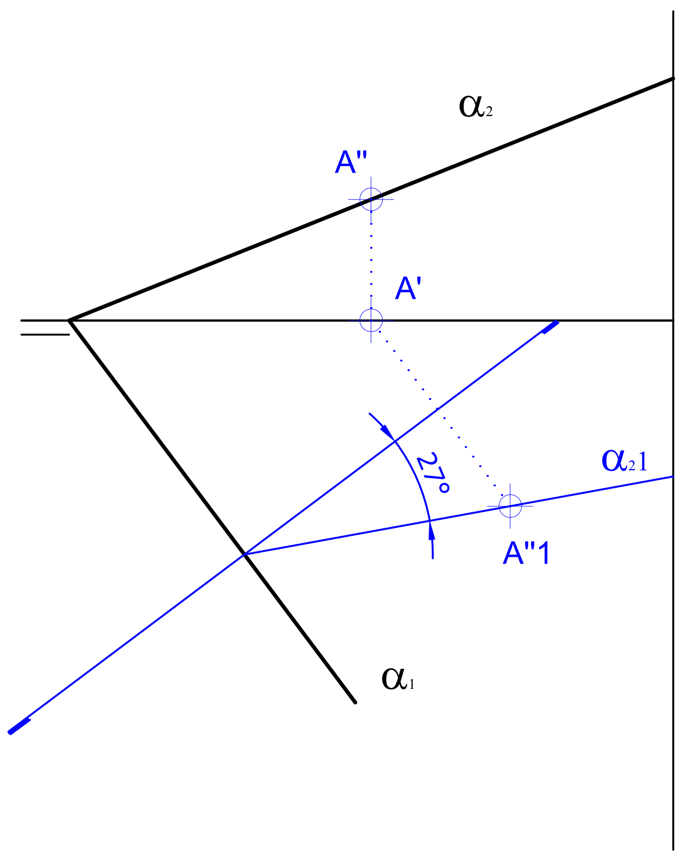
1 ARIKETA

Kalkulatu $\alpha: 4x+3y+10z=32$ *eta* $\beta: z=0$ *planoek osatzen duten angelua.*

Aurki ezazu α planoak eta PH-k osatzen duten angelua.



Ariketa hau plano-aldaketa baten bidez ebatzi da, planoa bertikalarekiko proiektatzaile jarriz.

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

1 ARIKETA

Kalkulatu $\alpha: 4x+3y+10z=32$ *eta* $\beta: z=0$ *planoek osatzen duten angelua.*

Ebazpidea:

Planoen bektore normalak hauek dira: $\vec{n}_\alpha=(4,3,10)$ eta $\vec{n}_\beta=(0,0,1)$. Bi planoek osatzen duten angelua ondoko adierazpenaren bidez emana dator:

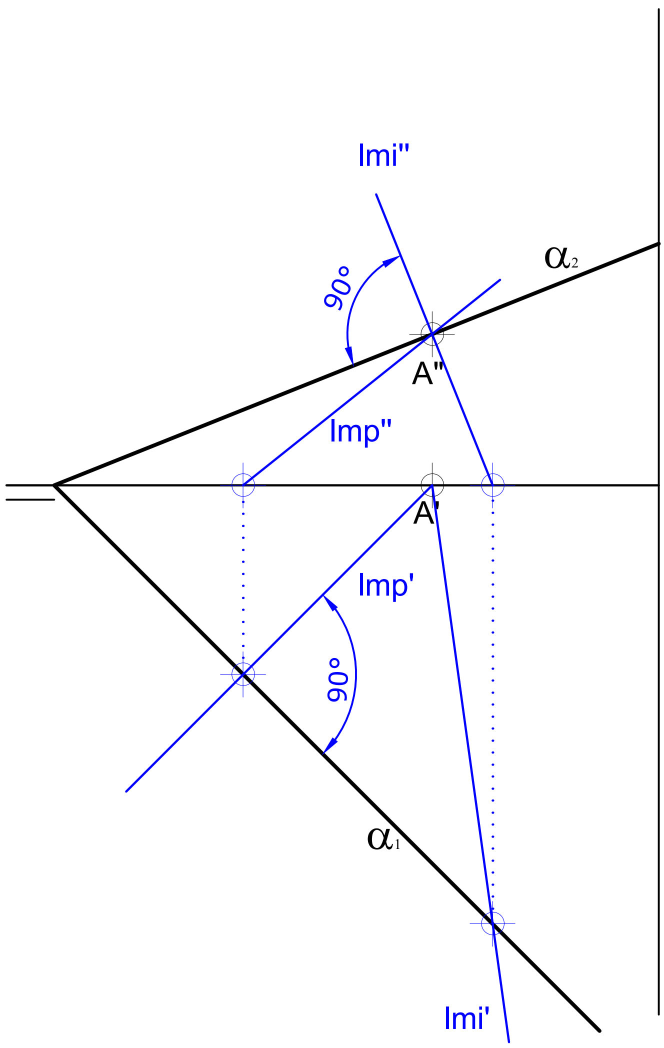
$$\theta=\arccos\left(\frac{\left|\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta\right|}{\left|\vec{n}_\alpha\right|\left|\vec{n}_\beta\right|}\right)\Rightarrow\theta=\arccos\left(\frac{\left|4\cdot 0+2\cdot 0+10\cdot 1\right|}{\sqrt{4^2+3^2+10^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}\right)=\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\theta=26,5650^{\circ}$$

