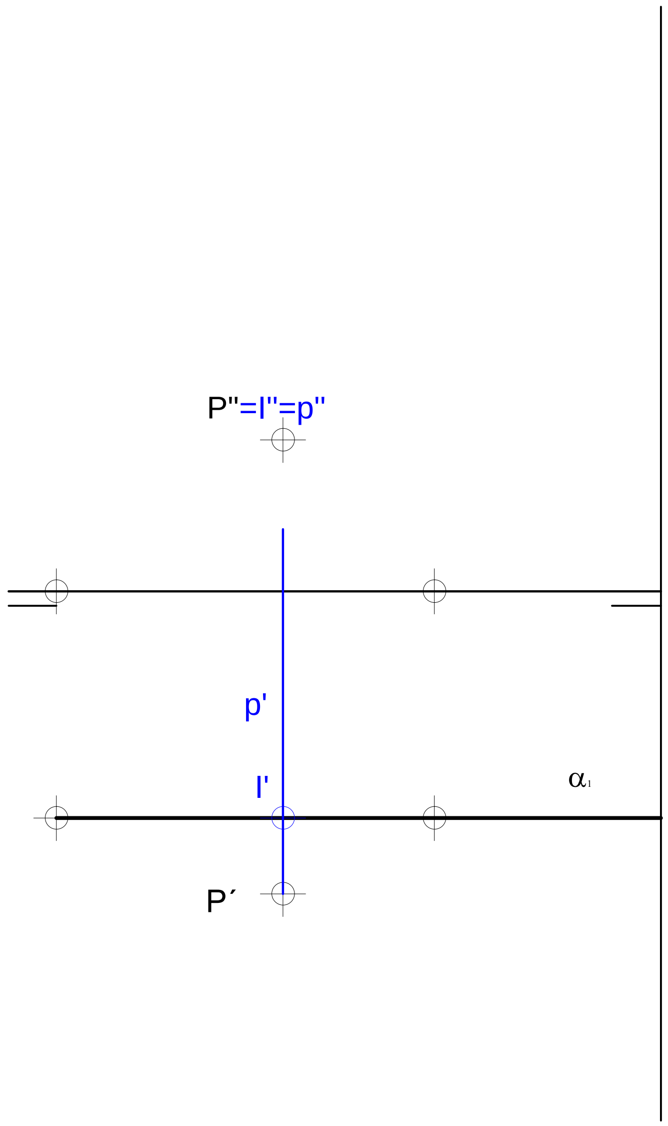
1 ARIKETA

Trazatu $P(5,3,2)$ puntutik $(7,0,0)$ eta $(4,3,0)$ puntuak barne dituen eta XOY planoarekiko elkarzuta den planoarekiko elkarzuta den zuzenaren ekuazioa. Bien arteko ebaki-puntua zehaztu.

Marraz ezazu P puntutik "p" zuzen bat α planoarekiko elkartzuta dena. Bien arteko elkargunea den I puntua aurkitu.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

1 ARIKETA

Trazatu $P(5,3,2)$ puntutik $(7,0,0)$ eta $(4,3,0)$ puntuak barne dituen eta XOY planoarekiko elkarzuta den planoarekiko elkarzuta den zuzenaren ekuazioa. Bien arteko ebaki-puntua zehaztu.

<u>Ebazpena:</u>

$(7,0,0)$ eta $(4,3,0)$ puntuak barne dituen α planoaren ekuazio inplizitua kalkulatzen da, horretarako planoko puntu bat eta bi bektore erabiliz.

Adibidez, $\vec{u} = (7,0,0) - (4,3,0) = (3,-3,0)$ bektorea planoan dagoen bektore bat da. Gainera, α XOY planoarekiko elkarzuta denez, $(0,0,1)$ bektorea ere planoan dago. Ondorioz, α planoaren ekuazio inplizitua ondorengo ekuazio ebatziz lortzen da:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-7 & 0 & 3 \\ y & 0 & -3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha: x + y = 7$$

Ekuazio honetatik $\vec{n} = (1,1,0)$ planoaren bektore normala dela ondorioztа daiteke.

