

10

CALCULO DEL MODULO EN ENGRANAJES CILINDRICOS

1. ASPECTOS GENERALES SOBRE EL DISEÑO DE ENGRANAJES

Los engranajes son elementos de transmisión de potencia por contacto directo. Están formados por dos ruedas dentadas unidas a sus respectivos ejes, de manera que el giro y la potencia se transmiten de un eje a otro a través de una fuerza de empuje entre los dientes de las dos ruedas. Esta fuerza de empuje F se puede descomponer en sus componentes tangencial F_t y radial F_r (ver Figura 1): la componente tangencial es la encargada de transmitir la potencia, mientras que la componente radial tiene el efecto indeseado de separar los ejes entre sí. Al ángulo que forma la fuerza F con el plano tangente a las ruedas en la generatriz de contacto se le denomina ángulo de presión α , y su valor es 20° (está normalizado). La transmisión de potencia entre los ejes 1 y 2 se expresa en la siguiente ecuación:

$$Pot = Pot_1 = Pot_2 \rightarrow T_1 \cdot w_1 = T_2 \cdot w_2 \rightarrow F_t \cdot R_1 \cdot w_1 = F_t \cdot R_2 \cdot w_2 \quad (1)$$

Donde Pot es la potencia transmitida entre ejes (igual en ambos ejes), T_1 y T_2 son los momentos torsores, w_1 y w_2 las velocidades de giro, y R_1 y R_2 los radios primitivos de las ruedas 1 y 2, respectivamente. En realidad, existen pequeñas pérdidas de potencia debido al rozamiento entre dientes, por lo que la potencia de salida es ligeramente inferior a la potencia de entrada, sin embargo estas pérdidas se suelen considerar despreciables a efectos de cálculo.

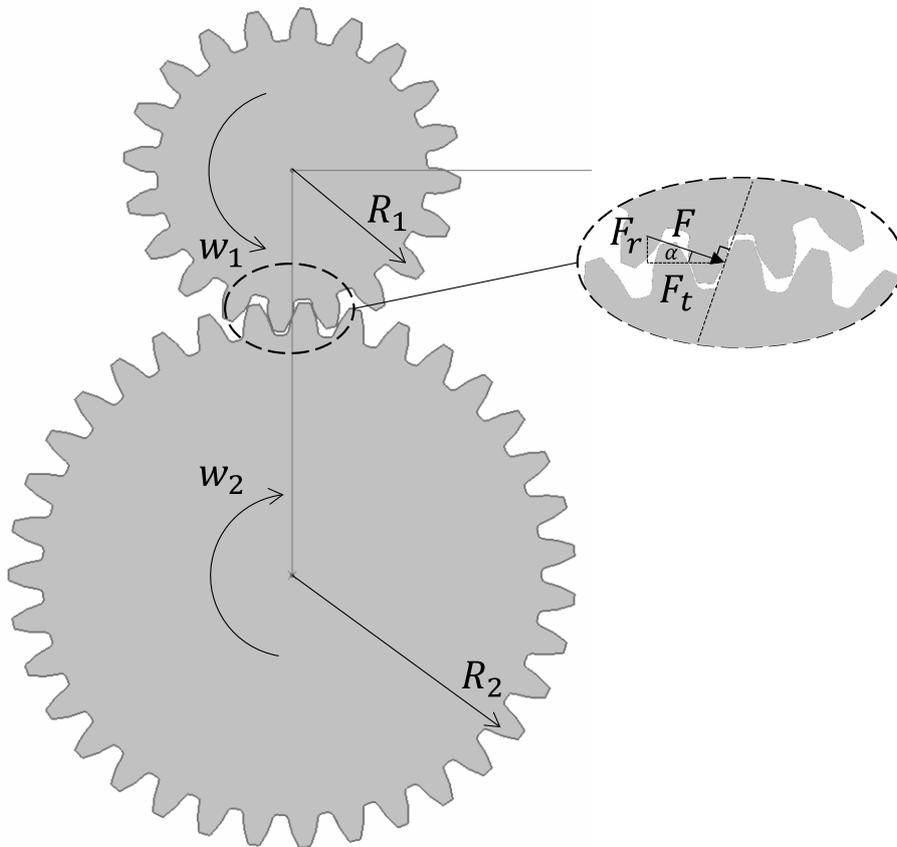


Figura 1. Transmisión de potencia en engranajes.

Un concepto ampliamente utilizado es el de la relación de transmisión i , definido a partir de la ecuación (1) como:

$$i = w_1/w_2 = R_2/R_1 = T_2/T_1 \quad (2)$$

Obsérvese que según la ecuación (2) la rueda dentada más pequeña es la que más rápido gira y la que menos par soporta. Las principales dimensiones geométricas de una rueda dentada (radio primitivo R , el paso entre dientes p ...) están definidos en base al valor de su

módulo m , tal y como se observa en la Figura 2. Siendo m el parámetro básico de una rueda dentada, sus valores están normalizados (ver Tabla 1): la serie I es la serie recomendada, que se debe utilizar preferentemente; la serie II es la serie complementaria, y la serie III es la serie especial, a utilizar sólo en casos excepcionales. Los países anglosajones, en lugar del módulo m utilizan el Diametral Pitch, definido como $DP=25.4/m$ (con el módulo en mm, y el Diametral Pitch en pulgadas⁻¹). Este parámetro tiene sus propios valores normalizados, indicados en la Tabla 2.

Como se observa en la Figura 2, a la altura del radio primitivo el ancho del diente y el hueco entre dientes son iguales a la mitad del paso, $p/2=\pi\cdot m/2$, de manera que dos ruedas dentadas deben tener el mismo módulo m para encajar entre ellos y engranar correctamente. En cuanto al radio primitivo de la rueda dentada, se observa que su valor es $R=m\cdot z/2$, donde z es el número de dientes. La distancia a entre los ejes de las ruedas 1 y 2 es, por tanto:

$$a = R_1 + R_2 = m/2 \cdot (z_1 + z_2) \quad (3)$$

Sustituyendo la expresión (3) en (2), la relación de transmisión i se puede reescribir en función de los números de dientes:

$$i = R_2/R_1 = z_2/z_1 \quad (4)$$

De la fórmula se deduce que la relación de transmisión es constante al serlo también los radios y números de dientes de las ruedas.

