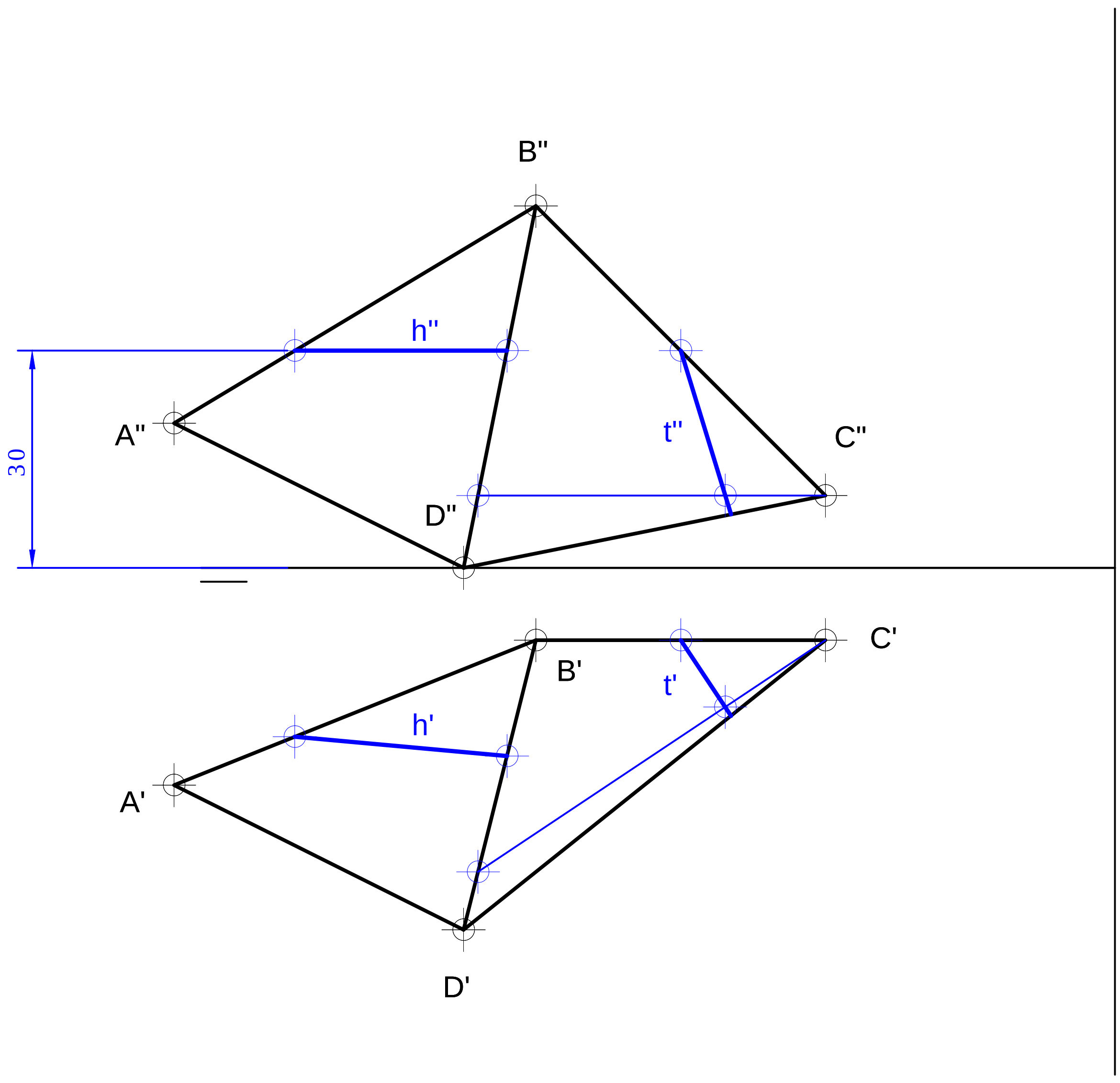
1 ARIKETA

*Izan bitez* $A(13,3,2)$, $B(8,1,5)$, $C(4,1,1)$ *eta* $D(9,5,0)$ *puntuak, ABC eta BDC planoak teilatu baten zati bat osatzen dutelarik.*