Beste alde batetik, eskatutako r zuzena α planoarekiko elkarzuta denez bere norabide bektore $\vec{n} = (1,1,0)$ izango da. Bestalde, zuzena $P = (5,3,2)$ puntutik igarotzen denez zuzenaren ekuazio parametrikoak kalkulatzen dira:

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bere ekuazio inplizituak ondorengoak dira:

$$\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = y - 3 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x - y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Eskatutako ebakidura hurrengo da:

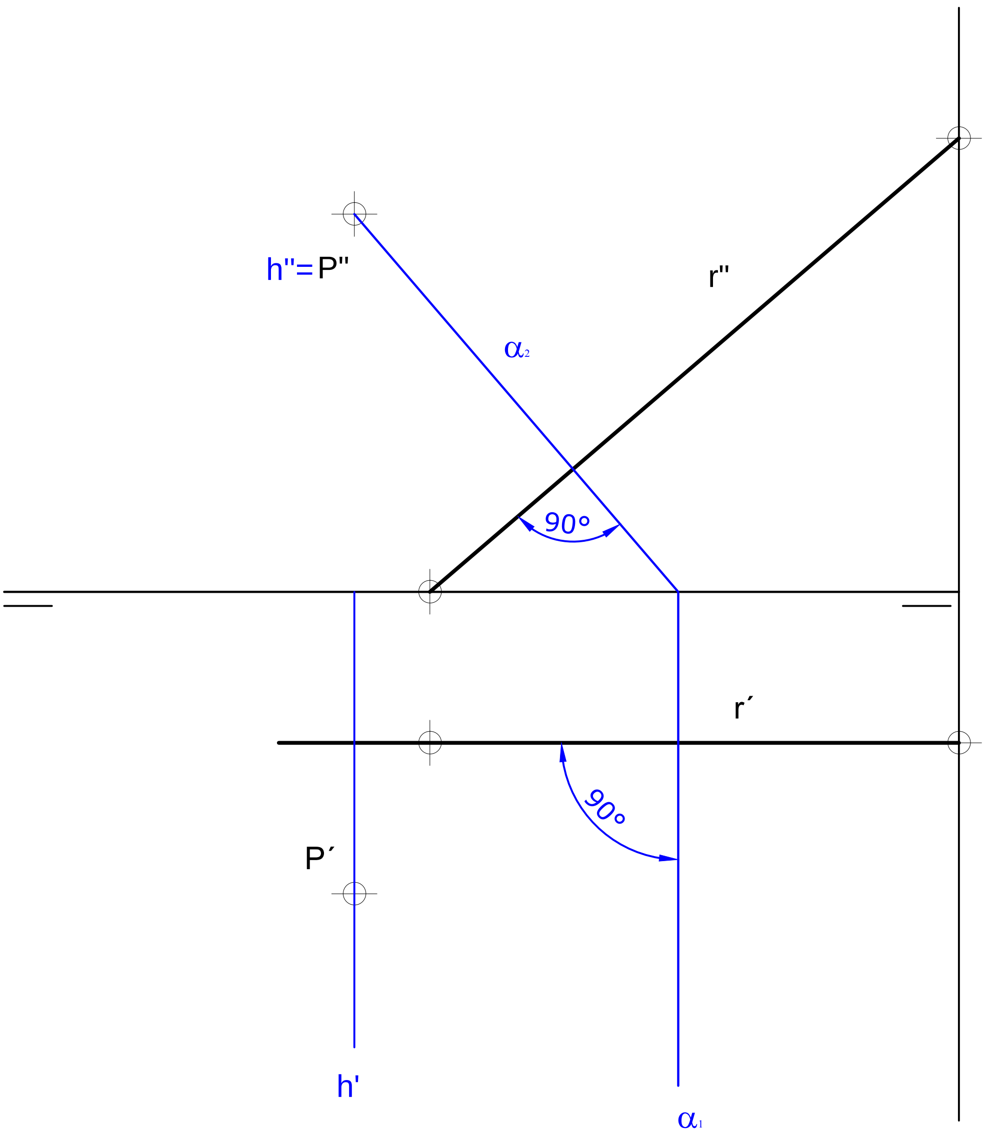
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ z = 2 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

r zuzenaren eta α planoaren arteko ebakidura-puntua $\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$ da.