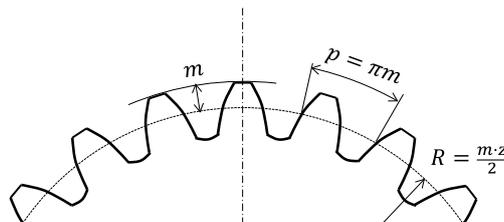


Figura 2. Dimensiones principales de la rueda dentada en base al módulo

serie		
I	II	III
1	1.125	3.25
1.25	1.375	3.75
1.5	1.75	6.5
2	2.25	
2.5	2.75	
3	3.5	
4	4.5	
5	5.5	
6	7	
8	9	
10	11	
12	14	
16	18	
20	22	
25	28	
32	26	
40	45	
50		

Tabla 1. Valores normalizados del módulo m (en mm)

DP (pulg ⁻¹)	m normalizado más cercano (mm)
1	25
1.25	20
1.5	16
2	12
2.5	10
3	8
4	6
5	5
6	4
8	3
10	2.5
12	2
16	1.5
20	1.25
24	1

Tabla 2. Valores normalizados de Diametral Pitch DP, y módulos m normalizados más cercanos

Las ruedas dentadas se fabrican de materiales muy variados: fundición gris (ASTM 20, 30, 40, 60...), hierros fundidos de alta resistencia, aceros forjados, moldeados, aceros al medio carbono y aleados generalmente a base de Mn, Cr, Ni, Si (AISI 1020, 1040, 1050, 3140, 4140, 4340, 4620, 5120, 6150, 8620, 8650, 9310...), bronce (bronce fosforado o de estaño, bronce de manganeso, bronce de aluminio, bronce de silicio...), e incluso materiales no metálicos como nylon, acetal, policarbonato, poliuretano, poliéster termoplástico, poliamida, fenólicos, etcétera.

Las ruedas metálicas se suelen someter a tratamientos que mejoran sus propiedades mecánicas. Tratamientos como el templado por llama, por inducción, por cementación y por nitruración, consiguen una gran dureza en la capa superficial de los dientes de engrane, superando los 50 HRC. Las ruedas de bronce presentan como ventaja su alta resistencia a la corrosión y al desgaste y su bajo coeficientes de fricción. Por último, los engranajes no metálicos presentan frente a los metálicos una marcha más silenciosa y un menor peso, aunque no son aptos para transmitir grandes potencias.

En cuanto a los fallos en engranajes, éstos se deben típicamente a las siguientes causas:

- a) Problemas de servicio o montaje (75 %).
- b) Problemas en el tratamiento térmico de los engranajes (16%)
- c) Deficiencias en el diseño (7%).
- d) Problemas de fabricación debidos al mecanizado (1%).
- e) Problemas imputables al material (1%).

De estos datos se concluye que los procedimientos de diseño de engranajes son suficientemente fiables, y que la mayoría de los fallos se deben a procesos defectuosos de fabricación, montaje y verificación de engranajes. El deterioro que puede presentar el dentado de los engranajes es fundamentalmente de dos tipos:

- a) Rotura del diente (ver Figura 3a): se refiere a la fractura del diente por las tensiones debidas a las fuerzas transmitidas por el engranaje, básicamente por las tensiones normales de flexión. Este fallo es catastrófico ya que, al producirse, las condiciones de funcionamiento empeoran considerablemente (partículas sueltas que interfieren con otros componentes, choques ocasionados por falta de un diente o parte del mismo...).
- b) Fallos superficiales en el diente (ver Figura 3b): se manifiestan en forma de

desgastes, gripado, picado y exfoliación (los dos primeros por lubricación defectuosa, los dos últimos por tensiones de contacto excesivas). Este fallo es progresivo, pudiendo ser detectado antes de que se vean afectados otros componentes mecánicos.

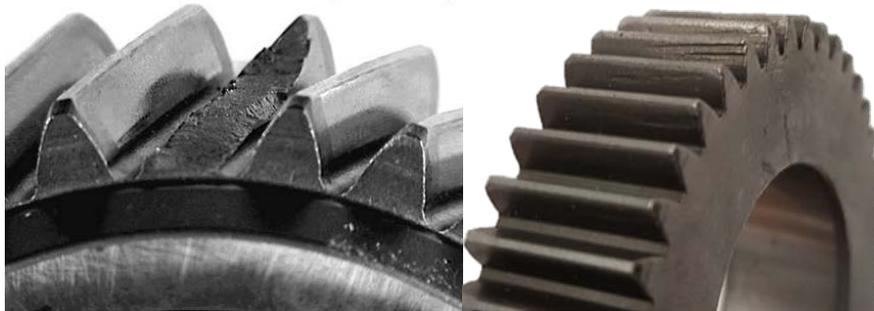


Figura 3. Fallos en la rueda dentada: a) rotura del diente b) fallos superficiales

A la hora de diseñar un engranaje, el primer paso consiste en calcular el módulo que es necesario para evitar estos dos tipos de fallo. En este cálculo, se recomienda utilizar un coeficiente de seguridad mayor frente a la rotura del diente que frente a los fallos superficiales, ya que el primer fallo es catastrófico y el segundo progresivo.

Según la ecuación (3), para que se cumpla una distancia entre ejes a se puede optar por un módulo alto y unos números bajos de dientes, o viceversa. En este sentido, es recomendable utilizar ruedas con módulo bajo y número de dientes alto, ya que así el coeficiente de engrane es mayor y por tanto el esfuerzo se divide entre más dientes y con ello se consigue incrementar la duración del engranaje.

Una vez seleccionado el módulo adecuado para la rueda, ésta se talla con dicho módulo mediante herramientas normalizadas. Las herramientas más empleadas son la cremallera talladora (mostrada en la Figura 4), la fresa madre (la más habitual) y la fresa de forma.



Figura 4. Cremallera de tallado de engranajes.

2. CALCULO DEL MÓDULO DE LOS ENGRANAJES CILÍNDRICOS RECTOS POR EL CRITERIO DE LA FLEXIÓN: FÓRMULA DE LEWIS.

El diseño de engranajes a rotura del diente es un problema complejo, principalmente porque se basa en un proceso iterativo de prueba–error. Existen varios métodos que pueden utilizarse para llevar a cabo el diseño; en este libro se va a explicar el método más sencillo, eminentemente teórico, que da como resultado la fórmula de Lewis de cálculo del módulo. Pese a su simplicidad, esta fórmula es útil para un cálculo preliminar del módulo, e incluso es suficiente para diseños de poca responsabilidad. Para cálculos de mayor responsabilidad, la fórmula de Lewis se adapta de acuerdo a una de las normas existentes (AGMA, ISO...).

