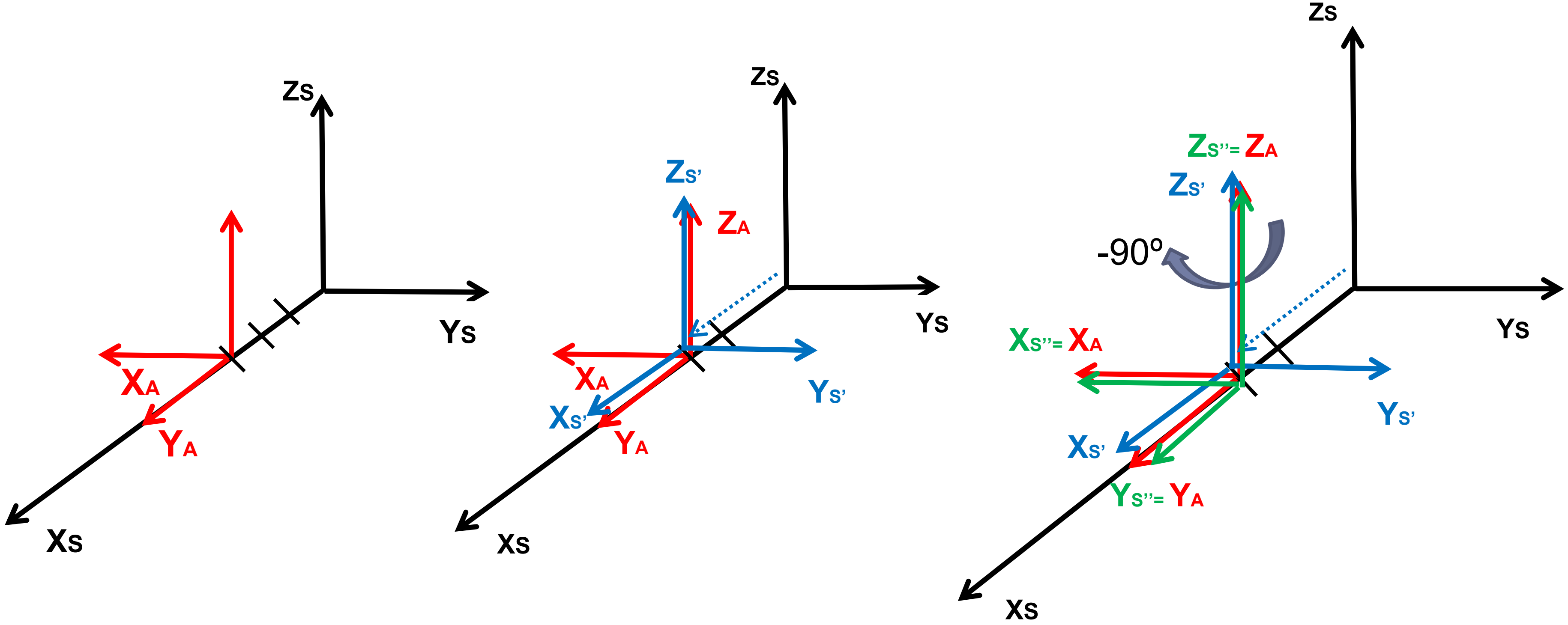
Coordenadas del vector unitario **ix {A} respecto de {S}** suponiendo que no hubiera traslación

Coordenadas del vector unitario **jy {A} respecto de {S}**

Coordenadas del vector unitario **kz {A} respecto de {S}**

$$ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- **EJERCICIO 5:** ${}^{S}_{A}T$
  - **1) Primera opción:**
    - **Desplazar el sistema {S} un vector p=(3,0,0), obteniendo el sistema {S'}**
    - **Girar T(Z, -90º) respecto el sistema Móvil {S'}, obteniendo el sistema {S''}= {A}**

