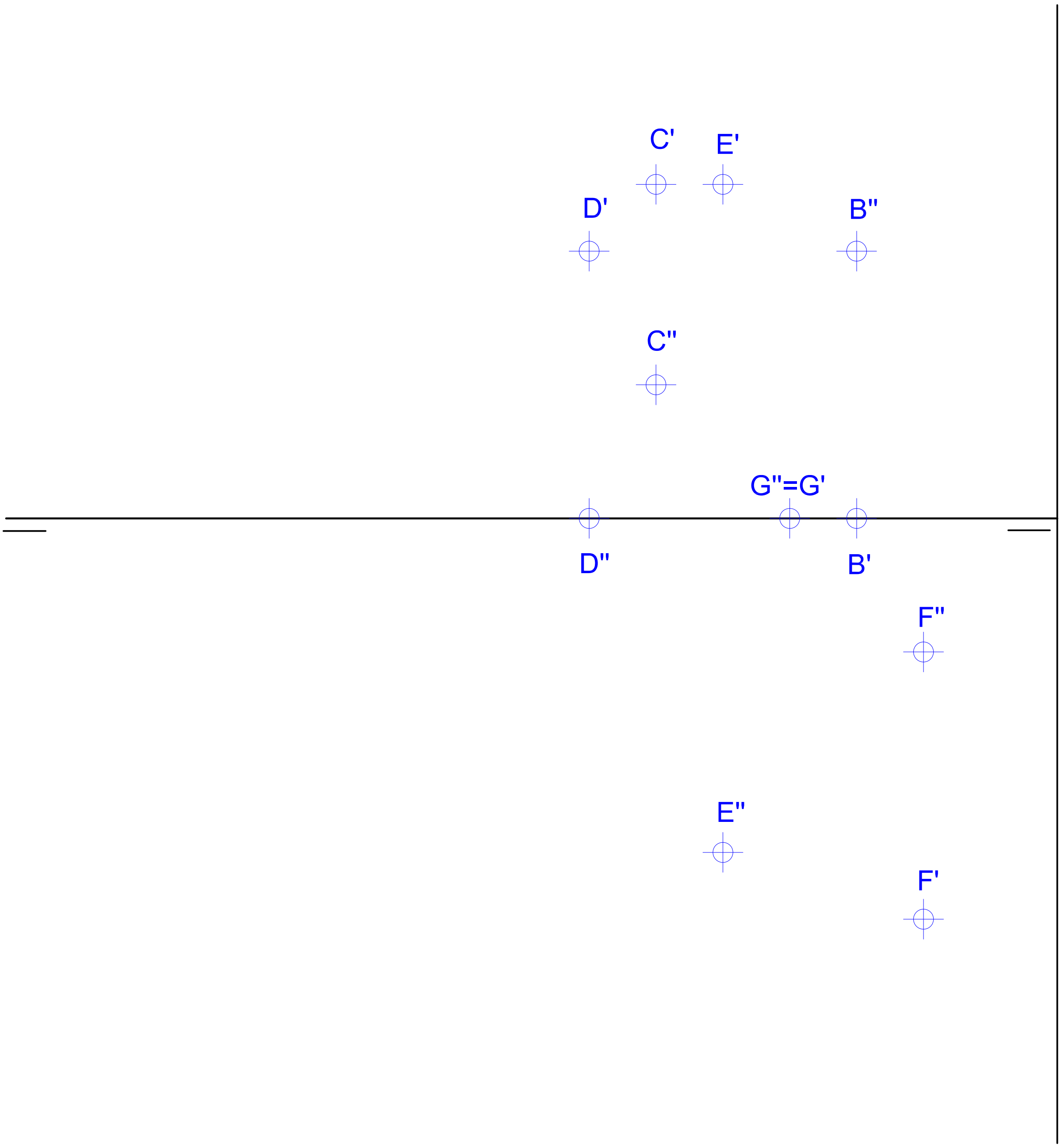
1 ARIKETA

Adierazi B, C, D, E, F eta G puntuen proiekzio diedrikoak.

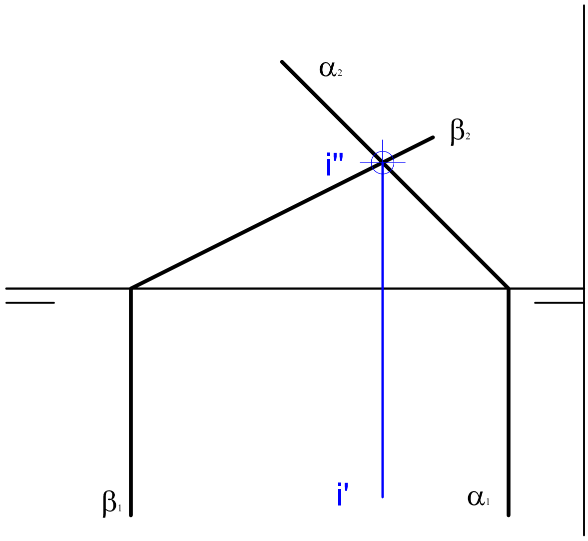


Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

2 ARIKETA

Kalkulatu $(4,0,3)$, $(1,0,0)$ *eta* $(1,1,0)$ *puntuak bere baitan dituen* α *planoaren eta* $(2,0,2)$, $(6,0,0)$ *eta* $(6,3,0)$ *puntuak bere baitan dituen* β *planoaren arteko ebakidura.*

Aurkitu α eta β planoen arteko elkargunea



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

3 ARIKETA

Kalkulatu β eta α planoen ebakidura. β planoak A=(6,3,1), B=(1,1,2) eta C=(3,y,4) puntuak ditu barne, eta XOY planoarekiko elkarzuta da. α planoak P(1,1,2) puntua du barne, eta XOZ planoarekiko paraleloa da.