La fórmula de Lewis se basa en el cálculo de la tensión en la base del diente del engranaje, analizando dicho diente como una viga empotrada sometida a la fuerza entre dientes F (ver Figura 5). Durante el proceso de engrane entre dos dientes, el contacto se produce a diferentes alturas a lo largo del tiempo, tal y como se muestra en la Figura 6. El instante más desfavorable, ilustrado en la Figura 5, es aquel en el que la fuerza actúa en la cabeza del diente, al producir un momento máximo en la base. Según se ha mencionado anteriormente, la fuerza F se puede dividir en dos componentes:

$$F_t = F \cdot \cos\alpha \quad (5a)$$

$$F_r = F \cdot \sin\alpha = F_t \cdot \tan\alpha \quad (5b)$$

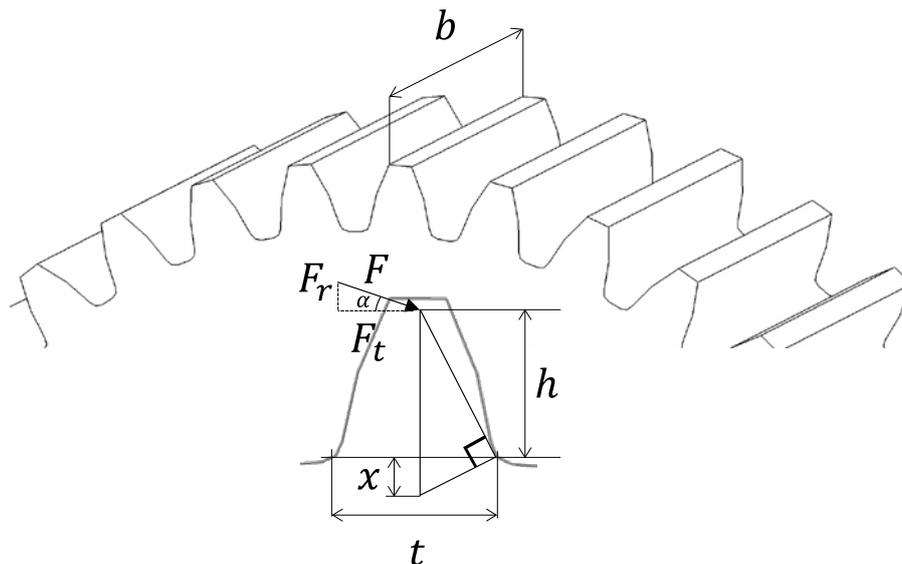


Figura 5. Diente con la fuerza F actuando en la cabeza

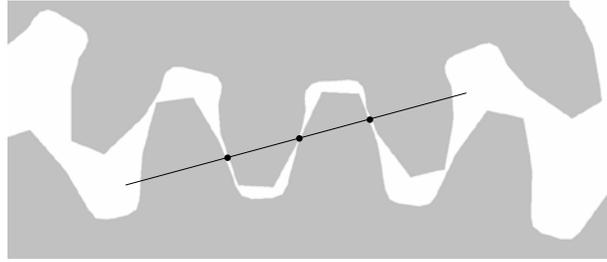


Figura 6. Contacto entre dientes durante el tiempo de engrane

La componente radial F_r produce una tensión de compresión uniforme en la sección de la base del diente, mientras que la componente tangencial F_t produce una tensión de flexión con media sección a tracción y media a compresión. La tensión por compresión se suele despreciar por dos motivos: por un lado, su magnitud es considerablemente menor que las otras tensiones mencionadas; por otro lado, los materiales empleados para la fabricación de engranajes tienen una mayor resistencia a compresión que a tracción, con lo que esta simplificación está del lado de la seguridad. Según esto, si se trata el diente como una viga empotrada en la base y sometida únicamente a la fuerza tangencial F_t , la tensión máxima resulta ser:

$$\sigma = \frac{M \cdot t/2}{I} = \frac{F_t \cdot h \cdot t/2}{b \cdot t^3/12} = \frac{6 \cdot F_t \cdot h}{b \cdot t^2} \quad (6)$$

Donde b es el ancho del diente (ver Figura 6). Por semejanza de los triángulos de la Figura 6:

$$\frac{t/2}{x} = \frac{h}{t/2} \quad (7)$$

Combinando las ecuaciones (6) y (7):

$$\sigma = \frac{F_t}{b \cdot 2 \cdot x/3} \quad (8)$$

Multiplicando y dividiendo el denominador por el paso $p = \pi \cdot m$ (ver Figura 2):

$$\sigma = \frac{F_t}{b \cdot p \cdot 2 \cdot x/(3 \cdot p)} = \frac{F_t}{b \cdot p \cdot y} \quad (9)$$

Donde $y = 2x/3p$. Como p y x son parámetros geométricos que dependen del tamaño y perfil del diente, el factor “ y ” también lo es. En lugar de “ y ” se suele emplear el denominado factor de forma de Lewis, de valor $Y = \pi \cdot y$, que se encuentra tabulado en la Tabla 3 en función del número de dientes de la rueda dentada.

Número de dientes	Y	Número de dientes	Y
12	0.245	28	0.353
13	0.261	30	0.359
14	0.277	34	0.371
15	0.290	38	0.384
16	0.296	43	0.397
17	0.303	50	0.409
18	0.309	60	0.422
19	0.314	75	0.435
20	0.322	100	0.447
21	0.328	150	0.460
22	0.331	300	0.472
24	0.337	400	0.480
26	0.346	Cremallera	0.485

Tabla 3. Valores del factor de forma de Lewis Y.

Sustituyendo $p=\pi \cdot m$ y $Y=\pi \cdot y$ en la expresión (9), se llega a la expresión conocida como ecuación de Lewis:

$$\sigma = \frac{F_t}{b \cdot m \cdot Y} \quad (10)$$

Donde F_t está en kg, b y m en cm, Y es adimensional y en consecuencia σ está en kg/cm². El ancho de la rueda b también se puede expresar en base al módulo, $b=\Psi \cdot m$; a Ψ se le denomina factor de forma, es adimensional y suele adoptar valores recomendados en función de la aplicación del engranaje (ver Tabla 4).

FACTOR DE GUIADO Ψ	
Flancos en bruto, poca velocidad y montaje deficiente	5
Calidad y condiciones normales	10
Tallado muy exacto, montaje muy preciso y buen asiento de cojinetes y apoyo rígido de estos	15-20 (casos excepcionales hasta 30)

Tabla 4. Valores recomendados del factor de forma Ψ .

Además, según la ecuación (1):

$$F_t = \frac{Pot}{w \cdot R} \quad (11)$$

Las variables de esta ecuación (11) tienen las unidades del Sistema Internacional, con la fuerza en N, la potencia en W, la velocidad angular en rad/seg y el radio en m. Para poder introducir la ecuación (11) en la ecuación (10), hay que pasar N a kg y m a cm; además, por comodidad interesa que la potencia esté en CV y la velocidad angular en rpm. La ecuación

(11), expresada en kg, cm, CV y rpm queda tras hacer los correspondientes cambios de unidades, queda:

$$F_t = 71620 \cdot \frac{Pot}{w \cdot R} \quad (12)$$

Ahora sí, sustituyendo la ecuación (12) en la ecuación (10):

$$\sigma = \frac{71620 \cdot Pot}{w \cdot R \cdot b \cdot m \cdot Y} \quad (13)$$

Al ser $b = \Psi \cdot m$ y $R = m \cdot z / 2$:

$$\sigma = \frac{143240 \cdot Pot}{w \cdot z \cdot \Psi \cdot m^3 \cdot Y} \quad (14)$$

De donde se despeja el módulo m:

$$m = \sqrt[3]{\frac{143240 \cdot Pot}{w \cdot z \cdot \Psi \cdot \sigma \cdot Y}} = 52.32 \cdot \sqrt[3]{\frac{Pot}{w \cdot z \cdot \Psi \cdot \sigma \cdot Y}} \quad (15)$$

Con el módulo m en cm, la potencia Pot en CV, la velocidad angular w en rpm y la tensión σ en kg/cm². La tensión en el diente σ tiene un valor máximo admisible σ_{adm} (ver Tabla 5), por debajo de cual no se produce el fallo por rotura del diente. Así, se garantiza que $\sigma < \sigma_{adm}$ y por tanto no se produce el fallo si el módulo m de la rueda está por encima de un valor mínimo:

$$m \geq 52.32 \cdot \sqrt[3]{\frac{Pot}{w \cdot z \cdot \Psi \cdot \sigma_{adm} \cdot Y}} \quad (16)$$

A esta expresión se le denomina fórmula de Lewis para el cálculo del módulo.

Según se ha explicado, las dos ruedas del engranaje deben tener el mismo módulo para engranar correctamente. El módulo siempre se calcula para la rueda más pequeña del engranaje ya que, según la ecuación (16), es la que proporciona un valor de módulo más restrictivo. Esto tiene su lógica si se piensa que la rueda pequeña gira a mayor velocidad, de manera que para cuando un diente de la rueda grande engrana, un diente de la rueda pequeña ha engranado varias veces, por lo que trabaja más y por tanto es más susceptible de fallar.

MATERIAL	TRATAMIENTO TÉRMICO	DUREZA O RESISTENCIA MÍNIMA	TENSIÓN ADMISIBLE σ_{adm} (Mpa)	
			Recto, Helicoidal y Doble helicoidal	Cónico
<i>Acero</i>	Normalizado	140 BHN	130-172	76
	Temple y revenido	180 BHN	172-227	96
	Temple y revenido	300 BHN	248-323	131
	Temple y revenido	450 BHN	303-406	172
	Carburizado	55 Rc	375-447	189
	Carburizado	60 Rc	413-482	207
	Temple por inducción o a la llama. Patrón de dureza 1*	54 Rc	310-375	
	Patrón de dureza 1*	54 Rc en la superficie	151	93
	AISI 4140 Nitrurado	53Rc en la superficie y 300 BHN en el núcleo	254-289	138
<i>Fundición gris</i>				
AGMA Grado 20			34	19
AGMA Grado 30		175 BHN	58	32
AGMA Grado 40		200 BHN	89	48
<i>Fundición nodular</i>				
ASTM Grado 60-40-18	Recocido		103	55
ASTM Grado 80-55-06			137	76
ASTM Grado 100-70-03	Normalizado		179	96
ASTM Grado 120-90-02	Templado y revenido		206	127
<i>Bronce</i>				
AGMA 2e (10%-12% Tin)		275.8 Mpa	39	21
<i>Aleación bronce - aluminio</i>				
ASTM B-148-52				
Alloy 9C-H.T.		620.1 Mpa	162	83

1*: Para valores de dientes de $m > 4$ mm.

Tabla 5. Valores de la tensión admisible para el fallo por rotura del diente, σ_{adm} (en MPa).

Siguiendo con la fórmula de Lewis, en el diseño de un engranaje el dato de partida generalmente no suele ser el número de dientes, sino la distancia entre ejes a y la relación de transmisión i que debe cumplir dicho engranaje. Siendo la rueda 1 la rueda pequeña (o piñón), según las expresiones (2) y (4) la relación de transmisión i es mayor que 1:

$$i = w_1/w_2 = z_2/z_1 \geq 1 \quad (17)$$

La distancia entre ejes a de la ecuación (3), en función del número de dientes de la rueda menor z_1 y de la relación de transmisión i , queda:

$$a = R_1 + R_2 = m/2 \cdot z_1 \cdot (i + 1) \quad (18)$$

De manera que el número de dientes z_1 es:

$$z_1 = \frac{2 \cdot a}{m \cdot (i + 1)} \quad (19)$$

Poniendo la distancia a en cm, y sustituyendo la ecuación (19) en (16):

$$m \geq 52.32 \cdot \sqrt[3]{\frac{Pot \cdot m \cdot (i + 1)}{w \cdot 2 \cdot a \cdot \Psi \cdot \sigma_{adm} \cdot Y}} \quad (20)$$

De donde, operando:

$$m \geq 267.62 \cdot \sqrt[2]{\frac{Pot \cdot (i + 1)}{w \cdot a \cdot \Psi \cdot \sigma_{adm} \cdot Y}} \quad (21)$$

Se recuerda que en esta expresión m está en cm, Pot en CV, w en rpm, a en cm, σ_{adm} en kg/cm², y que $i \geq 1$. No obstante, en el cálculo del módulo con la fórmula (21) existe un problema: seleccionar el valor Y . En efecto, Y depende de z_1 , cuyo valor es desconocido. La forma de proceder es iterativamente: se escoge un valor cualquiera de Y , se calcula el módulo con la ecuación (21) y de ahí el valor de z_1 que le corresponde a ese módulo con la ecuación (19), y se comprueba si el valor de Y escogido corresponde al valor de z_1 calculado; en caso negativo, se repite el proceso. En general, este proceso converge en dos o tres iteraciones.

Tal y como se ha comentado anteriormente, el método presentado es un método sencillo y aproximado, basado en las siguientes simplificaciones:

- a) No se considera el coeficiente de engrane, que en engranajes cilíndricos rectos suele valer en torno a 1,7. Esto significa que durante el 70% del tiempo hay dos pares de dientes en contacto, mientras que en el 30% restante hay un solo par en

contacto. En consecuencia, cada diente soporta en promedio una carga considerablemente menor que F .

b) Considera una distribución uniforme de la fuerza F a lo largo del ancho b del diente. Sin embargo, las ruedas dentadas, sus ejes, los soportes, etc., son elementos elásticos que se deforman por efecto de las cargas y, en consecuencia la distribución de cargas en el flanco del diente no es uniforme.

c) No se consideran posibles oscilaciones en el valor de la fuerza F , las cuales provocan choques y esfuerzos dinámicos perjudiciales para el diente.

d) No se considera la concentración de tensiones en la base del diente.

e) No se considera el efecto de la componente radial F_r de la fuerza F .

Las normas AGMA e ISO toman como base este método, utilizando una serie de coeficientes experimentales para considerar el efecto de cada uno de estos factores y obtener de esta manera un valor más preciso del módulo.

3. CALCULO DEL MÓDULO DE LOS ENGRANAJES CILÍNDRICOS RECTOS A FALLOS SUPERFICIALES: ECUACIÓN DE HERTZ.

Los fallos superficiales son causados por las tensiones generadas por el contacto entre dientes. Si los engranajes fueran geoméricamente perfectos y completamente rígidos el contacto se daría sobre una línea a lo largo del ancho del diente, al no ser así en la práctica el contacto se da sobre una superficie. Al cálculo del módulo a fallos superficiales se le denomina habitualmente cálculo a duración y desgaste, ya que a los siguientes tipos de fallo superficial se les considera bajo el nombre general de “desgaste”:

a) Desgaste abrasivo: fallo debido a la presencia de materia extraña en el lubricante que daña la superficie del diente.

b) Desgaste corrosivo: fallo por una reacción química en la superficie del diente.

c) Picadura: fallo a fatiga debido a la aplicación repetida de ciclos de fuerza.

d) Rayado: fallo debido al contacto de metal con metal.

El desgaste y rayado son producidos por una lubricación inadecuada; para evitarlo es necesario seleccionar un lubricante con una viscosidad adecuada a las condiciones de carga y velocidad del engranaje. La picadura es principalmente un fallo a fatiga contra el cual el diseñador puede protegerse determinando la carga admisible al desgaste.

Para obtener una expresión para el cálculo del esfuerzo real de compresión en el contacto entre dientes, se parte de la ecuación de Hertz para el contacto entre dos cilindros. Asumiendo que el área de contacto es pequeña en relación a las dimensiones de los cilindros, el semiancho a del área de contacto de dos cilindros de diámetro d_1 y d_2 y anchura b comprimidos entre sí por una fuerza F es (ver Figura 7):

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot F}{\pi \cdot b} \cdot \frac{\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}}{\frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2}}} \quad (22)$$

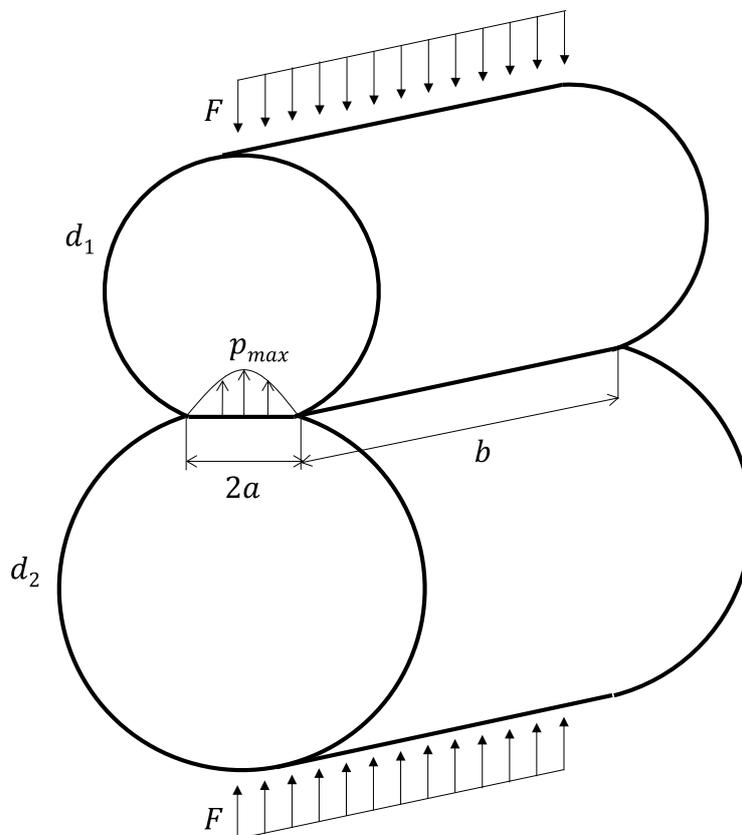


Figura 7. Contacto entre dos cilindros.

Donde E_1 y E_2 son los módulos elásticos, y ν_1 y ν_2 son los coeficientes de Poisson de los materiales de cada cilindro. La presión de contacto tiene una distribución semielíptica, como se ilustra en la Figura 7, con un valor máximo en la mitad:

$$p_{max} = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot a \cdot b} \quad (23)$$

Sustituyendo la expresión (23) en (22), y elevando al cuadrado:

$$p_{max}^2 = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot b} \cdot \frac{\frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2}}{\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}} \quad (24)$$

Al adaptar la ecuación de Hertz a engranajes rectos, se considera que el contacto entre dientes se da en el punto primitivo, tal y como se muestra en la Figura 8. El perfil de los dientes tiene forma de evolvente y no de circunferencia, es decir no se puede considerar que el contacto entre dos dientes sea un contacto entre dos cilindros. No obstante, por las propiedades de la evolvente (que quedan fuera del alcance de este libro) se demuestra que en las proximidades del punto de contacto, el perfil de evolvente se puede aproximar por una circunferencia de radio $R_1 \cdot \sin \alpha$ (ver Figura 8).

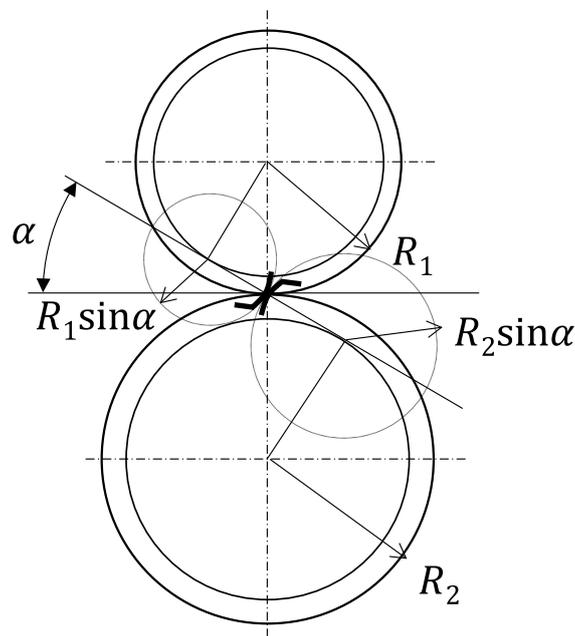


Figura 8. Aproximación de los perfiles de los dientes mediante circunferencias en el punto de contacto.

De esta forma, el contacto entre dientes se puede estudiar como si de un contacto entre cilindros de diámetro $d_1 = 2R_1 \cdot \sin \alpha$ y $d_2 = 2R_2 \cdot \sin \alpha$ y anchura b . La presión máxima de compresión en el contacto, denominada σ_c cuando los dientes están en contacto sobre el punto primitivo (rodadura pura), es:

$$\sigma_c^2 = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot b} \cdot \frac{\frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2}}{\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}} \quad (25)$$

Suponiendo que el material de los dos dientes en contacto es acero ($\nu_1 = 0.3$), y sustituyendo $d = 2 \cdot r$:

$$\sigma_c^2 = 0.35 \cdot \frac{F}{b} \cdot \frac{\frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2}}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}} \quad (26)$$

En este momento se definen las variables auxiliares r_m (radio medio de curvatura) y E (valor medio del módulo de elasticidad):

$$\frac{1}{r_m} = \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2} \quad (27a)$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \quad (27b)$$

Quedando la ecuación (26):

$$\sigma_c^2 = 0.35 \cdot \frac{F}{b} \cdot \frac{1}{\frac{2}{r_m} \cdot \frac{1}{E}} \quad (28)$$

Despejando la fuerza de contacto entre dientes F :

$$F = \frac{b \cdot \sigma_c^2 \cdot r_m}{0.175 \cdot E} \quad (29)$$

En lugar de trabajar con σ_c , en la práctica se emplea la presión de rodadura K :

$$F = 2 \cdot K \cdot b \cdot r_m \quad (30)$$

Combinando las expresiones (29) y (30):

$$K = 2.86 \cdot \frac{\sigma_c^2}{E} \quad (31)$$

Sustituyendo las relaciones anteriormente obtenidas $r_1=R_1 \cdot \sin\alpha$, $r_2=R_2 \cdot \sin\alpha$ y $i=R_2/R_1$ en la ecuación (30):

$$F = 2 \cdot K \cdot b \cdot \frac{1}{\frac{1}{r_m}} = 2 \cdot K \cdot b \cdot \frac{1}{\frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2}} = 2 \cdot K \cdot b \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1 \cdot \sin\alpha} \pm \frac{1}{R_2 \cdot \sin\alpha}} \quad (32)$$

Que, operando dan lugar a:

$$F = 2 \cdot K \cdot b \cdot R_1 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{i}{i \pm 1} \quad (33)$$

Sustituyendo $b=\Psi \cdot m$, $F_t=F \cdot \cos\alpha$ y $R=m \cdot z/2$:

$$F_t = 2 \cdot K \cdot \Psi \cdot m \cdot \frac{m \cdot z_1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot \frac{i}{i \pm 1} \cdot \cos\alpha \quad (34)$$

Por último, siendo $F_t=T_1/R_1$:

$$F_t = \frac{T_1}{R_1} = \frac{2 \cdot T_1}{m \cdot z_1} = 2 \cdot K \cdot \Psi \cdot m \cdot \frac{m \cdot z_1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \frac{i}{i \pm 1} \cdot \cos \alpha \quad (35)$$

De donde se despeja el módulo:

$$m = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot T_1 \cdot (i \pm 1)}{K \cdot \Psi \cdot z_1^2 \cdot i \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}} \quad (36)$$

Para que no se produzca el fallo superficial, la presión K debe ser menor que un valor máximo admisible K_{adm} . Para ello, el módulo m debe tener un valor mínimo:

$$m \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot T_1 \cdot (i \pm 1)}{K_{adm} \cdot \Psi \cdot z_1^2 \cdot i \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}} \quad (37)$$

Donde el módulo m está en cm, el par torsor T en kg·cm, la presión admisible de rodadura K_{adm} en kg/cm², y se recuerda que $i \geq 1$.

Para obtener el valor de K_{adm} , experimentalmente se ha observado que σ_c tiene un valor máximo admisible $\sigma_{c,adm}$ (en kg/cm²):

$$\sigma_{c,adm} = 48.7 \cdot \frac{HB}{t^{1/6}} \quad (38)$$

Donde HB es la dureza Brinell del material (en kg/mm²) y t el número de ciclos de carga en millones, es decir en número de vueltas que completa la rueda en la duración prevista. El valor de t , en millones de vueltas, es:

$$t = \frac{w \cdot h \cdot 60}{10^6} \quad (39)$$

Siendo w la velocidad angular de la rueda dentada en rpm, y h la duración prevista en horas. Así, sustituyendo la ecuación (38) en la ecuación (31):

$$K_{adm} = 2.86 \cdot \frac{\sigma_{c,adm}^2}{E} \approx 6800 \cdot \frac{HB^2}{t^{1/3} \cdot E} \quad (40)$$

Donde HB está en kg/mm², y E y K_{adm} están en kg/cm². Se recuerda que E es el valor medio del módulo de elasticidad (ver ecuación 27b), siendo E_1 y E_2 los módulos de elasticidad de los materiales de las ruedas 1 y 2 del engranaje. En acero o fundición de acero (hierro fundido) $E=2100000$ kg/cm², y en fundición gris $E=1100000$ kg/cm².

Se observa por tanto que el valor de K_{adm} depende de la dureza y el coeficiente de elasticidad del material de las ruedas, y del número de ciclos que debe soportar (duración

prevista). Los valores de K_{adm} , obtenidos de la fórmula (40), vienen tabulados en la Tabla 6.

VALORES DE K_{ADM} [kg/cm ²] PARA UNA DURACIÓN DE SERVICIO DE 5000 HORAS													
Piñón o rueda de		Dureza Brinell DB (kg/mm ²)	Revoluciones/minuto del piñón o rueda										K min
			10	25	50	100	250	500	750	1000	1500	2500	
Fundición	GG-18	170	32	24	19	15	11	8.8	7.7	-	-	-	3.5
	GG-26	220	60	44	35	28	21	16.5	14.4	13	11.5	-	7
Acero moldeado	GS o St 42	125	35	26	20	16	12	9.5	8.3	7.5	6.6	5.6	4.3
Acero al carbono	St 50	155	53	39	31	25	18	14	12.5	11.5	10	8.5	5.3
	St 60	180	73	53	42	34	25	20	17	16	14	11.0	6.7
	St 70	210	98	72	57	45	33	27	23	21	18.5	15.5	9.0
Acero aleado	Acero al Mn 80-95 kg/mm ²	230	-	87	69	55	41	32	28	26	22	19	22
	Acero al Mn 90-105 kg/mm ²	260	-	-	89	70	52	41	36	33	28	24	30
	Acero templado	450	-	-	-	210	155	120	105	95	83	70	60
	Acero cement. templado	600	-	-	-	370	270	215	190	170	150	125	80

NOTAS:

Los valores arriba indicados son válidos para el caso de que el material correspondiente trabaje apareado con acero o fundición de acero. Si se aparea con fundición gris, los valores de la tabla deben multiplicarse por 1.5.

Para un valor de h diferente de 5000 horas, el valor de K_{adm} se hará = $\varphi \cdot K_{5000}$. Los valores se extraen de la siguiente tabla

Horas servicio h	150	312	625	1200	2500	5000	10000	40000	80000	150000
φ	3.2	2.5	2	1.6	1.25	1	0.8	0.5	0.4	0.32

Tabla 6. Tabla de valores de K_{adm}

Por acción-reacción, los dos dientes en contacto están sometidos el mismo valor de presión de rodadura K, y por tanto han de tener el mismo valor admisible K_{adm} , de donde se deduce la siguiente condición de diseño (suponiendo que $E_1 = E_2$):

$$\frac{HB_1}{HB_2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{1/6} \quad (41)$$

Si queremos que las dos ruedas tengan la misma duración en horas de funcionamiento h, según la ecuación (39) se debe cumplir:

$$\frac{HB_1}{HB_2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{1/6} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1/6} = i^{1/6} \quad (42)$$

Es decir, la relación entre las durezas HB de ambas ruedas debe ser $i^{1/6}$. Al ser $i \geq 1$, la rueda

pequeña (rueda 1) debe ser $i^{1/6}$ veces más dura que la grande. La Tabla 7 recoge valores orientativos de duraciones recomendadas de engranajes, en función de su aplicación.

APLICACIÓN	DURACIÓN REQUERIDA (EN H)
Electrodomésticos	1000-2000
Motores de avión	1000-4000
Automóviles	1500-5000
Equipo agrícola	3000-6000
Elevadores, ventiladores industriales y transmisiones de usos múltiples	8000-15000
Motores eléctricos y maquinaria industrial en general	20000-30000
Bombas y compresores	40000-60000
Equipo crítico en funcionamiento continuo durante 24h/día	100000-200000

Tabla 7. Valores orientativos de la duración requerida (en h) según la aplicación

De la misma manera que en el cálculo a rotura del diente, las normas AGMA e ISO adaptan la fórmula (37) para el cálculo del módulo a fallo superficial mediante una serie de coeficientes (obtenidos experimentalmente) para obtener un valor más preciso del módulo.

4. EXPRESIONES PARA ENGRANAJES CILÍNDRICO HELICOIDALES

Las expresiones de los apartados anteriores corresponden a engranajes cilíndricos de dientes rectos. Otro tipo de engranaje muy empleado es el cilíndrico de dientes helicoidales. Mientras que en los engranajes rectos los dientes están colocados sobre la generatriz del cilindro (rueda), en los engranajes helicoidales los dientes siguen una trayectoria helicoidal de ángulo β_a (ver Figura 9). Los engranajes helicoidales pueden conectar dos ejes que se cruzan a cualquier ángulo, a diferencia de los rectos que solo sirven para ejes paralelos. En el caso de engranajes helicoidales con ejes paralelos, el ángulo β_a es el mismo para las dos ruedas, una con dentado a izquierdas y la otra a derechas (ver Figura 9b).

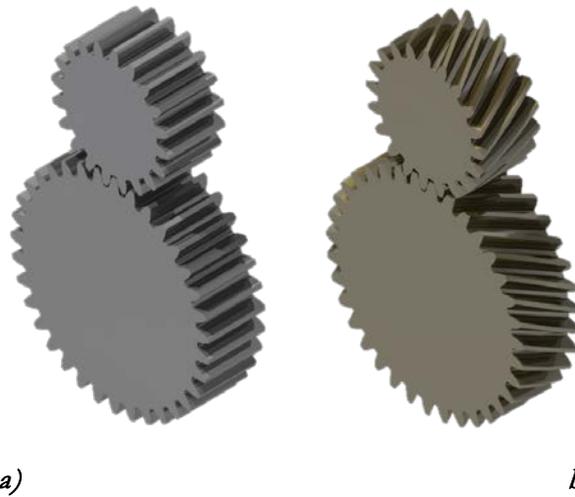


Figura 9. Engranajes cilíndricos: a) rectos b) helicoidales.

Además de poder transmitir movimiento entre ejes no paralelos, los engranajes cilíndricos helicoidales presentan las siguientes características ventajosas:

- a) Se puede ajustar la distancia entre ejes variando el ángulo de la hélice β_a .
- b) Pueden existir más de dos pares de ruedas en contacto simultáneamente.
- c) Son menos ruidosos, se desgastan menos y tienen menos problemas dinámicos que los dientes rectos.

No obstante, a diferencia de los engranajes de dientes rectos, en los helicoidales aparece una componente axial de fuerza, además de los ya conocidos componentes tangencial y radial. Esto es una desventaja ya que los ejes y rodamientos en los que éstos se apoyan deberán absorber dicha carga axial. Las fuerzas son, tal y como se ilustra en la Figura 10:

$$F_r = F \cdot \sin\alpha_r \quad (43a)$$

$$F_t = F \cdot \cos\alpha_r \cdot \cos\beta_a \quad (43b)$$

$$F_a = F \cdot \cos\alpha_r \cdot \sin\beta_a \quad (43c)$$

Siendo según la Figura 10:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_r}{\operatorname{tg}\beta_a} = \cos\alpha_a \quad (44a)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_r}{\operatorname{tg}\alpha_a} = \cos\beta_a \quad (44b)$$

Donde α_r es el ángulo de presión, de valor normalizado 20° .

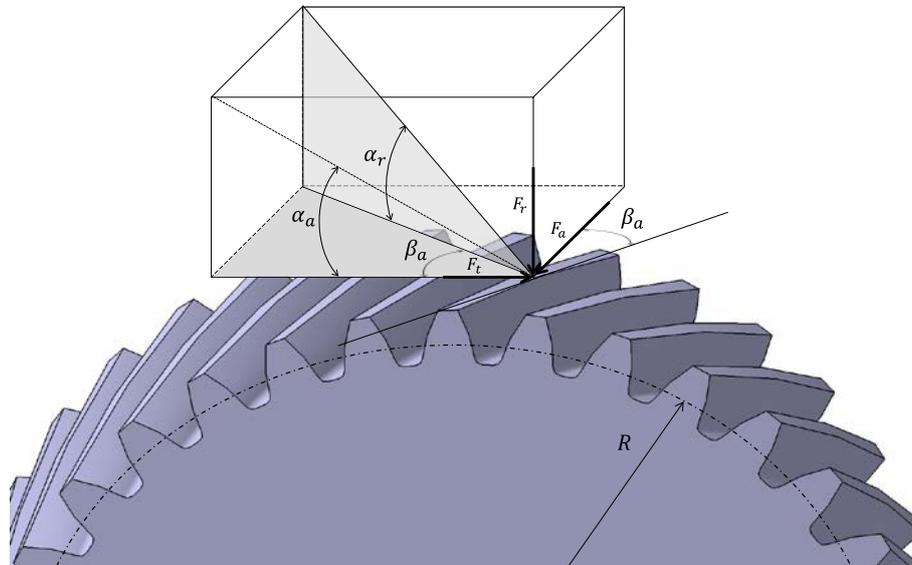


Figura 10. Fuerzas en los engranajes cilíndricos helicoidales.

La relación de transmisión se define igual que en los engranajes cilíndricos rectos, utilizando las ecuaciones (1) y (2). En el caso de ruedas cilíndricas helicoidales, el radio R es:

$$R = \frac{m_n \cdot z}{2 \cdot \cos \beta_a} \quad (45)$$

Donde m_n es el denominado módulo normal, equivalente al módulo m de las ruedas rectas. Evidentemente el módulo normal m_n debe ser igual en las dos ruedas que engranan. Al ser β_a también el mismo en las dos ruedas, la relación de transmisión también cumple la expresión (4).

Al igual que m , el valor de m_n está normalizado según la Tabla 1. De hecho, las ruedas rectas y las helicoidales se tallan con la misma herramienta y siguiendo el mismo proceso de tallado; la única diferencia es que mientras que en las ruedas rectas la herramienta talladora ataca a la rueda en dirección axial, en las ruedas helicoidales el ataque se lleva a cabo con una inclinación β_a con respecto a dicha dirección axial. Es así como se consigue que los dientes helicoidales sigan una trayectoria helicoidal.

Gracias a esta similitud en el proceso de tallado de las ruedas rectas y helicoidales, se demuestra según la Figura 11 que una rueda cilíndrica helicoidal de z dientes, radio R , ángulo de hélice β_a , módulo m_n y ancho b , es equivalente a un engranaje cilíndrico recto de z_n dientes, radio R_n , módulo m_n y ancho b_n .

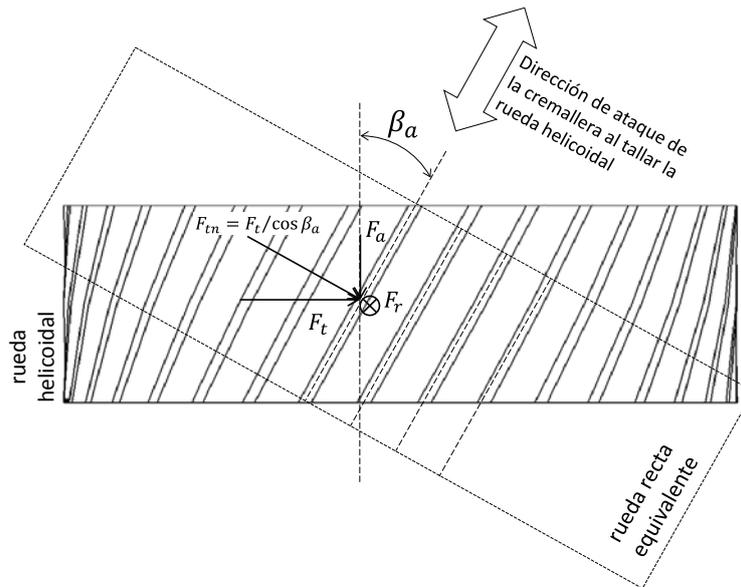


Figura 11. Rueda recta equivalente a una rueda helicoidal.

Se demuestra que los valores del número de dientes, radio y ancho de la rueda equivalente son:

$$R_n = \frac{R}{\cos^2 \beta_a} \quad (46a)$$

$$z_n = \frac{z}{\cos^3 \beta_a} \quad (46b)$$

$$b_n = \frac{b}{\cos \beta_a} \quad (46c)$$

El estudio de la rueda recta equivalente y la obtención de sus parámetros geométricos de la ecuación (46) entran dentro del ámbito de la cinemática de los engranajes, y por tanto quedan fuera del alcance de este libro.

En cualquier caso, este concepto de equivalencia es muy importante ya que permite estudiar y diseñar el engranaje helicoidal como si de un engranaje recto se tratara, aplicando exactamente los mismos procedimientos. De esta forma, se obtienen las expresiones para el cálculo del módulo en engranajes helicoidales. Para evitar la rotura del diente, el módulo debe ser:

$$m_n \geq 52.32 \cdot \sqrt[3]{\frac{Pot \cdot \cos \beta_a}{1.5 \cdot w_1 \cdot z_1 \cdot \Psi \cdot \sigma_{adm} \cdot Y}} \quad (47)$$

Con el módulo m_n en cm, la potencia Pot en CV, la velocidad angular w en rpm y la tensión σ_{adm} (de la Tabla 5) en kg/cm^2 , siendo 1 la rueda pequeña.

Por su parte, para evitar el fallo superficial, el módulo debe ser:

$$m_n \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot T_1 \cdot \cos^4 \beta_a \cdot (i \pm 1)}{K_{adm} \cdot \Psi \cdot z_1^2 \cdot i \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}} \quad (48)$$

Donde T_1 está en kgcm, K_{adm} en kg/cm^2 y el módulo m_n en cm, siendo $i \geq 1$ y 1 la rueda pequeña.

Estas serían, en definitiva, las expresiones del módulo a rotura y fallos superficiales para engranajes cilíndrico helicoidales, que sirven como base a las normas AGMA e ISO.