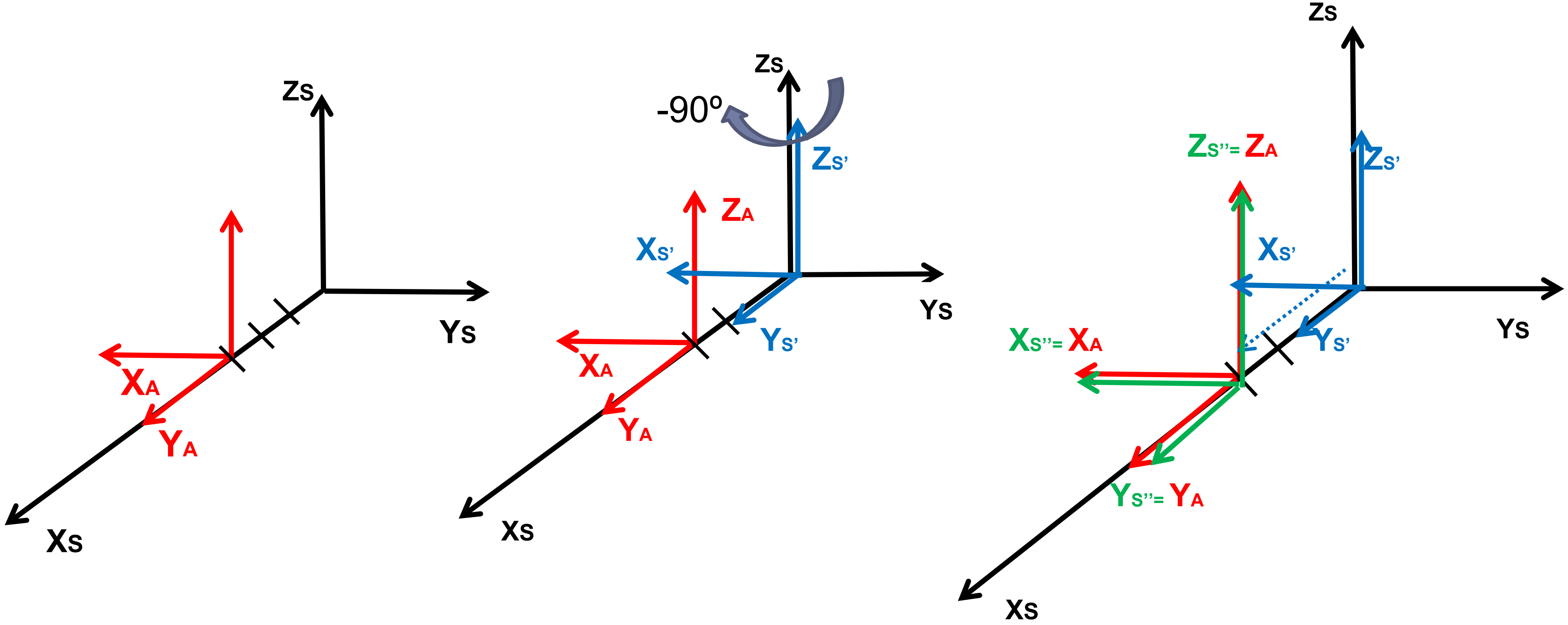


- **EJERCICIO 5:** $^{S}_{A}T$
  - **1) Primera opción:**
    - **Desplazar el sistema {S} un vector p=(3,0,0), obteniendo el sistema {S'}**
    - **Girar T(Z, -90º) respecto el sistema Móvil {S'}, obteniendo el sistema {S''}= {A}**

$$^{S}_{A}T = T(3,0,0)T(z,-90)$$

$$^{S}_{A}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C(-90) & -S(-90) & 0 & 0 \\ -S(-90) & C(-90) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **EJERCICIO 5:** ${}^{S}_{A}T$
  - **3) Segunda opción:**
    - **Girar T(Z, -90º) obteniendo el sistema {S'}**
    - **Desplazar el sistema {S'} un vector p=(0,3,0) respecto del sistema móvil {S'},obteniendo el sistema {S'}= {A}**