<u>*Ebazpena:*</u>

- β planoaren kalkulua:

$\overrightarrow{AB} = (-5,-2,1)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, y-3,3)$. Bi bektore hauek erabiliz bektore normala kalkulatzen da:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -5 & -2 & 1 \\ -3 & y-3 & 3 \end{vmatrix} = (-3-y)\,\vec{\imath} + 12\,\vec{\jmath} + (9-5y)\,\vec{k} = (-3-y, 12, 9-5y)$$

β planoa XOY planoarekiko elkarzuta denez, eta OXY planoaren bektore normala $(0,0,1)$ denez, ondorengoa lortzen da

$$(-3-y, 12, 9-5y)\cdot(0,0,1) = 0 \Rightarrow 9-5y = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{5} \Rightarrow C = (3,9/5,4)\ ;\ \vec{n} = (-24/5,12,0)$$

Planoaren puntu bat, A puntua adibidez, eta bektore normala erabiliz β planoaren ekuazioa lortzen da

$$\beta\!:\ -\frac{24}{5}\,(x-6) + 12(y-3) + 0(z-1) = 0\ \Rightarrow \beta\!:\ -4x + 10y - 6 = 0$$

- α planoaren kalkulua:

α planoa XOZ planoarekiko paraleloa denez, bere bektore normala XOZ planoaren bektore normala izan da, ondorioz

$$\alpha\!: 0(x-1) + 1(y-1) + 0(z-2) = 0 \Rightarrow \alpha\!: y = 1$$

- α eta β planoen arteko ebakidura:

$\alpha \cap \beta = \begin{cases} y-1=0 \\ -4x+10y-6=0 \end{cases}$ non $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ eta $M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 10 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ diren.

$h(M) = 2 = h(M') <$ ezezagun kopurua betetzen denez, planoak zuzen batean elkar ebakitzen dute. Ekuazio linealetako sistema ebatziz $x = 1; y = 1\ \forall z$ lortzen da. Hortaz, bi planoak ondorengo zuzenean elkar ebakitzen dute:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

4 ARIKETA

Zehaztu r: $\begin{cases} x+3z=11 \\ y+3z=6 \end{cases}$ *zuzenarekiko paraleloa den eta* t: $\frac{x-2}{3}=1-y=\frac{z}{3}$ *zuzena barne duen planoa.*

<u>*Ebazpena:*</u>

t zuzenaren ekuazioa parametrikoak kalkulatzen dira:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}=1-y \\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=3-3y \\ x-2=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-5=0 \\ x-z-2=0 \end{cases}$$

ondorioz, t zuzena barne duen planoen sorta hurrengoa da:

$$x+3y-5+\lambda(x-z-2)=0 \Rightarrow (1+\lambda)x+3y-\lambda z-5-2\lambda=0$$

$z=\lambda$ eginez r zuzenaren ekuazio parametrikoak lortzen dira:

r: $\begin{cases} x=11-3\lambda \\ y=6-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ hortaz, r zuzenaren norabide bektorea $\vec{v}_r=(-3,-3,1)$ da.

Eskatutako π planoa r zuzenarekiko paraleloa denez, bere bektore normala zuzenaren norabide bektorearekiko elkarzuta izango da:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r=0 \Rightarrow (1+\lambda,3,-\lambda)\cdot(-3,-3,1)=0 \Rightarrow \lambda=-3$$

Balio hau goian kalkulatutako plano sortaren ekuazioan ordezkatuz eskatutako π planoa kalkulatzen da:

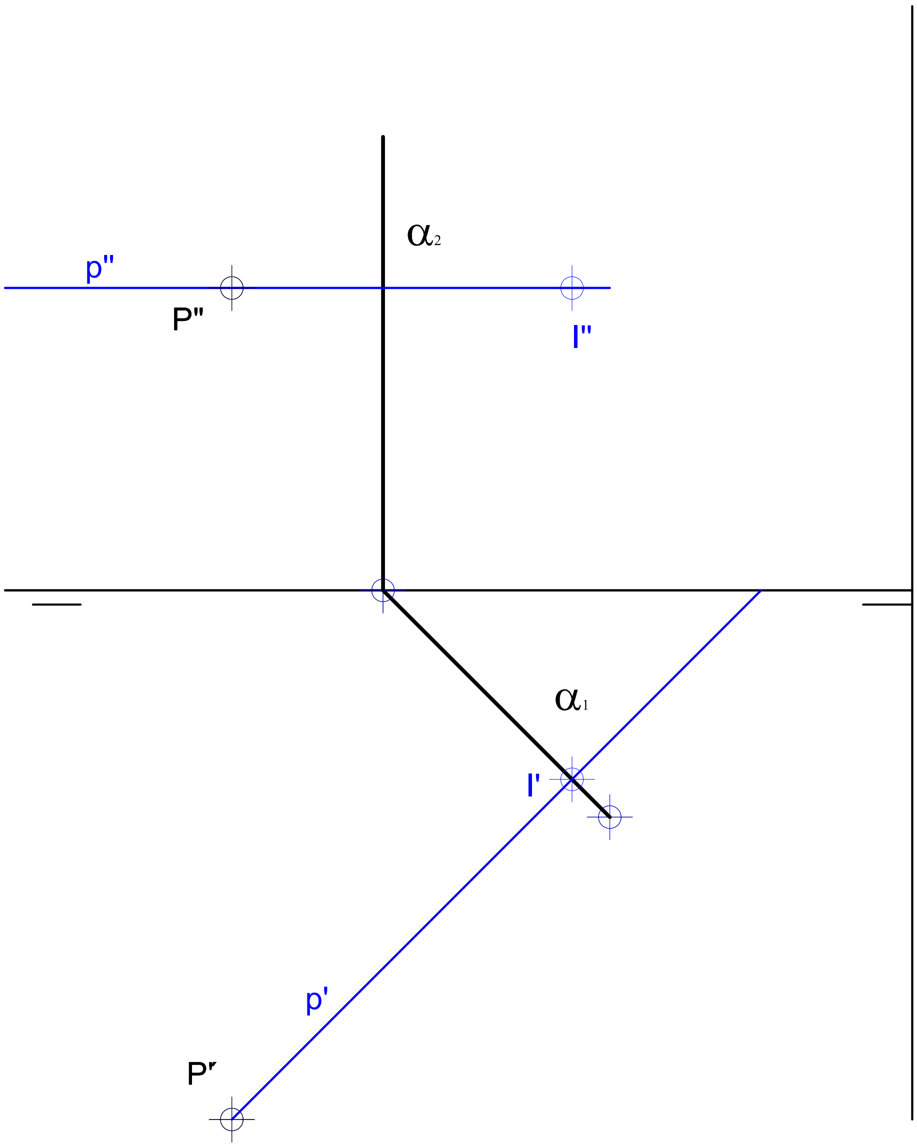
$$(1+(-3))x+3y-(-3)z-5-2(-3)=0 \Rightarrow \pi: -2x+3y+3z+1=0$$