- *Kalkulatu ABD planoko zuzen bat, XOY planoarekiko paraleloa dena eta bertako puntuen kota 3 dena.*
- *Definitu BC-ren erdiko puntutik abiatzen den ur tanta baten ibilbidea.*

ABD eta BDC teilatu bat osatzen duten bi plano dira. ABD planoaren zuzen horizontal bat marraztu 3 kotaduna. Marraz ezazu ur-tanta baten ibilbidea BC zuzenaren erdiko puntutik abiatzen dena.




"t" zuzena ur-tantaren ibilbidea da.

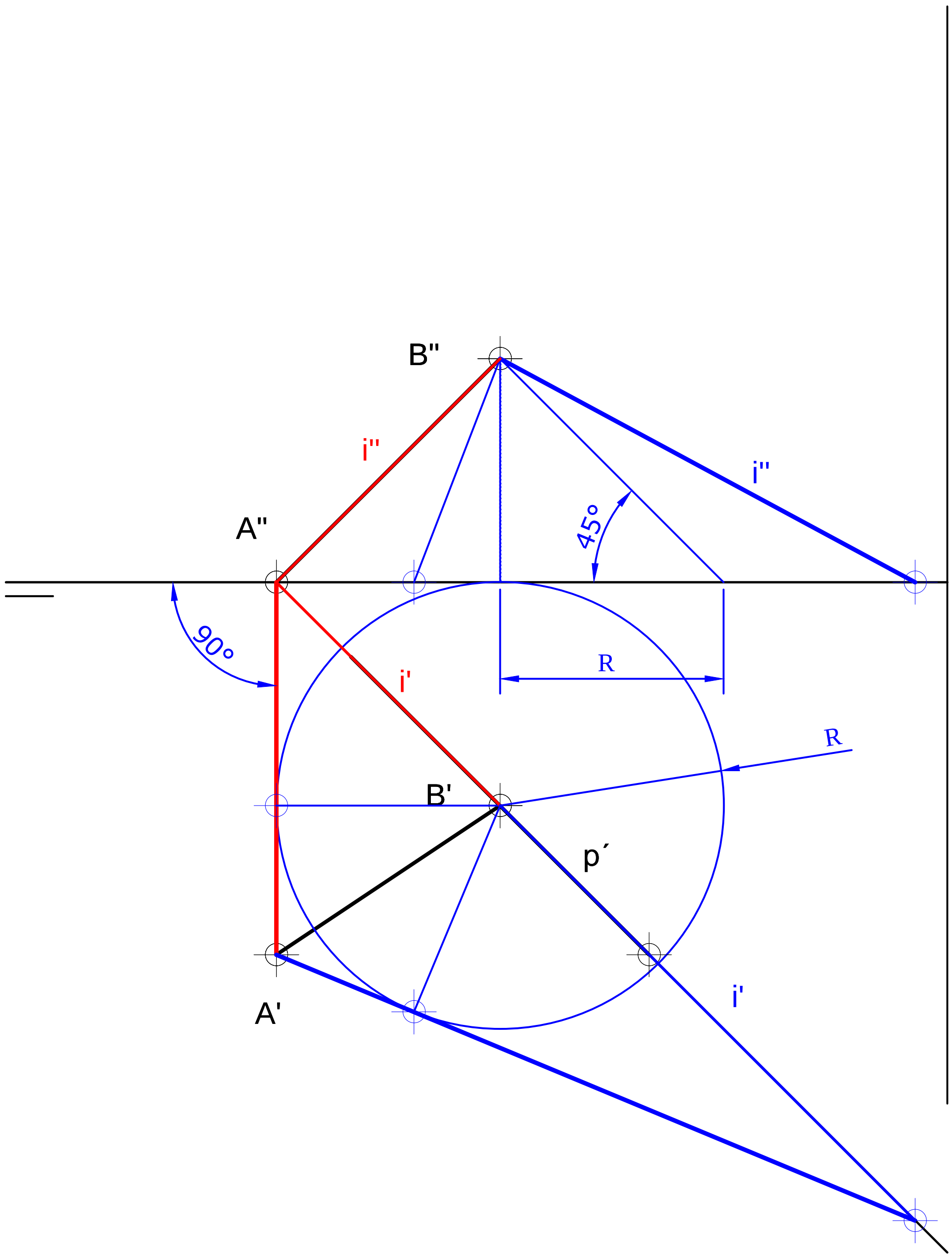
*Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe*