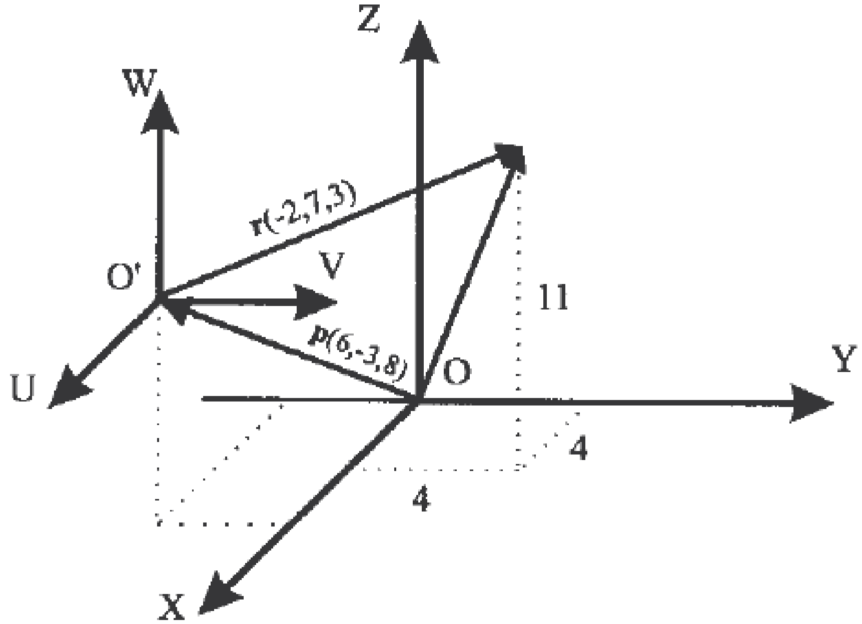
- **EJERCICIO 5:** ${}^{S}_{A}T$
  - **3) Segunda opción:**
    - **Girar T(Z, -90º) obteniendo el sistema {S'}**
    - **Desplazar el sistema {S'} un vector p=(0,3,0) respecto del sistema móvil {S'},obteniendo el sistema {S'}= {A}**

$$ {}^{S}_{A}T = T(z,-90)T(0,3,0) $$

$$ {}^{S}_{A}T = \begin{bmatrix} C(-90) & -S(-90) & 0 & 0 \\ -S(-90) & C(-90) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- **EJERCICIO 6:**

  Según la figura el sistema {S'} O'UVW está trasladado un vector **P**(6,-3,8) con respecto del sistema fijo {S} OXYZ. Calcular las coordenadas del vector **r** en el sistema OXYZ (^{S}r), sabiendo que las coordenadas del vector r en el sistema O'UVW son $^{S'}r$ =(-2,7,3).



Jon Legarreta / Raquel Martinez

- **EJERCICIO 6:**

Cambio de coordenadas de un vector:

Siendo la MTH una traslación:

No hay rotación → R_{3x3} es la matriz unidad I_{3x3}

Traslación del origen → P_{xyz}=(6,-3,8)

$$ {}^{S}_{S'}T(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & Px \\ 0 & 1 & 0 & Py \\ 0 & 0 & 1 & Pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

EJERCICIO 6:

El vector ${}^{S'}r$ (-2,7,3), respecto a eje OXYZ:

$$ {}^{S}r = {}^{S}_{S'}T(p) \cdot {}^{S'}r $$

$$ \begin{bmatrix} rx \\ ry \\ rz \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ru \\ rv \\ rw \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ \boxed{{}^{S'}r = (4,4,11)} $$