5 ARIKETA

$P(9,7,4)$ *puntutik pasatzen den eta* $(7,0,0)$ *eta* $(4,3,0)$ *puntuak bere baitan dituen eta* $z=0$ *planoarekiko elkarzuta den* α *planoarekiko elkarzuta den zuzena trazatu. Kalkulatu bien arteko ebaki-puntua.*

Marraz ezazu P puntutik pasatzen den eta a planoarekiko perpendikularra den p zuzena.

Bien arteko I elkarguna zehaztu.

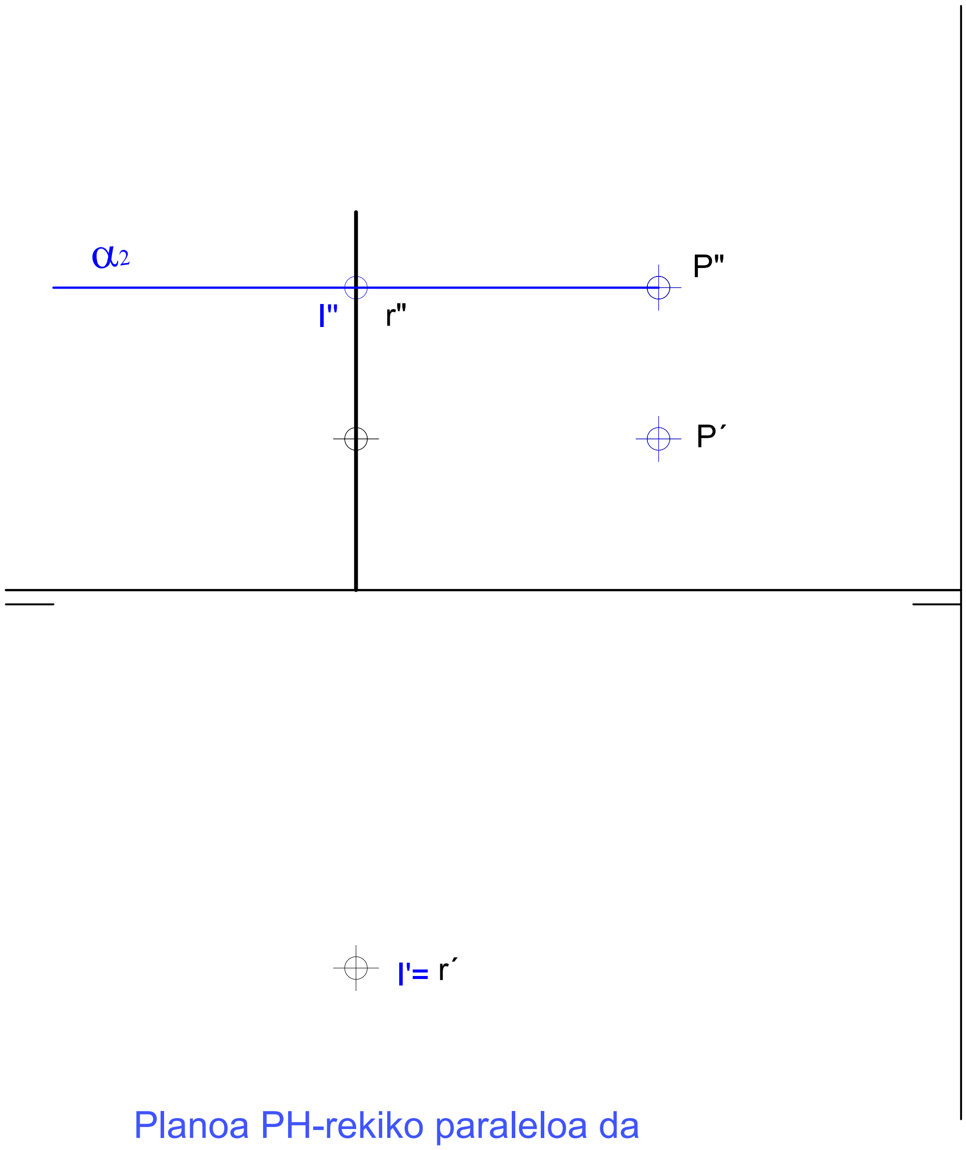


Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

6 ARIKETA

$P(2,-2,4)$ *puntutik pasatuz* $(8,5,2)$ *puntua bere baitan duen eta XOY planoarekiko elkarzuta den zuzenarekiko elkarzuta den planoa trazatu. Bien arteko ebaki-puntua kalkulatu.*

Marraz ezazu P puntutik pasatzen den eta r zuzenarekiko perpendikularra den α planoa. Bien arteko I elkarguna zehaztu.