2 ARIKETA

Kalkulatu $\alpha : 2x + 2y + 5z = 16$ *planoaren malda handieneko eta inklinazio handieneko zuzenak* $A(3,0,2)$ *puntuan.*

Marraz itzazu A puntutik α planoaren Malda Handieneko Lerroa (mhl) eta Inklinazio Handieneko Lerroa (ihl).



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

2 ARIKETA

Kalkulatu $\alpha: 2x+2y+5z=16$ *planoaren malda handieneko eta inklinazio handieneko zuzenak* $A(3,0,2)$ *puntuan.*

<u>*Ebazpidea:*</u>

α planoaren A puntuko malda handieneko zuzena kalkulatzeko ondoko pausoak jarraitzen dira:

- α planoaren eta XOY planoaren arteko r ebakidura zuzena kalkulatu:

$$r: \begin{cases} 2x+2y+5z=16 \\ z=0 \end{cases}$$

- A puntutik pasatuz r zuzenarekiko elkarzuta den π planoa kalkulatu:

Bila gabiltzan planoa r zuzenarekiko elkarzuta bada, planoaren bektore normala r zuzenaren norabide bektorearekiko paraleloa izango da. r zuzenaren norabide-bektorea kalkulatuko dugu:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} = (2,-2,0)$$

Jarraian bektore normaltzat $\vec{n}_\pi = (2,-2,0)$ bektorea duen eta $A=(3,0,2)$ puntutik igarotzen den π planoa kalkulatuko dugu:

$$\pi: 2(x-3)-2(y-0)+0(z-2)=0 \Rightarrow \pi: x-y-3=0$$

- Malda handieneko zuzena α eta π planoen ebakidura da:

$$\begin{cases} 2x+2y+5z=16 \\ x-y=3 \end{cases}$$

α planoaren A puntuko inklinazio handieneko zuzena kalkulatzeko pausoak antzekoak dira, bakarrik lehenengo pausoa da ezberdina:

- α planoaren eta XOZ planoaren arteko s ebakidura zuzena kalkulatu:

$$s: \begin{cases} 2x+2y+5z=16 \\ y=0 \end{cases}$$

2 ARIKETA

- A puntutik pasatuz s zuzenarekiko elkarzuta den β planoa kalkulatu:

Bila gabiltzan planoa s zuzenarekiko elkarzuta bada, planoaren bektore normala s zuzenaren norabide bektorearekiko paraleloa izango da. s zuzenaren norabide bektorea kalkulatuko dugu:

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 2\vec{k} = (-5,0,2)$$

Jarraian bektore normaltzat $\vec{n}_\beta = (-5,0,2)$ bektorea duen eta $A = (3,0,2)$ puntutik igarotzen den β planoa kalkulatuko dugu:

$$\beta : -5(x-3) + 0(y-0) + 2(z-2) \Rightarrow \beta : 5x - 2y - 11 = 0$$

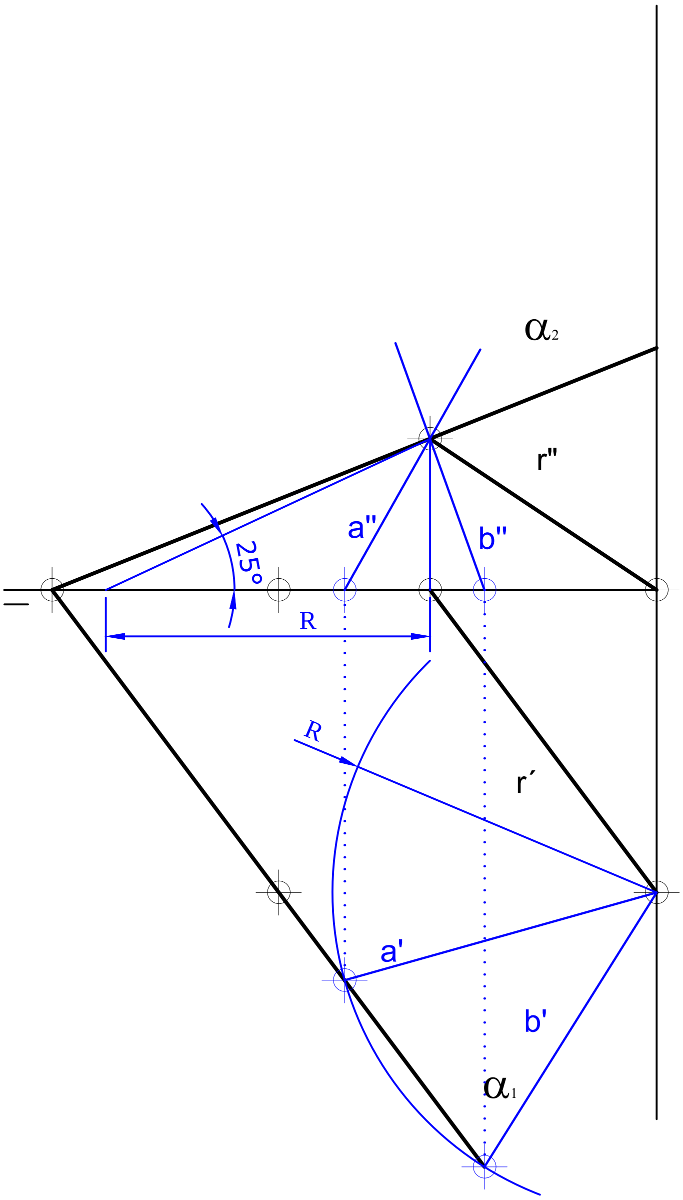
- Inklinaziorik handieneko zuzena α eta β planoen ebakidura da:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 5z = 16 \\ 5x - 2y = 11 \end{cases}$$

3 ARIKETA

Kalkulatu $r: \frac{x}{3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{2}$ *zuzena ebakitzen duten,* $(8,0,0)$, $(3,0,2)$ *eta* $(5,4,0)$ *puntuetatik pasatzen den planoan dauden eta XOY planoarekin 25º-tako angelua osatzen duten zuzenak.*

Marraz itzazu r zuzena mozten duten zuzenak, α planoan daudenak eta PH-rekin 25º osatzen dutenak.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

Kalkulatu $r:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z}{2}$ *zuzena ebakitzen duten,* $(8,0,0)$, $(3,0,2)$ *eta* $(5,4,0)$ *puntuetatik pasatzen den planoan dauden eta XOY planoarekin 25º-tako angelua osatzen duten zuzenak.*

<u>*Ebazpidea:*</u>

$(8,0,0)$, $(3,0,2)$ eta $(5,4,0)$ puntuetatik pasatzen den π planoa kalkulatuko dugu. Horretarako bi bektore ez paralelo behar dira. Adibidez, honako bektoreak kontsideratuko ditugu:

$$\overrightarrow{AB}=(3,0,2)-(8,0,0)=(-5,0,2)$$

$$\overrightarrow{BC}=(5,4,0)-(3,0,2)=(2,4,-2)$$

π planoa ondoko ekuazioaren bidez emana dator:

$$\begin{vmatrix} x-8 & -5 & 2 \\ y & 0 & 4 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi: 4x+3y+10z-32=0$$

r zuzena ebakiz π planoan dagoen eta XOY planoarekin 25º-tako angelua osatzen duen zuzena aurkitu behar da. XOY planoak $z=0$ ekuazioa dauka, bere bektore normala $\vec{n}=(0,0,1)$ izanik.