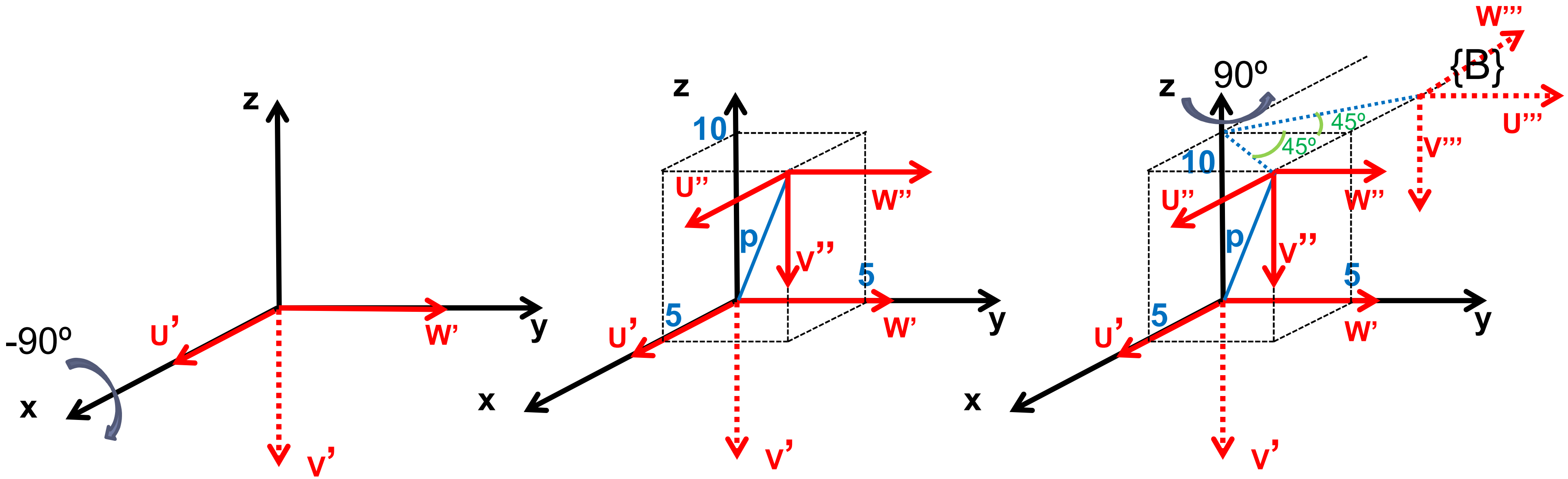
- **EJERCICIO 7:**

  Se quiere obtener la matriz de transformación que representa al sistema {B} obtenido a partir del sistema {A} mediante un giro ángulo -90º alrededor del eje **OX**, seguido de una trasladación de vector $\mathbf{p}_{xyz}$(5,5,10) y posteriormente un giro de un ángulo 90º alrededor del eje **OZ**.

  1) Realizar los gráficos del movimiento del eje
  2) Calcular la matriz de transformación AB
  3) Calcular las coordenadas $\mathbf{r}_{xyz}$ del vector **r** con coordenadas $\mathbf{r}_{uvw}$(-3,3,3)
  4) Calcular las coordenadas $\mathbf{r}_{uvw}$ del vector **r** con coordenadas $\mathbf{r}_{xyz}$(5,5,10)

- **EJERCICIO 7:**

  1) Realizar los gráficos del movimiento del eje



 Jon Legarreta / Raquel Martinez

- **EJERCICIO 7:** **2)** La secuencia de transformación es:

1 Rotación de -90º en el eje OX→ T(x, -90)

2 Traslación OXYZ→ T(p)=T(5,5,10)

3 Rotación de 90º en el eje OZ→ T(z, 90)

$$
{}^{A}_{B}T = T(z,90)T(p)T(x,-90) = \overset{3}{\begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}
$$