2 ARIKETA

Trazatu $P(8,5,4)$ *puntutik* $(7,2,0)$ *eta* $(0,2,6)$ *puntuak barne dituen zuzenarekiko elkarzuta den planoa. Bien arteko ebaki-puntua zehaztu.*

Marraz ezazu P puntutik α plano bat r zuzenarekiko elkartzuta dena. Bien arteko elkargunea den I puntua aurkitu



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

2 ARIKETA

Trazatu $P(8,5,4)$ puntutik $(7,2,0)$ eta $(0,2,6)$ puntuak barne dituen zuzenarekiko elkarzuta den planoa. Bien arteko ebaki-puntua zehaztu.

Ebazpena:

Izan bedi r emandako puntuak barne dituen zuzena. Zuzen honen norabide bektorea $\vec{v}_r = (7,2,0) - (0,2,6) = (7,0,-6)$ da.

π planoaren bektore normala r zuzenaren norabide bektorearekiko paraleloa izango da:

$$\vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{n}_\pi = (7,0,-6)$$

Hortaz, $\pi: 7x + 0y - 6z + k = 0$.

π planoak $P(8,5,4)$ puntua barne izan behar duenez, puntuak planoaren ekuazio bete behar du eta k parametroa zehazten da:

$$7 \cdot 8 - 6 \cdot 4 + k = 0 \Rightarrow k = -32$$

π planoaren ekuazioa ondorengoa da:

$$\pi: 7x - 6z - 32 = 0$$

r zuzenaren eta π planoaren arteko ebakidura kalkulatzeko, zuzenaren ekuazio parametrikoak idazten dira:

$$r: \begin{cases} x = 7 + 7\lambda \\ y = 2 \\ z = -6\lambda \end{cases}$$

$r \cap \pi$ planteatzen da, $(x, y, z) \in r$ puntu orokor bat planoan ordezkatuz:

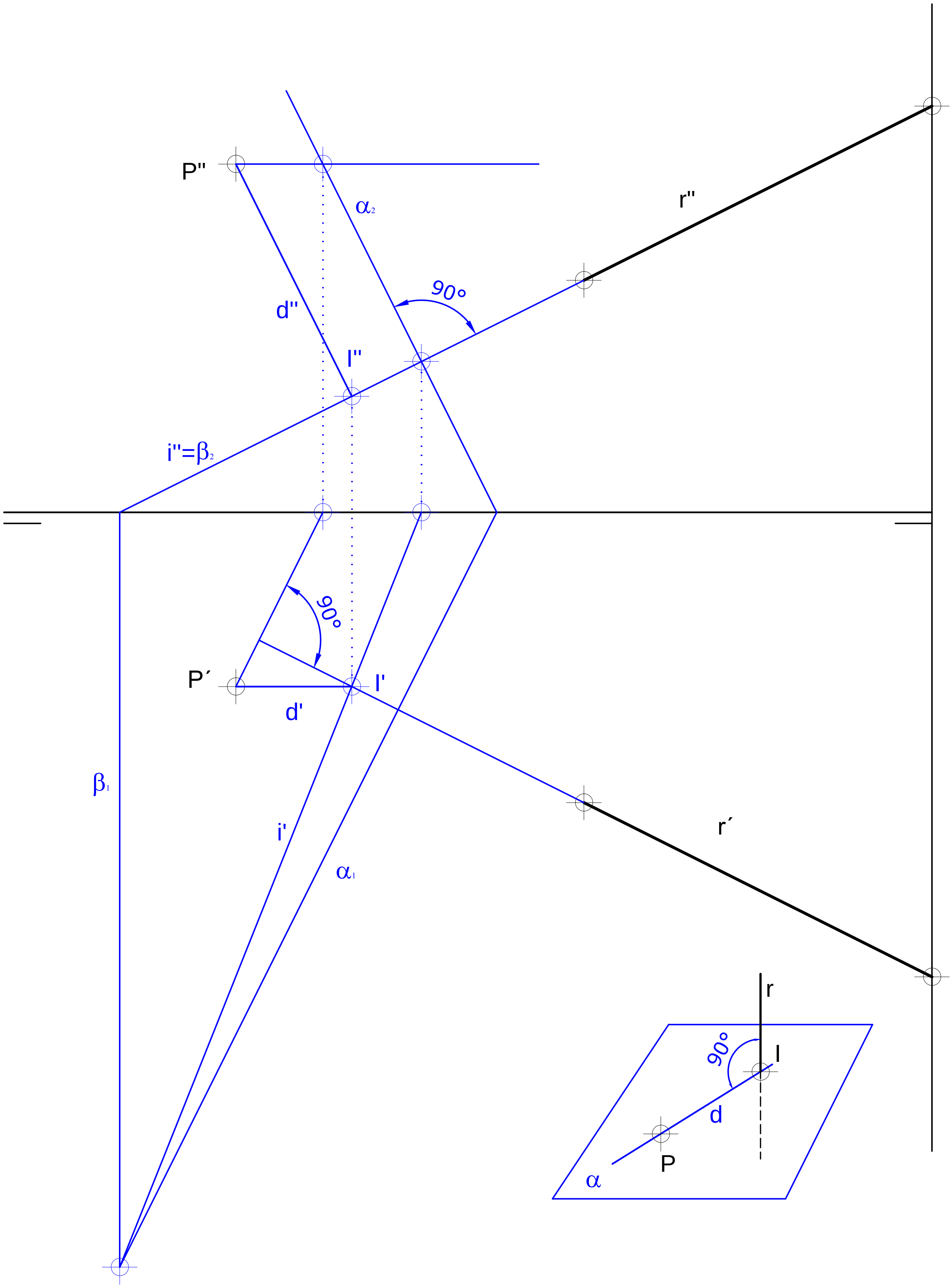
$$7(7 + 7\lambda) + 36\lambda - 32 = 0 \Rightarrow 49 + 49\lambda + 36\lambda - 32 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5}$$

Eta ebakidura-puntua $Q\left(\frac{28}{5}, 2, \frac{42}{5}\right)$ da.

3 ARIKETA

Kalkulatu $P(12,3,6)$ puntutik igaro eta r: $\frac{x-6}{-6}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-4}{3}$ zuzena ebaki eta r zuzenarekiko elkarzuta den zuzena. Bien arteko ebaki-puntua zehaztu.

Marraz ezazu P puntutik r zuzena mozten duen eta honekiko elkartzuta den beste zuzen bat. Bien arteko elkargunea aurkitu.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

3 ARIKETA

Kalkulatu $P(12,3,6)$ *puntutik igaro eta* $r\colon \frac{x-6}{-6}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-4}{3}$ *zuzena ebaki eta* r *zuzenarekiko elkarzuta den zuzena. Bien arteko ebaki-puntua zehaztu.*

Ebazpena:

P puntutik igarotzen den eta bektore normaltzat r zuzenaren norabide bektorea duen π planoa definitzen da:

$$\pi\colon -6(x-12)+3(y-3)+3(z-6)=0 \;\Rightarrow\; \pi\colon -2x+y+z+15=0$$

Zuzenaren ekuazio jarraitutik abiatuz bere ekuazio parametrikoak lortzen dira:

$$\frac{x-6}{-6}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-4}{3}=\lambda \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=6-6\lambda \\ y=5+3\lambda \\ z=4+3\lambda \end{cases}$$