Planoa PH-rekiko paraleloa da

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

7 ARIKETA

Trazatu P(12,3,6) puntutik, r (6,5,4) eta (0,8,7) puntuetatik igarotzen den zuzenarekiko elkarzuta den eta α (11,0,0), (6,0,2) eta (8,4,0) puntuetatik igarotzen den planoarekiko paraleloa den zuzena.

Ebazpena:

- r zuzenaren kalkulua:

  Izan bitez $A=(6,5,4)$ eta $B=(0,8,7)$ puntuak, orduan $\overrightarrow{AB}=(-6,3,3)$ zuzenaren norabide bektore bat da. r zuzenaren ekuazio jarraitua ondorengoa da:

$$r\colon \frac{x}{-6}=\frac{y-8}{3}=\frac{z-7}{3}$$

- α planoaren kalkulua:

  Izan bitez $A=(11,0,0), B=(6,0,2)$ eta $C=(8,4,0)$ puntuak, orduan $\overrightarrow{AB}=(-5,0,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3,4,0)$. α planoaren ekuazio inplizitua hurrengoa da:

$$\alpha\colon \begin{vmatrix} x-11 & -5 & -3 \\ y & 0 & 4 \\ z & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4x+3y+10z-44=0$$

- Eskatzen den s zuzenaren kalkulua:

  Eskatutako zuzenaren norabide bektorea r zuzenaren norabide bektorearekiko eta α planoaren bektore normalarekiko elkarzuta da:

$$\vec{v}_s=\vec{v}_r\wedge\vec{n}_\alpha=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}=7\,\vec{\imath}+24\,\vec{\jmath}-10\vec{k}=(7,24,-10)$$

  Ondorioz, s zuzenaren ekuazio hurrengoa da:

$$s\colon \frac{x-12}{7}=\frac{y-3}{24}=\frac{z-6}{-10}$$

10 ARIKETA

Kalkulatu A(4,8,6) eta B(4,3,3) puntuen arteko distantzia.

Ebazpena:

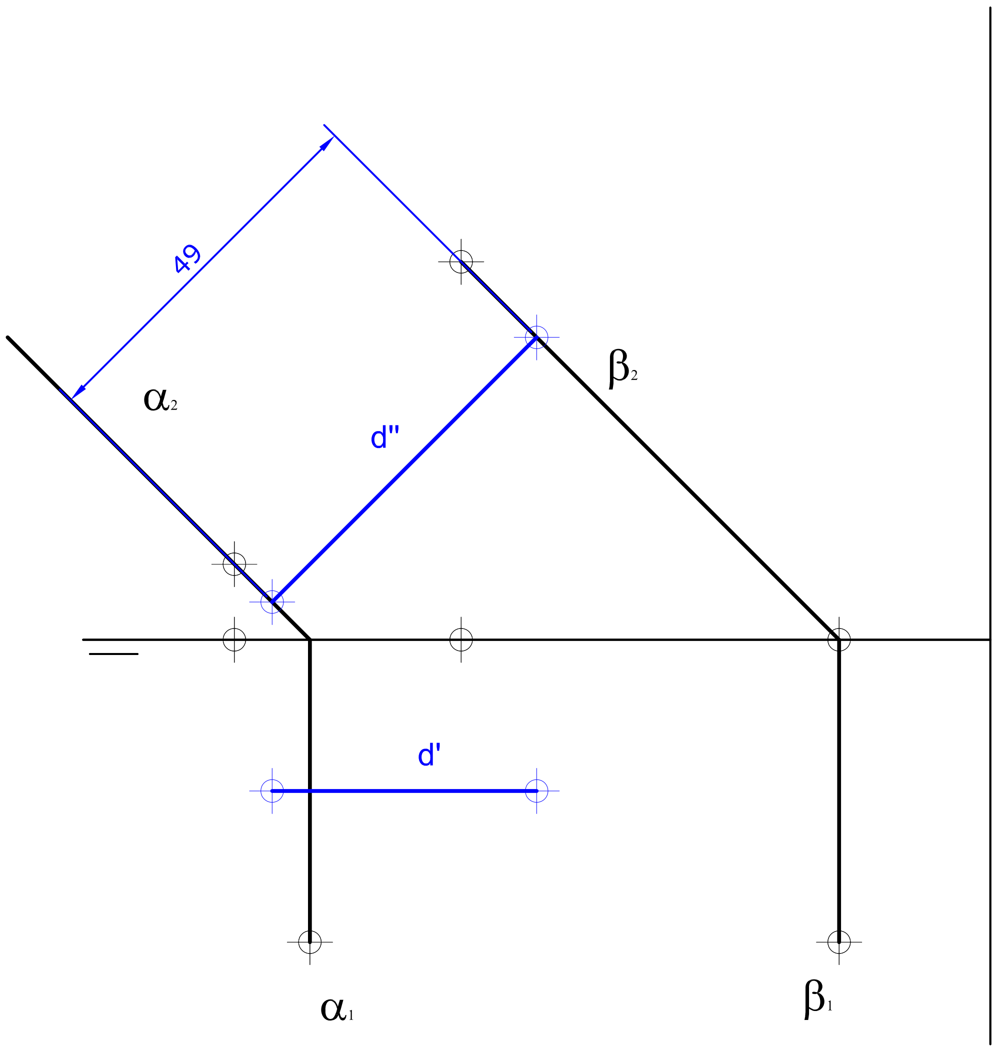
Bi puntuen arteko distantzia kalkulatzeko formula aplikatuz:

$$d(A,B) = \sqrt{(4-4)^2 + (3-8)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

13 ARIKETA

Izan bitez α, $(9,0,0)$, $(10,0,1)$ *eta* $(9,4,0)$ *puntuek definitutako planoa eta* β $(2,0,0)$, $(7,0,5)$ *eta* $(2,4,0)$ *puntuek definitutakoa. Kalkulatu* α *eta* β *planoen arteko distantzia.*

Kalkulatu α eta β planoen arteko distantzia



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

14 ARIKETA

Izan bitez α (9,0,0), (10,0,1) eta (9,4,0) puntuek definitutako planoa eta β (2,0,0), (7,0,5) eta (2,4,0) puntuek definitutakoa. Zehaztu α eta β planoen plano erdibitzailea.