2 ARIKETA

$A(9,5,0)$ *eta* $B(6,3,3)$ *puntuak hormigoizko bi plaka simetrikoren ebakidura zuzenean daude.*

- *Definitu aurreko planoak beraien malda 45º dela jakinik.*
- *Kalkulatu bi plano horiek* $(6,3,z)$ *eta* $(4,5,z)$ *puntuetatik pasatzen den zuzena barnean duen plano bertikal batekin eta baita ere plano horizontalarekin duten ebakidura.*

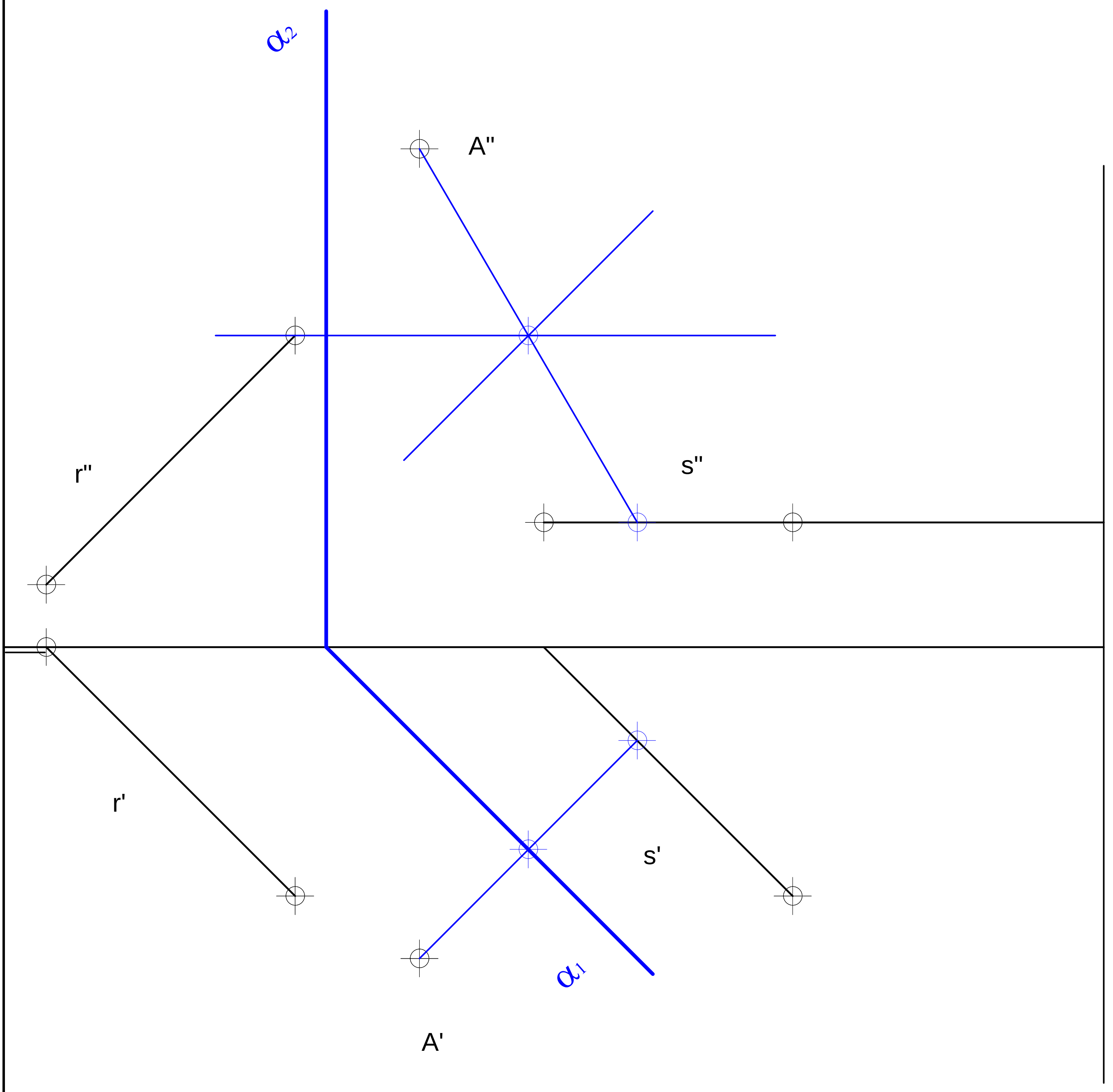
AB hormigoizko bi plaka simetrikoren arteko elkargunea da. Marraz itzazu planoak eta beraien elkarguneak beste plano bertikal batekin "p" zuzena bere baitan daukana eta baita ere plano horizontalarekin.
Datuak: Planoen malda = 45º AB