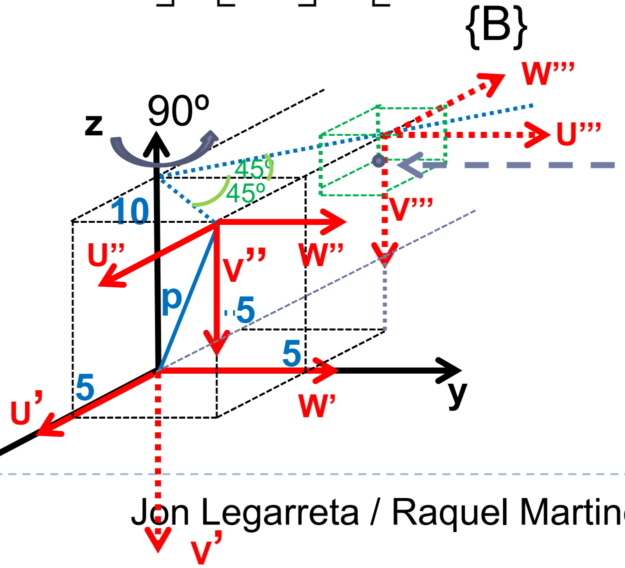
$$
\boxed{{}^{A}_{B}T =} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}
$$

- **EJERCICIO 7:**

3) Calcular las coordenadas **r**$_{xyz}$ (^{A}r) del vector **r** con coordenadas **r**$_{uvw}$ (^{B}r) (-3,3,3).