<u>*Ebazpena:*</u>

$\overrightarrow{\quad} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{AC} = (0,4,0)$. Bi bektore hauek erabiliz bektore normala lortzen da:

$$\vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath} + 4\vec{k} = (-4,0,4)$$

A puntutik igarotzen den eta elkartutako bektoretzat $\vec{n}_\alpha$ bektorea duen α planoaren ekuazioa hurrengoa da:

$$-4(x-9) + 0(y-0) + 4(z-0) \Rightarrow \ \alpha: x - z - 9 = 0$$

- β planoaren kalkulua:

Izan bitez $D = (2,0,0)$, $E = (7,0,5)$ eta $F = (2,4,0)$

$\overrightarrow{DE} = (5,0,5)$, $\overrightarrow{DF} = (0,4,0)$. Bi bektore hauek erabiliz bektore normala lortzen da:

$$\vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -20\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath} + 20\vec{k} = (-20,0,20)$$

D puntutik igarotzen den eta elkartutako bektoretzat $\vec{n}_\beta$ bektorea duen β planoaren ekuazioa hurrengoa da

$$-20(x-2) + 0(y-0) + 20(z-0) \Rightarrow \ \beta: x - z - 2 = 0$$

- Plano erdibitzailearen kalkulua:

D puntutik igarotzen den eta α eta β planoekiko elkarzuta den zuzena kalkulatzen da:

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 0 \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

r zuzenaren eta α planoaren arteko ebakidura lortzen da:

$$(2-4\lambda) - 4\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{7}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 7/2 \\ y = 0 \\ z = -7/2 \end{cases} \Rightarrow P = r \cap \alpha = \left(\frac{11}{2}, 0, -\frac{7}{2}\right)$$

$\overline{DP}$ zuzenkiko erdiko puntua lortzen da:

$$M=\frac{D+P}{2}=\frac{(2,0,0)+\left(\frac{11}{2},0,-\frac{7}{2}\right)}{2}=\left(\frac{15}{4},0,-\frac{7}{4}\right)$$

α eta β planoen arteko plano erdibitzailearen ekuazioa $x-z+K=0$ izango da. Bestalde, M puntua eskatutako planoan egon behar denez:

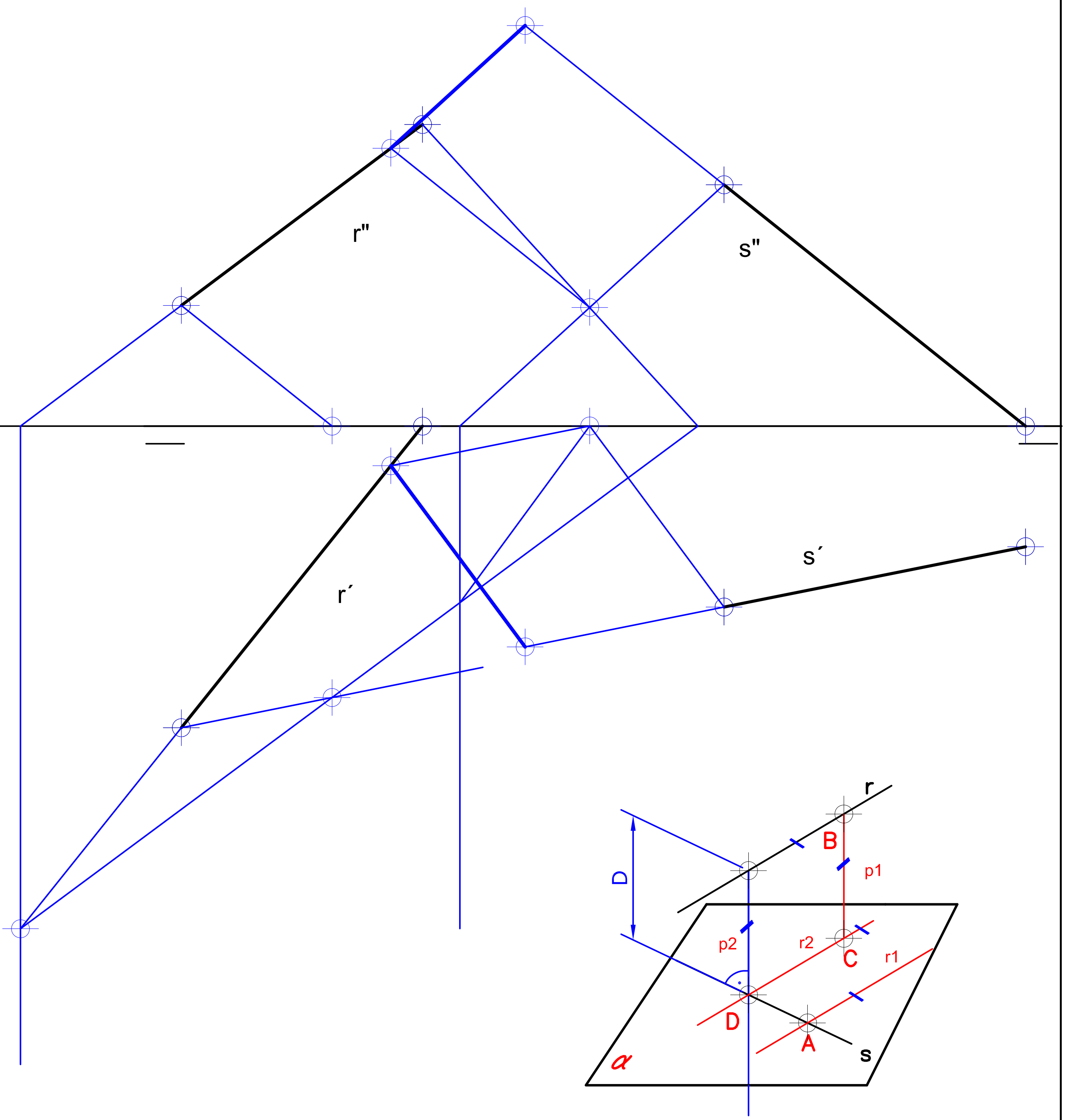
$$\frac{15}{4}-\left(-\frac{7}{4}\right)+K=0\Rightarrow K=-\frac{22}{4}$$

Eskatutako plano erdibitzailea $x-z-\frac{22}{4}=0$ da.