Izan bedi $\vec{v}_s=(a,b,c)$ bila gabiltzan zuzenaren norabide-bektorea eta $\vec{n}_\pi=(4,3,10)$ π planoaren bektore normala. Bila gabiltzan zuzena π planoan dagoenez, $\vec{v}_s \perp \vec{n}_\pi$:

$$\vec{v}_s \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow 4a+3b+10c=0 \Rightarrow c=-\frac{4a+3b}{10}$$

Beraz, bila gabiltzan zuzenaren norabide-bektorea $\vec{v}_s=\left(a,b,-\dfrac{4a+3b}{10}\right)$ da.

Beste alde batetik, bila gabiltzan zuzenak eta planoak 25º-tako angelua osatzen dute:

$$\sin\alpha=\frac{|\vec{v}_s\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}_s||\vec{n}|} \Rightarrow \sin 25^\circ = \frac{\left|-\dfrac{4a+3b}{10}\right|}{\sqrt{a^2+b^2+\left(\dfrac{4a+3b}{10}\right)^2}} \Rightarrow 0,42=\frac{\left|-\dfrac{4a+3b}{10}\right|}{\sqrt{a^2+b^2+\left(\dfrac{4a+3b}{10}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$0,42^2=\frac{\left(\dfrac{4a+3b}{10}\right)^2}{a^2+b^2+\left(\dfrac{4a+3b}{10}\right)^2} \Rightarrow 0,1764\left(a^2+b^2+\left(\frac{4a+3b}{10}\right)^2\right)=\left(\frac{4a+3b}{10}\right)^2 \Rightarrow$$

$$0,1764\left(100a^2+100b^2+(4a+3b)^2\right)=(4a+3b)^2 \Rightarrow$$

$$3,8224a^2-19,7666ab+9,587b^2=0 \Rightarrow$$

$$a=\frac{19,7666b \pm \sqrt{(19,7666b)^2-4\cdot 3,8224\cdot 9,5876b^2}}{2\cdot 3,8224} \Rightarrow a=\begin{cases} 0,5418b \\ 4,6292b \end{cases}$$

Beraz, eskatutako baldintzak betetzen dituzten bi zuzen daude. Berauen norabide bektoreak $\vec{v}_{s1}=\left(0,5418b, b, -\frac{4\cdot 0,5418b+3b}{10}\right)$ eta $\vec{v}_{s1}=\left(4,6292b, b, -\frac{4\cdot 4,6292b+3b}{10}\right)$ dira.

Gainera, bila gabiltzan zuzenak r zuzena ebaki behar du. Beraz, zuzena guztiz definituta gera dadin ezinbestekoa da beraien arteko ebaki-puntua kalkulatzea. Bila gabiltzan zuzenaren eta r zuzenaren arteko ebaki-puntua, r zuzenaren eta π planoaren arteko ebaki-puntua da. r zuzeneko puntu orokor batek $P(3\lambda, 4-4\lambda, 2\lambda)$ forma dauka. r zuzenaren eta π planoaren arteko ebaki-puntua kalkulatuko dugu:

$$4\cdot 3\lambda+3\cdot(4-4\lambda)+10\cdot 2\lambda-32=0 \Rightarrow 20\lambda-20=0 \Rightarrow \lambda=1$$

Ebaki-puntua $Q(3,0,2)$ da.

Eta bila gabiltzan zuzenak honakoak dira:

$$s1:\begin{cases} x=3+0,5418\lambda \\ y=\lambda \\ z=2-0,51672\lambda \end{cases} \quad \text{eta} \quad s2:\begin{cases} x=3+4,6292\lambda \\ y=\lambda \\ z=2-2,1516\lambda \end{cases}$$