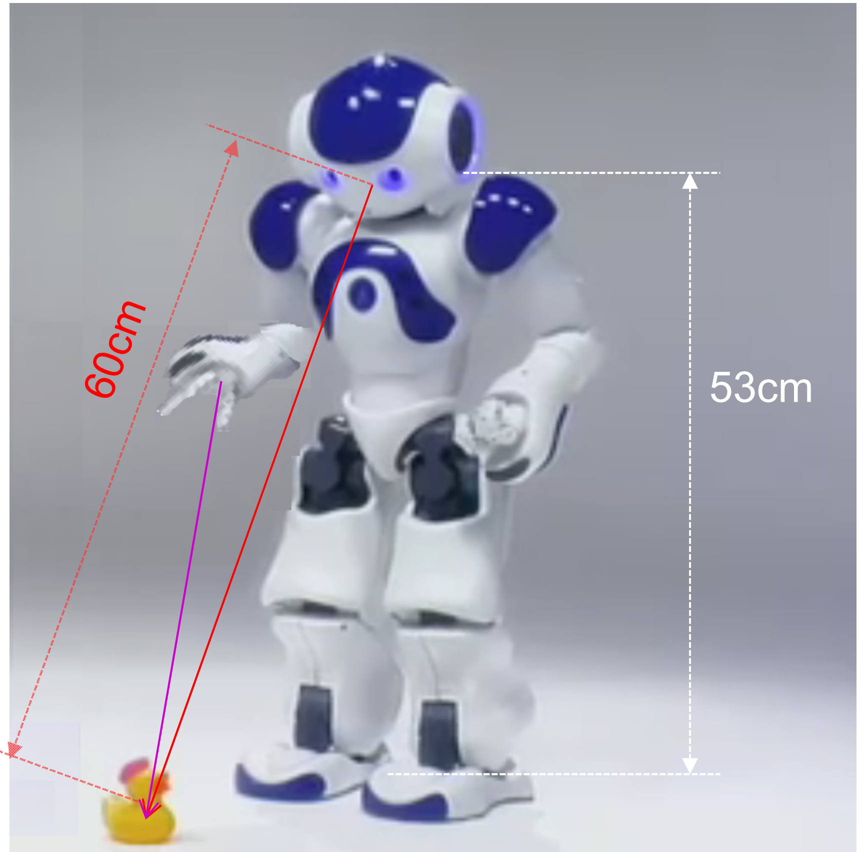
$$^{A}r = ^{A}_{B}T \cdot ^{B}r$$

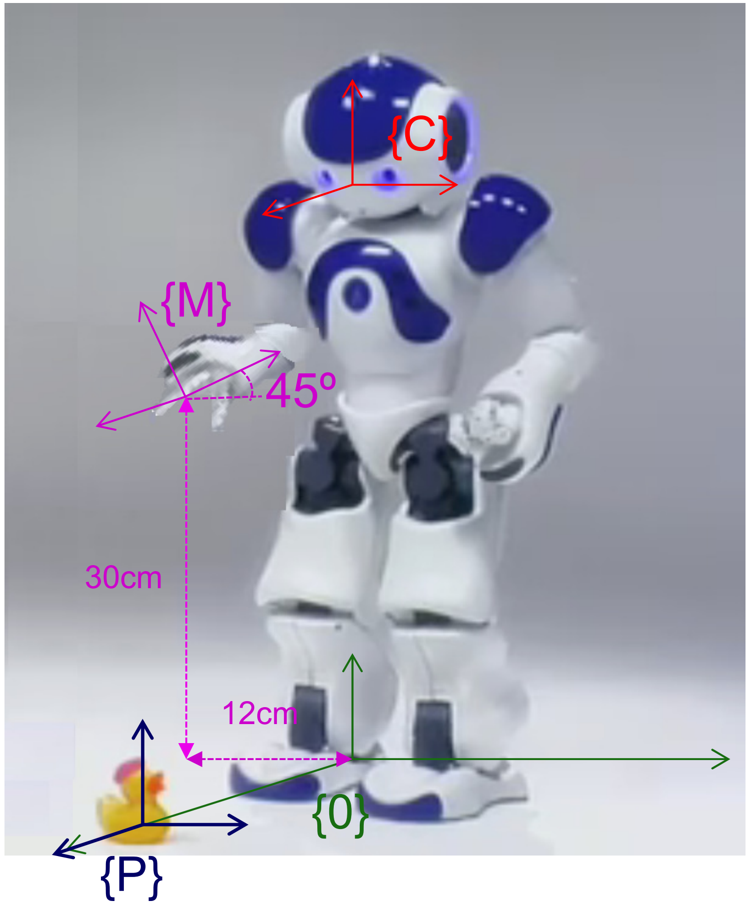
$$\begin{bmatrix} rx \\ ry \\ rz \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ru \\ rv \\ rw \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Jon Legarreta / Raquel Martinez

- **EJERCICIO 8:** Calcular la posición del pato respecto de la mano y la MTH que localiza el sistema asociado al pato con respecto de la Mano