18 ARIKETA

Kalkulatu $r\left((13,0,5)(17,5,2)\right)$ *eta* $s\left((3,2,0)(8,3,4)\right)$ *zuzenen arteko distantzia.*

Kalkulatu r eta s zuzenen arteko distantzia



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

19 ARIKETA

Kalkulatu $A = (1,2,5)$ *puntutik* $\alpha: 2x + 2y - z - 5 = 0$ *planora dagoen distantzia.*

Ebazpena:

A puntua planoaren barneko puntua ez dagoela egiaztatzen da:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 5 - 5 = -4 \neq 0 \Rightarrow A \notin \alpha$$

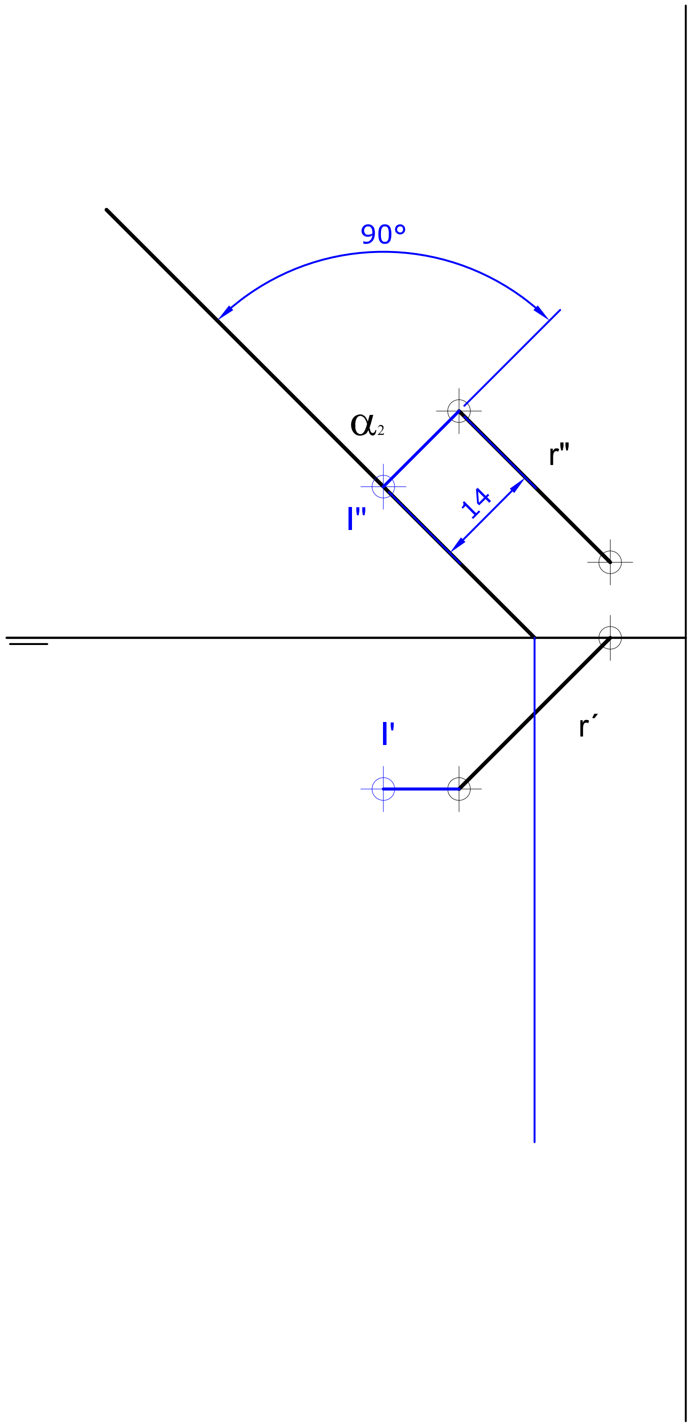
Puntu baten eta plano baten arteko distantzia kalkulatzeko formula aplikatuz:

$$d(A, \alpha) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{30}} = \frac{4}{\sqrt{30}}$$

20 ARIKETA

Izan bitez $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{2}$ *zuzena eta* $\alpha: x-z=2$ *planoa. Kalkulatu bien arteko distantzia.*

Kalkulatu α planoaren (proiektatzaile bertikala) eta r zuzenaren arteko distantzia.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

21 ARIKETA

Kalkulatu $P=(1,3,-1)$ *puntutik* $r:\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ *zuzenera dagoen distantzia.*

Ebazpena:

P puntua zuzenean ez dagoela egiaztatzen da: $\begin{cases} 1-3\neq 0 \\ 1+3-(-1)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow P\notin r$

Zuzenaren ekuazio inplizituak abiapuntu bezala harturik bere ekuazio parametrikoak lortzen dira:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=z \end{cases} \Rightarrow x=\frac{z}{2}, y=\frac{z}{2}$$

Hau da, r: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, beraz, $\vec{v}_r=(1,1,2)$.

r zuzenaren barnekoa den edozein puntu, $A=(0,0,0)$ puntua adibidez, erabiliz $\overrightarrow{AP}=(1,3,-1)$ bektorea sortzen da.