3 ARIKETA

Izan bitez $s$ $B(9,0,2)$ eta $C(5,4,2)$ puntuetatik pasatzen den zuzena eta $r$ $D(13,4,5)$ eta $E(17,0,1)$ puntuetatik pasatzen dena. Kalkulatu $A(11,5,8)$ puntuarekiko eta $s$ zuzenarekiko distantziakidea den eta $r$ zuzenarekiko paraleloa den planoaren ekuazioa.

Marraz ezazu plano bat A puntuarekiko eta s zuzenarekiko distantziakidea dena eta r zuzenarekiko paraleloa dena.




*Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe*

*Izan bitez $A(13,3,2)$, $B(8,1,5)$, $C(4,1,1)$ eta $D(9,5,0)$ puntuak, ABC eta BDC planoak teilatu baten zati bat osatzen dutelarik.*

- *Kalkulatu ABD planoko zuzen bat, XOY planoarekiko paraleloa dena eta bertako puntuen kota 3 dena.*
- *Definitu BC-ren erdiko puntutik abiatzen den ur tanta baten ibilbidea.*

*Ebazpena:*

Lehendabizi $ABD$ planoaren ekuazio inplizitua kalkulatuko dugu. Horretarako $A(13,3,2)$ puntua eta $\vec{n}_{ABC}$ bektore normala erabiliko ditugu. Bektore hau $\overrightarrow{AB} = (-5,-2,3)$ eta $\overrightarrow{AD} = (-4,2,-2)$ bektoreen biderkadura bektoriala eginez kalkulatzen da.

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -5 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{\imath} - 22\vec{\jmath} - 18\vec{k} \Rightarrow \vec{n}_{ABC} = (1,11,9)$$

Beraz, $ABD$ planoaren ekuazio inplizitua hauxe da:

$$(x-13) + 11(y-3) + 9(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$ABD: x + 11y + 9z - 64 = 0$$

$ABD$ planoan dagoen zuzena kalkulatzeko $P = (x, y, 3)$ puntua eta zuzenaren $\vec{v}_r = (a, b, c)$ norabide-bektorea behar dira.

$r$ zuzena planoan dagoenez, bere norabide bektorea, $\vec{v}_r$, $\vec{n}_{ABC}$ bektorearekiko elkarzuta da. Gainera, zuzena $XOY$ planoarekiko paraleloa denez, $\vec{v}_r$ bektorea $(0,0,1)$ bektorearekiko elkarzuta da. Beraz:

$$\begin{cases} \vec{v}_r \perp \vec{n}_{ABC} \Rightarrow (a,b,c)\cdot(1,11,9) = 0 \\ \vec{v}_r \perp (0,0,1) \Rightarrow (a,b,c)\cdot(0,0,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -11b \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-11b, b, 0)$$

Adibidez, kontsidera dezagun $\vec{v}_r = (-11,1,0)$ norabide bektorea. Bakarrik $P = (x, y, 3)$ puntua zehaztea geratzen zaigu eta horretarako nahikoa da puntua zuenean dagoela kontuan hartzea. Zuzena $ABD$ planoan dagoenez, puntua ere planoan dago. Ondorioz, puntuaren $x$ eta $y$ osagaiek ondoko ekuazioa bete behar dute:

$$x + 11y = 64 - 27 \Rightarrow x + 11y = 37$$

Adibidez, $x = 4$ eta $y = 3$, eta puntua beraz, $P = (4,3,3)$.

Hortaz, bila ari garen zuzenak $\vec{v}_r = (-11,1,0)$ norabide bektorea dauka eta $P = (4,3,3)$ puntua bere baitan dago. Zuzenaren ekuazio parametrikoak hauek dira:

$$\begin{cases} x = 44 - 11t \\ y = 3 + t \\ z = 3 \end{cases}$$

Eta zuzenaren ekuazio inplizituak honakoak dira:

$$\begin{cases} x + 11y - 37 = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

- *Definitu BC-ren erdiko puntutik abiatzen den ur tanta baten ibilbidea.*

$BC$ segmentuko erdiko puntua kalkulatuko dugu:

$$M = \frac{B + C}{2} = (6,1,3)$$

Ur tantak malda handieneko zuzenaren ibilbidea jarraituko du. Hori kalkulatzeko ondoko pausoak jarraitu behar dira:

- $BC$ zuzena bere baitan duen $BDC$ planoa kalkulatuko dugu. Plano honen eta $OXY$ planoaren arteko ebakidura den $r$ zuzena kalkulatuko dugu.

$BDC$ planoa kalkulatzeko $\overrightarrow{BD} = (1,4,-5)$ eta $\overrightarrow{BC} = (-4,0,-4)$ bektoreak, eta $B(8,1,5)$ puntua erabiliko ditugu. Hortaz, $BDC$ planoaren ekuazio inplizitua honakoa da:

$$\begin{vmatrix} x-8 & 1 & -4 \\ y-1 & 4 & 0 \\ z-5 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow BDC: \quad -2x + 3y + 2z + 3 = 0$$

$r$ zuzena $BDC$ planoaren eta $OXY$ plano horizontalaren arteko ebakidura da eta bere ekuazio inplizituak hauek dira:

$$r: \begin{cases} 2x + 3y + 2z + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- $M$ puntua bere baitan duen eta $r$ zuzenarekiko elkarzuta den $\pi$ planoa kalkulatuko dugu:

Planoa zuzenarekiko elkarzuta denez, zuzenaren $\vec{v}_r$ norabide bektorea eta planoaren $\vec{n}_\pi$ bektore normala paraleloak dira. Bektore hauek berdinak direla kontsidera daiteke eta ondoko balioa dute:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (3,2,0)$$

Ondorioz, $\pi$ planoaren ekuazio inplizitua honakoa da:

$$\pi: 3x + 2y - 20 = 0$$

- Malda handieneko zuzena kalkulatzen da:

Malda handieneko zuzena $\pi$ eta $BDC$ planoen ebakidura da:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 20 = 0 \\ -2x + 3y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

## 2 ARIKETA

*$A(9,5,0)$ eta $B(6,3,3)$ puntuak hormigoizko bi plaka simetrikoren ebakidura zuzenean daude.*

- *Definitu aurreko planoak beraien malda 45º dela jakinik.*
- *Kalkulatu bi plano horiek $(6,3,z)$ eta $(4,5,z)$ puntuetatik pasatzen den zuzena barnean duen plano bertikal batekin eta baita ere plano horizontalarekin duten ebakidura.*

<u>Ebazpena:</u>

$A(9,5,0)$ eta $B(6,3,3)$ puntuak bere baitan dituen $r$ zuzena kalkulatuz hasiko gara. Zuzen honen norabide bektorea $\overrightarrow{AB} = B - A = (6,3,3) - (9,5,0) = (-3,-2,3)$ da eta $r$ zuzena ondoko adierazpenaren bidez emana dator:

$$r: \frac{x-9}{-3} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-0}{3}$$

$r$ zuzena bere baitan duten bi plano kalkulatzen dira:

$$r: \begin{cases} \dfrac{x-9}{-3} = \dfrac{y-5}{-2} \\ \dfrac{x-9}{-3} = \dfrac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 33 = 0 \\ x + z - 9 = 0 \end{cases}$$

$r$ zuzena bere baitan duen plano-sortaren ekuazioa honakoa da:

$$(2x - 3y - 33) + \lambda(x + z - 9) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\pi: (2+\lambda)x + 3y - \lambda z - 33 - 9\lambda = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Plano-sortako planoen bektore normala $\vec{n}_\pi = (2+\lambda, 3, -\lambda)$ da. Hauxe da baita ere bila gabiltzan $\alpha$ eta $\beta$ planoen bektore normala. Bestalde, plano hauek plano horizontalarekin ($z = 0$ planoa) $45°$-tako angelua osatzen dute. Plano honen bektore normala $\vec{n}_{OXY} = (0,0,1)$ da. Bi planoren arteko angelua ematen duen formula aplikatuz, ondokoa daukagu:

$$\theta = arccos\left(\frac{|\vec{n}_{OXY} \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_{OXY}||\vec{n}_\pi|}\right) \Rightarrow cos\theta = \frac{|\vec{n}_{OXY} \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_{OXY}||\vec{n}_\pi|} \Rightarrow cos45° = \frac{|-\lambda|}{\sqrt{(2+\lambda)^2 + \lambda^2 + 3^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{(2+\lambda)^2 + \lambda^2 + 3^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\lambda^2}{(2+\lambda)^2 + \lambda^2 + 3^2} \Rightarrow (2+\lambda)^2 + \lambda^2 + 3^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow \lambda = -\frac{13}{4}$$

Planoetako bat honako ekuazioaren bidez emana dator:

$$\alpha: -\frac{5}{4}x + 3y + \frac{13}{4}z - \frac{15}{4} = 0$$

Planoak elkarzutak direla eta beraien bektore normala $\vec{n}_\pi = (2+\lambda, 3, -\lambda)$ dela kontuan hartuz, $\beta$ planoaren bektore normala kalkula daiteke:

$$\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \Rightarrow = \left(-\frac{5}{4}, 3, \frac{13}{4}\right) \cdot (2+\lambda, 3, -\lambda) = 0 \Rightarrow \frac{9}{2}\lambda = \frac{13}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{13}{9}$$

Hortaz, $\beta$ planoaren ekuazioa ondokoa da:

$$\beta: \frac{31}{9}x + 3y - \frac{13}{9}z - \frac{15}{4} = 0$$

Bukatzeko $\alpha$ eta $\beta$ planoen eta $P(6,3,a)$ eta $Q(4,5,a)$ puntuetatik igarotzen den zuzenaren arteko ebakidura kalkulatzen da. Bi puntu hauetatik pasatzen den $s$ zuzena definitzen da:

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (4,5,a) - (6,3,a) = (-2,2,0)$. Eta $s$ zuzenaren ekuazio parametrikoak hauek dira:

$$s: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = a \end{cases}$$

$s$ zuzenaren eta $\alpha$ planoaren arteko ebakidura kalkulatzen da:

$$-\frac{5}{4}(4-2t) + 3(5+2t) + \frac{13}{4}a - \frac{15}{4} = 0 \Rightarrow 34t = -25 - 13a \Rightarrow t = \frac{-25-13a}{34}$$

Beraz, ebakidura puntua $S_1\left(\frac{93+13a}{17}, \frac{60-13a}{17}, a\right)$ da.

Era berean $s$ zuzenaren eta $\beta$ planoaren arteko ebakidura kalkulatzen da:

$$\frac{31}{9}(4-2t) + 3(5+2t) - \frac{13}{9}a - \frac{15}{4} = 0 \Rightarrow -8t = -\frac{901}{4} + 13a \Rightarrow t = \frac{901-52a}{32}$$

Eta ebakidura puntua $S_2\left(\frac{-837+52a}{16}, \frac{981-52a}{16}, a\right)$ da.

3 ARIKETA

Izan bitez $s$ $B(9,0,2)$ eta $C(5,4,2)$ puntuetatik pasatzen den zuzena eta $r$ $D(13,4,5)$ eta $E(17,0,1)$ puntuetatik pasatzen dena. Kalkulatu $A(11,5,8)$ puntuarekiko eta $s$ zuzenarekiko distantziakidea den eta $r$ zuzenarekiko paraleloa den planoaren ekuazioa.

*Ebazpena:*

Lehendabizi $s$ eta $r$ zuzenen ekuazio parametrikoak kalkulatuko ditugu:

$$\overrightarrow{BC} = (-4,4,0) \Rightarrow s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DE} = (4,-4,-4) \Rightarrow r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jarraian, $A$ puntua bere baitan duen eta $s$ zuzenarekiko elkarzuta den $\pi$ planoa kalkulatuko dugu. $\pi$ planoa $s$ zuzenarekiko elkarzuta bada, $\vec{n}_\pi$ bektorea $\vec{v}_s$ bektorearekiko paraleloa da. Hau da, $\vec{n}_\pi = (-1,1,0)$. Eta $\pi$ planoaren ekuazioa honakoa da:

$$\pi: -1(x-11) + 1(y-5) + 0(z-8) \Rightarrow \pi: x - y - 6 = 0$$

Ondoren $\pi$ planoaren eta $s$ zuzenaren arteko $P$ ebaki-puntua eta $\overline{AP}$ segmentuaren $M$ erdiko puntua kalkulatuko ditugu:

$$\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ x = 9 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \Rightarrow P = \left(\frac{15}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$$

$$M = \frac{A+P}{2} = \frac{(11,5,8) + \left(\frac{15}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)}{2} = \left(\frac{37}{4}, \frac{13}{4}, 5\right)$$

$M$ kalkulatu ostean, puntu hau bere barnean duen eta $s$ zuzenarekiko elkarzuta den $\pi'$ planoa kalkulatzen da. Izan bedi $\vec{v}_{\pi'} = (a,b,c)$, $\pi'$ planoaren bektore normala. Plano hau $s$ zuzenarekiko elkarzuta denez, honakoa betetzen da:

$$\vec{v}_{\pi'} \cdot \vec{v}_S = 0 \Rightarrow (a,b,c) \cdot (-1,1,0) = 0 \Rightarrow -a + b = 0 \Rightarrow a = b \;\; \forall c \Rightarrow \vec{v}_{\pi'} = (a,a,c)$$

$\pi'$ planoa $r$ zuzenarekiko paraleloa denez:

$$\vec{v}_{\pi'} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (a,a,c) \cdot (1,-1,-1) \Rightarrow a - a - c = 0) \Rightarrow c = 0$$

Beraz, $\pi'$ planoarekiko bektore normala $\vec{v}_{\pi'} = (a,a,0)$ da. Adibidez, $\vec{v}_{\pi'} = (1,1,0)$ bektorea kontsideratuko dugu.

Bukatzeko, $\pi'$ planoaren ekuazioa kalkulatzen da bere bektore normala eta $M$ puntua erabilita:

$$\pi': 1\left(x - \frac{37}{4}\right) + 1\left(y - \frac{13}{4}\right) + 0(z-5) \Rightarrow x + y - \frac{50}{4} = 0$$