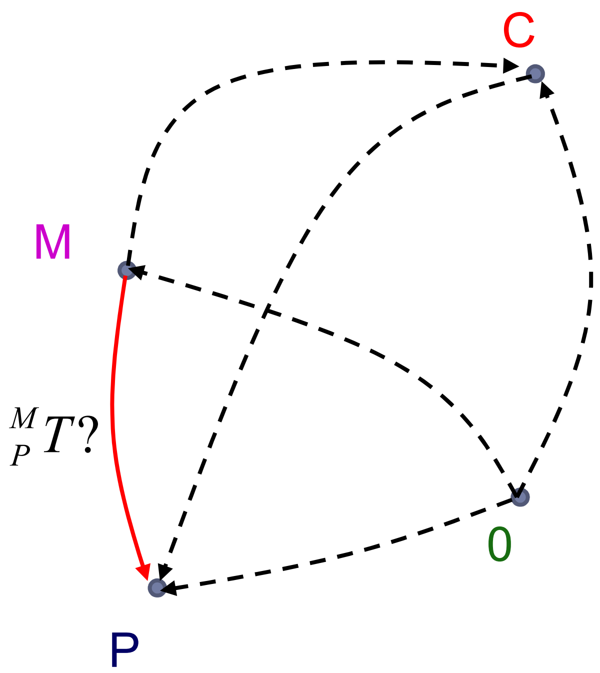


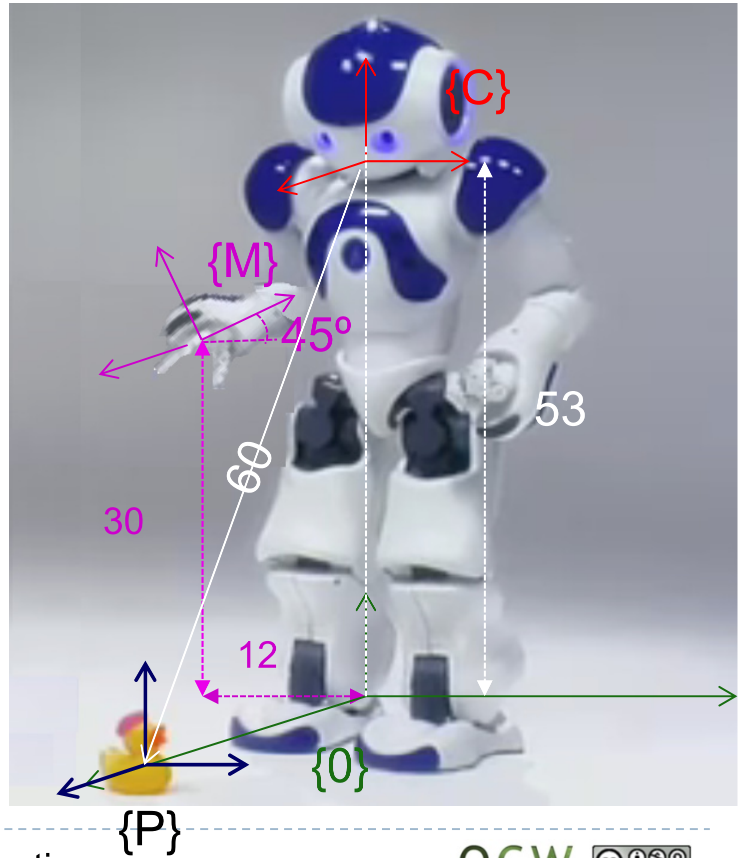


Jon Legarreta / Raquel Martinez

- **EJERCICIO 8:** ${}^{M}_{P}T = ?$

$$ {}^{M}Pato? \Rightarrow {}^{M}Pato = {}^{M}_{P}T \cdot {}^{P}Pato $$





- **<u>EJERCICIO 8:</u>**

Obtener la matriz que localiza sistema {P} y respecto el {M}

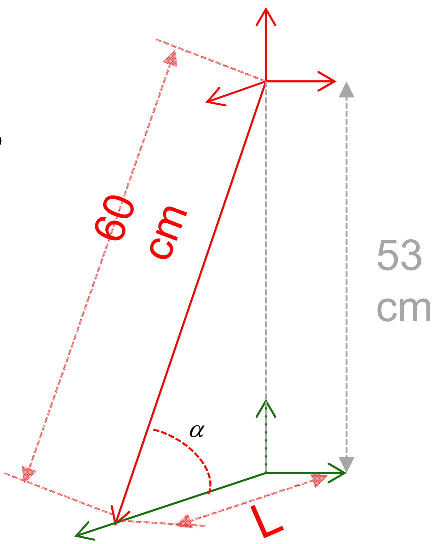
1- Giro -45 º en el eje Z(del sistema M)