Puntu baten eta zuzen baten arteko distantzia kalkulatzeko formula erabiliz:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\wedge\vec{v}_r\right|}{|\vec{v}_r|}=\frac{\sqrt{7^2+(-3)^2+(-2)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\sqrt{\frac{62}{6}}=\sqrt{\frac{31}{3}}$$

izan ere $\overrightarrow{AP}\wedge\vec{v}_r=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=7\,\vec{\imath}-3\,\vec{\jmath}-2\vec{k}$ da.

22 ARIKETA

Kalkulatu $r:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-9}{-2}=\dfrac{z-8}{-2}$ *eta* $s:\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ *zuzenen arteko distantzia.*

Ebazpena:

Zuzen bakoitzaren norabide bektore bat kontsideratzen da, $\vec{v}_r=(3,-2,-2)$ eta $\vec{v}_s=(-2,1,2)$, hurrenez hurren. Bektoreak paraleloak ez direnez, zuzenak puntu batean elkar ebakitzen dute edo gurutzatu egiten dira.

Zuzen bakoitzaren puntu bat hartzen da, $A=(-3,9,8)\in r$ eta $B=(6,-7,-7)\in s$ eta $\overrightarrow{AB}=(6,-7,-7)$ bektorea sortzen da.

Bi zuzenen posizio erlatiboa aztertzeko nahiko da $(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{AB})$ matrizearen heina aztertzea.

$$h(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{AB})=h\begin{pmatrix}3&-2&6\\-2&1&-7\\-2&2&-7\end{pmatrix}=3$$

Bestalde, $\mathrm{h}(\vec{v}_r,\vec{v}_s)=2\neq h(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{AB})=3$ betetzen denez, zuzenak espazioan elkar gurutzatzen dira. Bi zuzenen arteko distantzia kalkulatzeko dagokion formula aplikatzen da:

$$d(r,s)=\frac{|(\overrightarrow{AB},\vec{v}_r,\vec{v}_s)|}{|\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s|}=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s)|}{|\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s|}=\frac{|(6,-7,-7)\cdot(-2,-2,-1)|}{3}=\frac{9}{3}=3$$

izan ere

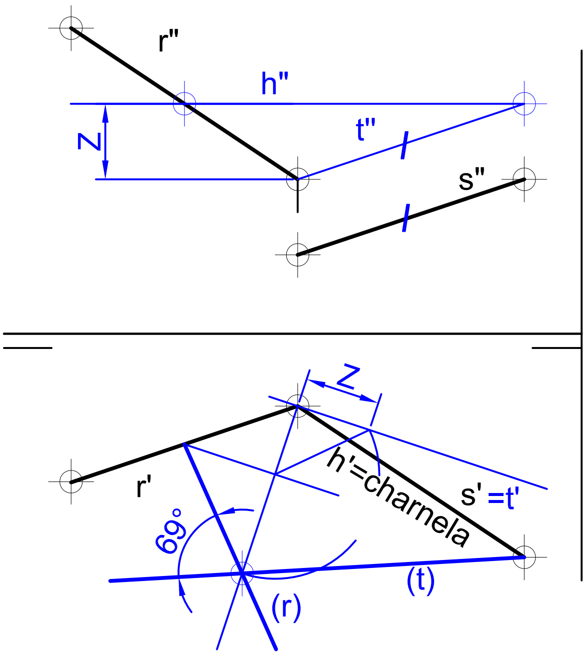
$$\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\3&-2&-2\\-2&1&2\end{vmatrix}=-2\,\vec{\imath}-2\,\vec{\jmath}-\vec{k}\Rightarrow|\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$$

betetzen da.

23 ARIKETA

Kalkulatu $r:\begin{cases} x-3y=1 \\ 2y=z \end{cases}$ *zuzenak eta* $(4,1,1)$ *eta* $(1,3,3)$ *puntuetatik pasatzen den* s *zuzenak osatzen duten angelua.*

Kalkulatu r eta s zuzenek osatzen duten angelua.