Balio hauek planoaren ekuazioan ordezkatuz Q puntua, π planoaren eta r zuzenaren arteko ebaki-puntua, kalkulatzen da.

$$-2(6-6\,\lambda)+1(5+3\lambda)+1(4+3\lambda)+15=0 \;\Rightarrow \lambda=-2/3$$

$$\begin{cases} x=6-6\,(-2/3) \\ y=5+3\,(-2/3) \\ z=4+3\,(-2/3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases} \;\Rightarrow Q=(10,3,2)$$

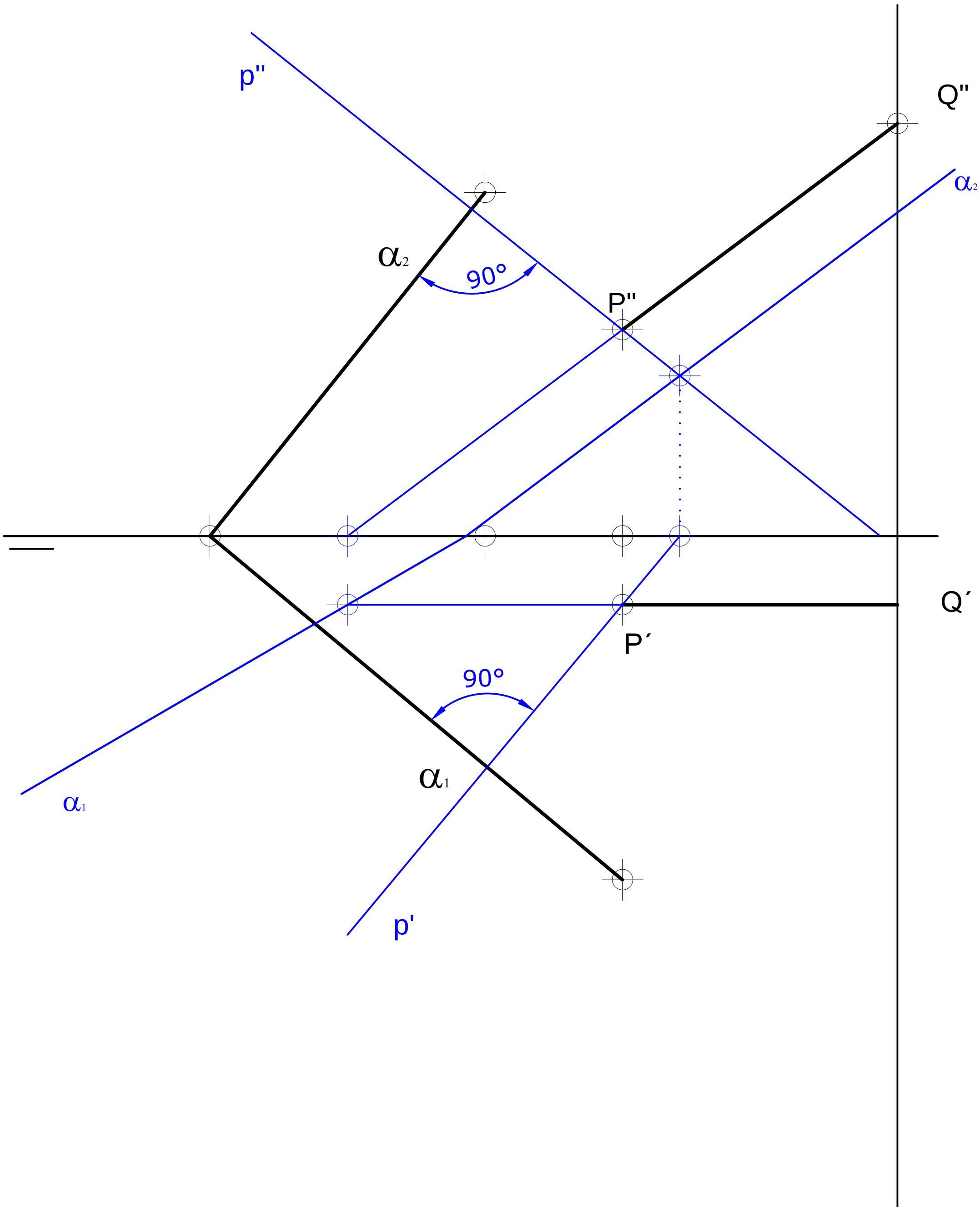
Eskatzen den zuzen elkarzuta P eta Q puntuetatik igarotzen den zuzena da:

$$p\colon \begin{cases} \mathrm{y}=3 \\ 2\mathrm{x}-\mathrm{z}=18 \end{cases}$$

4 ARIKETA

Trazatu r ($P(4,1,3)$ eta $Q(0,1,6)$ puntuetatik igarotzen den) zuzenetik α ($(10,0,0)$, $(6,0,5)$ eta $(4,5,0)$ puntuak definitzen duten) planoarekiko elkarzutak diren planoak.

Marraz itzazu P eta Q puntuetatik α planoarekiko elkartzutak diren planoak.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

4 ARIKETA

Trazatu r *(*$P(4,1,3)$ *eta* $Q(0,1,6)$ *puntuetatik igarotzen den) zuzenetik* α $((10,0,0)$, $(6,0,5)$ *eta* $(4,5,0)$ *puntuak definitzen duten) planoarekiko elkarzutak diren planoak.*

__Ebazpena:__

r zuzenetik α planoarekiko elkarzutak diren planoak trazatzeko ondorengo pausuak jarraitu behar dira:

- r zuzenaren ekuazio lortu:

  Q puntua eta $\vec{u} = Q - P = (-4,0,3)$ norabide bektorea erabiliz zuzenaren ekuazio parametrikoak hurrengoak dira:

$$r: \begin{cases} x = 0 - 4\lambda \\ y = 1 \\ z = 6 + 3\lambda \end{cases}$$

  Ekuazio inplizituak ondokoak izanik:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4} = \dfrac{z-6}{3} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \; r: \begin{cases} 3x - 4z = 24 \\ y = 1 \end{cases}$$

- r zuzena barne duen plano sorta kalkulatu:

  r zuzena barne duten planoan adierazpena ondorengoa da

$$(y-1) + \lambda(3x + 4z - 24) = 0 \Rightarrow 3\lambda x + y + 4\lambda z - 24\lambda - 1 = 0$$

- α planoaren bektore normala kalkulatu:

  Planoaren bi norabide bektore bektorialki biderkatuz, adibidez $(6,0,5) - (10,0,0) = (-4,0,5)$ eta $(4,5,0) - (10,0,0) = (-6,5,0)$ bektorialki biderkatuz, hurrengoa lortzen da:

$$\vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 5 \\ -6 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -25\vec{i} - 30\vec{j} - 20\vec{k}$$

  Hortaz, α planoaren bektore normala $\vec{n} = (5,6,4)$ da.

- r zuzena barne duten eta α planoarekiko elkarzutak diren planoak lortu:

Planoak α planoarekiko elkarzutak izateko, beraiei elkartutako bektorea $\vec{n}_\alpha$ bektorearekiko elkarzuta izan behar da, hau da:

$$(3\lambda, 1, 4\lambda) \cdot (5,6,4) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-6}{31}$$

Balio hau ariketako bigarren puntuan lortutako adierazpenean ordezkatuz, r zuzena barne duen eta α planoarekiko elkarzuta den planoaren ekuazioa lortzen da:

$$3\left(\frac{-6}{31}\right)x + y + 4\left(\frac{-6}{31}\right)z - 24\left(\frac{-6}{31}\right) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$18\mathrm{x} - 31\mathrm{y} + 24\mathrm{z} - 113 = 0$$