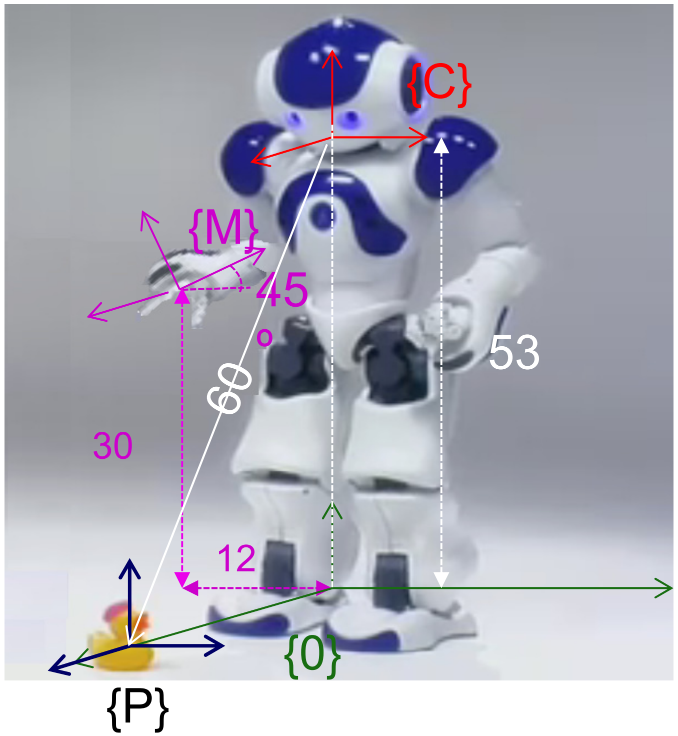
2- Desplazo (L,12,-30) del sistema M'

$$sen(\alpha) = \frac{53}{60} \rightarrow \alpha = 62^{o}$$

$$L = 60\cos(\alpha) = 28cm$$

$$L = \sqrt{60^2 - 53^2} = 28cm$$





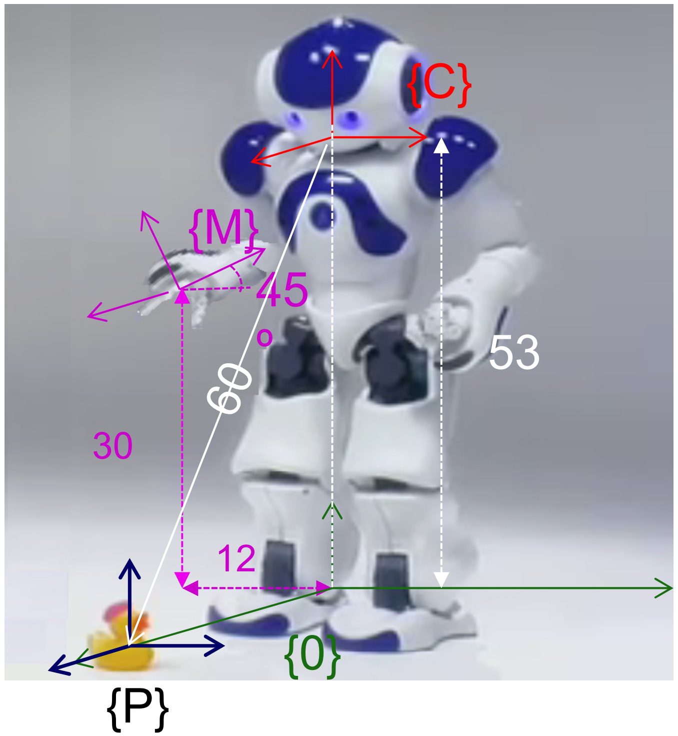
Jon Legarreta / Raquel Martinez

- **EJERCICIO 8:**

Obtener la matriz que localiza sistema {P} y respecto el {M}

1- Giro -45 º en el eje Z(del sistema M)

2- Desplazo (28,12,-30) del stma M'



$$
{}_P^M T = T(x,-45^o)T(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C(-45) & -S(-45) & 0 \\ 0 & S(-45) & C(-45) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 0.7 & 0.7 & -12.78 \\ 0 & -0.7 & 0.7 & -29.69 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

- **EJERCICIO 8:**

$$^{M}Pato = {}^{M}_{P}T \cdot {}^{P}Pato$$

$$^{M}Pato = {}^{M}_{P}T \cdot {}^{P}Pato = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 28 \\ -12.72 \\ -29.69 \end{matrix}} \\ 0 & 0.7 & 0.7 & \\ 0 & -0.7 & 0.7 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 28 \\ -12.72 \\ -29.69 \end{matrix}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{^{M}Pato = (28, -12.72, -29.69)}$$