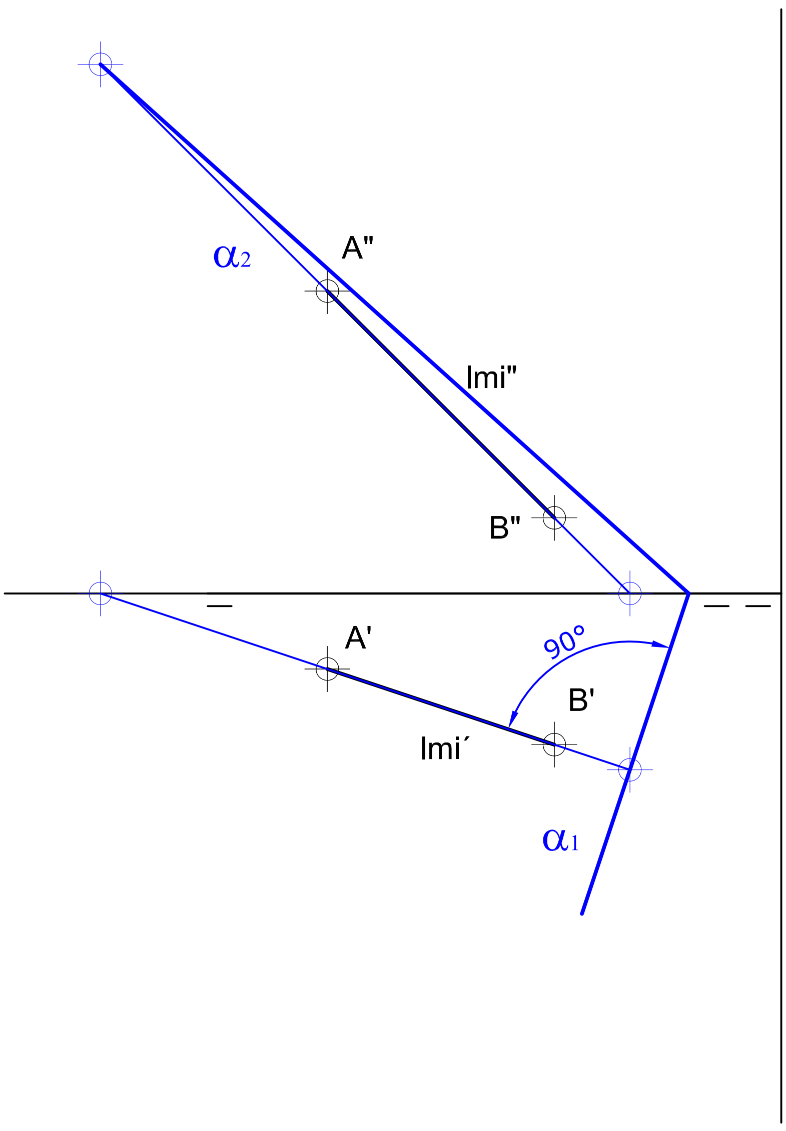


Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

27 ARIKETA

Malda handieneko lerrotzat $s:\begin{cases} x+3y=9 \\ 3y+z=7 \end{cases}$ *zuzena duen* α *planoa definitu.*

Kalkulatu α lmi bere inklinazio handieneko lerroa bada.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

30 ARIKETA

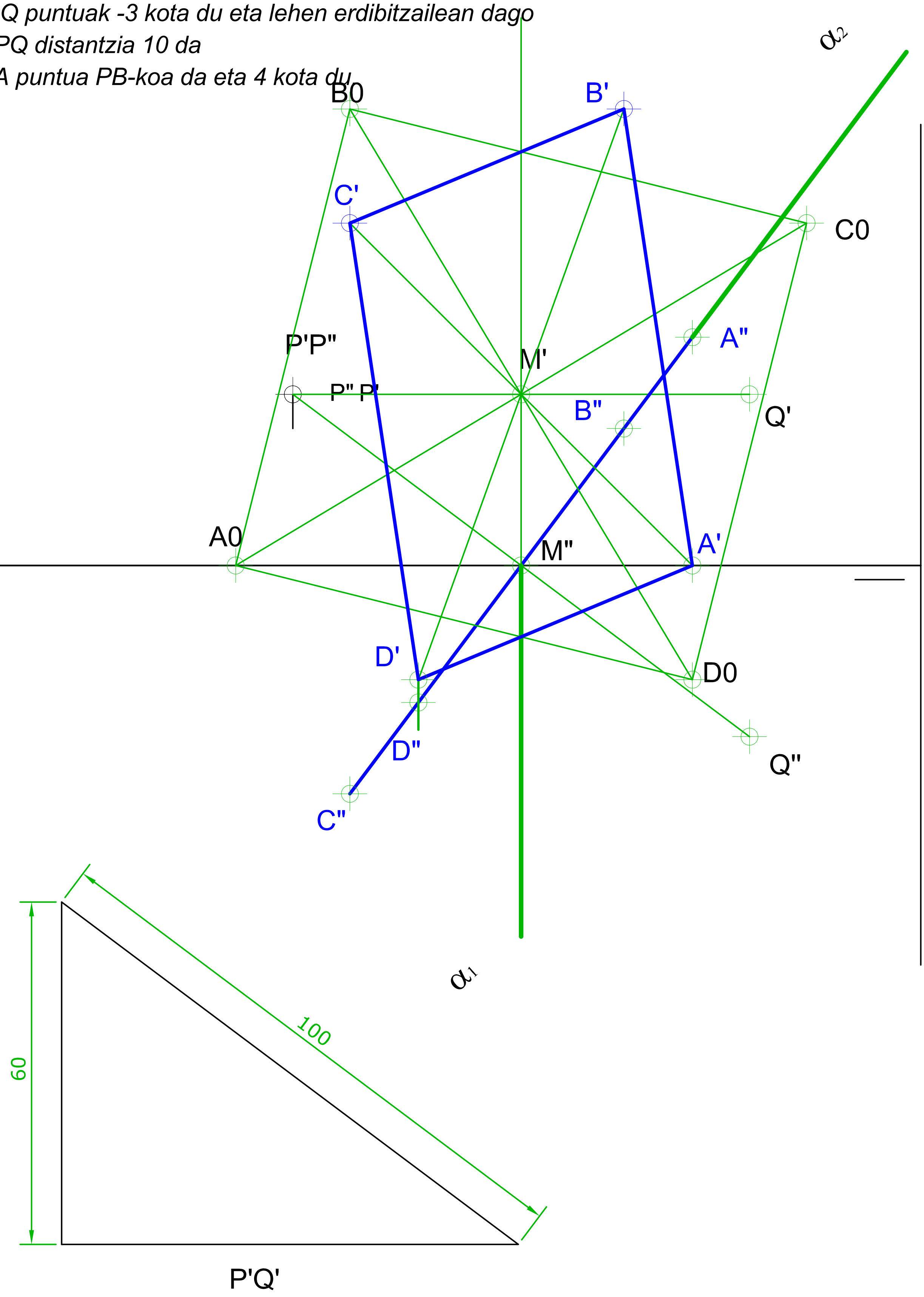
Izan bitez $P(11,-3,3)$ eta $Q(--,-3,-3)$ puntuak. Definitu ABCD karratu baten erpinak ondokoa jakinik:

- *Karratuaren erpinak P eta Q puntuekiko distantziakideak dira.*
- *P eta Q puntuen arteko distantzia 10 da.*
- *A puntua $y=0$ planoan dago.*
- *A puntuaren hirugarren osagaia (kota) 4 da.*

P eta Q puntuekiko distantziakidea den ABCD karratua marraztu:

Datuak:

1. *Q puntuak -3 kota du eta lehen erdibitzailean dago*
2. *PQ distantzia 10 da*
3. *A puntua PB-koa da eta 4 kota du*



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe