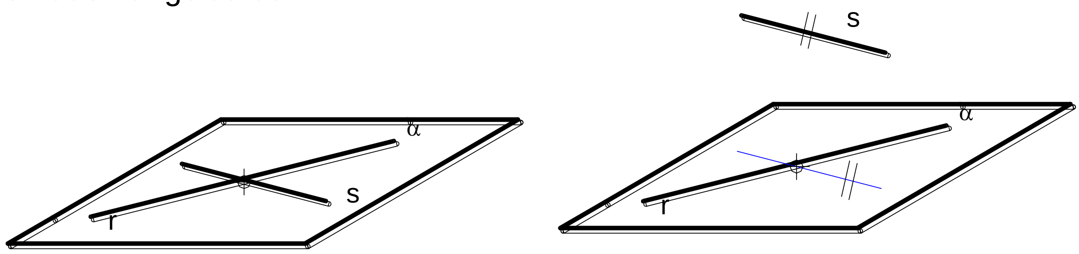
VI GAIA: ANGELUAK

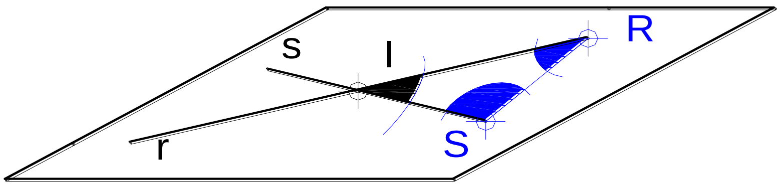
6.1. M – Bi zuzenen arteko angelua

Elkar ebakitzen duten bi zuzenen arteko angelua kalkulatzea erraza da. Zuzenek elkar gurutzatzen badute, bi zuzenen arteko angelua, zuzen batek bere puntu batetik igarotzen den eta bestearekiko paraleloa den zuzenarekin sortzen duen angelua da.



Proiekzio ortogonalen sistemetan, bi zuzenen arteko angelua kalkulatzeko prozedura desberdinak daude.

Geometriaren ikuspuntutik, **RIS** triangelu baten angeluak eta triangeluaren aldeen luzera kalkulatuz ebatz daiteke: **R, r** zuzeneko edozein puntu, **S, s** zuzeneko edozein puntu eta **I** bi zuzenen arteko ebaki-puntua izanik.

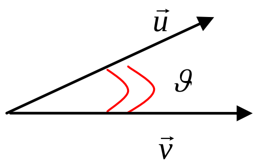


Geometria deskribatzailearen ikuspegitik, bi zuzenen arteko angeluaren ebazpenak, bi zuzenek sortzen duten planoa posizio egokian egotean datza, honela angelu hori zuzenean ikusi ahal delako. Jarraitu ahal diren prozesuak hiru dira:

1) Eraispenak
2) Plano aldaketak
3) Biraketak

6.1. A – Bi zuzenen arteko angelua

Gogoratu, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ edozein bi bektoreren arteko angelua

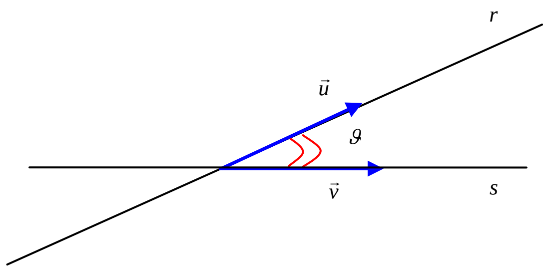


hurrengo espresioa erabiliz kalkulatzen dela $\cos\vartheta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$.

Bi zuzenen posizio erlatiboak hurrengoak dira: bat datoz, paraleloak dira, elkar ebakitzen dute, edo elkar gurutzatzen dute. Posizio hauen arabera hurrengoa dugu:

- Zuzen ebakitzaileak: Bi zuzen elkar ebakitzen badira, binaka berdinak diren lau angelu zehazten dituzte. Angelu hauetako txikienari bi zuzenen arteko angelua deritzo.
- Elkar gurutzatzen duten zuzenak: Zuzen batekiko paraleloa izanik beste zuzena ebakitzen duen zuzena eraiki ondoren, elkar ebakitzen duten bi zuzenen arteko angelurik txikiena da.
- Bat datozen zuzenak edo zuzen paraleloak: euren arteko angelua 0º da.

Bi zuzenen arteko angelua, euren norabide bektoreen arteko angeluarekin bat dator, azkeneko angelu hau, angelu zorrotza bada. Bi bektoreen arteko angelua kamutsa bada berriz, bi zuzenen arteko angelua, bere angelu betegarria izango da.



Beraz, $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ norabide bektorea duen r zuzenaren eta $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ norabide bektorea duen s zuzenaren arteko angelua hurrengo formula erabiliz kalkula daiteke:

$$\theta = ang(r,s) = \arccos\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \arccos\frac{|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2++u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2++v_2^2+v_3^2}}$$

Angelu kamutsa bada, bere angelu betegarria erabiliz:

$$\cos(180-\vartheta) = -\cos\vartheta$$

Kasu konkretu bezala, r eta s zuzenak elkarzutak dira $\cos\theta = 0$ bada $\Rightarrow$

hau da, $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$ bada.

6.1. Ikasgai bietako adibideak

►*38 Adibidea (A)*

$r:\begin{cases} x-3y=1 \\ 2y=z \end{cases}$ eta $s:\begin{cases} x+3z=10 \\ y-2z=-3 \end{cases}$ zuzenek sortzen duten angelua lortu.

Emaitza: r eta s zuzenetan kokatutako bi puntu erabiliz, euren norabide bektoreak lortuko ditugu. r zuzeneko A=(1,0,0) eta B=(4,1,2) puntuak aukeratuz $\vec{u}=(3,1,2)$,

r-ren norabide bektorea lortu dugu. Eta s zuzeneko C=(4,1,2) eta D=(1,3,3) puntuak erabiliz, $\vec{v}=(3,-2,-1)$.

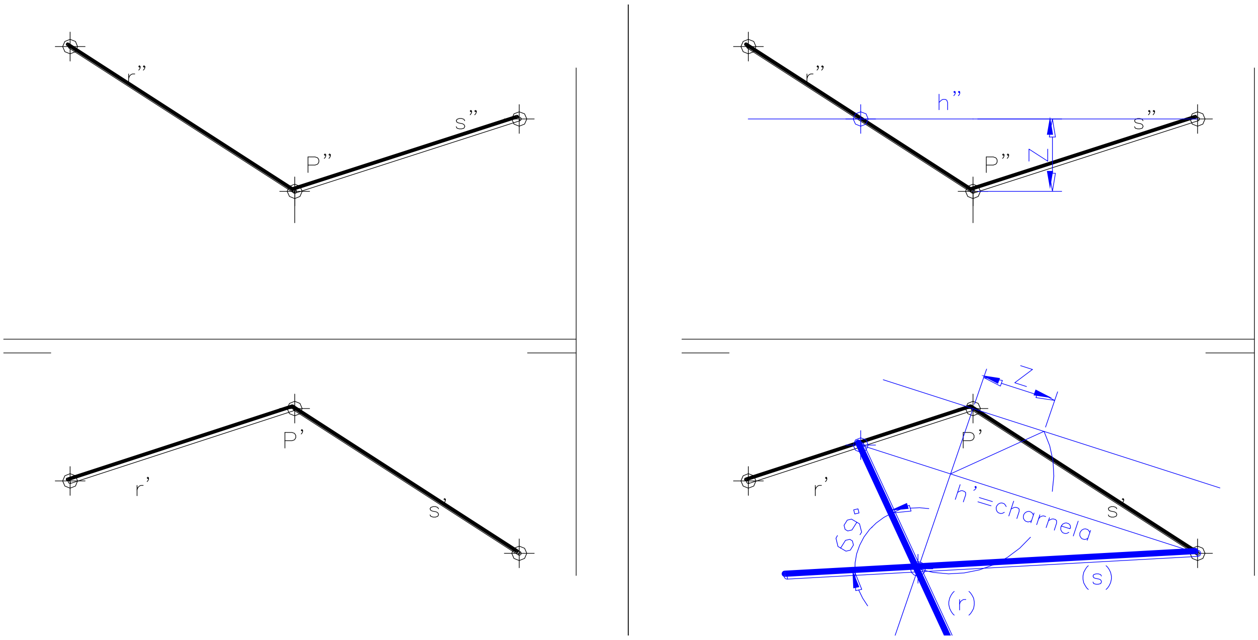
$$\theta = arcos\,\frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = arcos\frac{|(3,1,2).(3,-2,-1)|}{\sqrt{9+1+4}\,.\sqrt{9+4+1}} = arcos\frac{|9-2-2|}{\sqrt{14}.\sqrt{14}} = arcos\frac{5}{14}$$

$$= arcos\;0{,}3771 \rightarrow \boxed{\theta = 69{,}08°}$$

► ***38 Adibidea (M)***

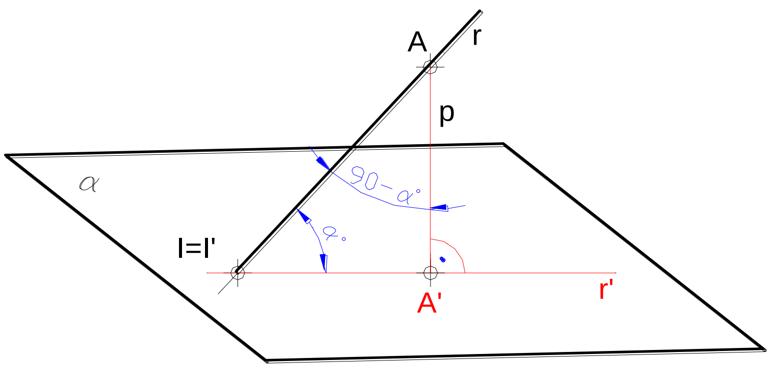
r eta s zuzenek sortzen duten angelua lortu.

Emaitza: Zuzenek elkar ebakitzen dutenez, plano bat definitzen dute. Angelua lortzeko planoa eraitsi egin behar da (egiazko magnitudera eraman). Kasu honetan, h horizontala erabili da eraispena egiteko txarnela bezala.



6.2. M – Zuzen baten eta plano baten arteko angelua

Zuzen baten eta plano baten arteko angelua, zuzenak planoan duen proiekzioak eta zuzenak, berak, sortzen duten angelua da. Irudian ageri den bezala, angelu hau, r zuzenak eta planoarekiko elkarzuta den eta puntutik igarotzen den zuzenak osatzen duten angeluaren osagarria da. Beraz, aurreko kasuan gaude.



6.2. A – Zuzen baten eta plano baten arteko angelua

Espazioan, zuzen baten eta plano baten arteko posizio erlatiboak hurrengoak dira: zuzena planoan dago, zuzena eta planoa paraleloak dira edo zuzenak planoa puntu batean ebakitzen du. Posizio hauen arabera ondorengoa dugu:

- Zuzenak eta planoak elkar ebakitzen badute: Bien arteko angelua, zuzenak eta bere proiekzio ortogonalak (emandako planoaren eta zuzena barnean duen eta planoarekiko elkarzuta den plano baten arteko ebakidura) osatzen duten angelua da.
- Zuzena planoan badago edo zuzena eta planoa elkarrekiko paraleloak badira: osatzen duten angelua 0º da.

r zuzenak eta π planoak sortzen duten ϑ angelua, r zuzenak eta π planoarekiko elkarzuta den s zuzen batek sortzen duten angeluaren osagarria da.

r eta s zuzenek osatzen duten angelua, r zuzenaren norabide bektoreak eta π planoaren bektore normalak sortzen duten angeluarekin bat dator, angelu hau zorrotza bada. Kamutsa bada berriz, bere betegarriarekin bat etorriko da.

Ondorioz, $\vec{u}=\left(u_1,u_2,u_3\right)$ norabide bektore duen r zuzena eta $\vec{a}$ bektore normala duen $\pi\colon Ax+By+Cz+D=0$ planoa emanda, bien arteko angelua hurrengo formula aplikatuz kalkula daiteke:

$$\theta = ang(r,\pi) = \arcsin\frac{|\vec{u}\cdot\vec{a}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{a}|} = \arcsin\frac{|Au_1+Bu_2+Cu_3|}{\sqrt{u_1^2++u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Kontutan izan $\cos(90-\vartheta)=sen\vartheta$ dela.

r zuzena eta π planoa elkarrekiko elkarzutak dira $sen\theta=0$ bada $\Rightarrow \vec{u}$ eta $\vec{a}$ linealki menpekoak badira $\Rightarrow \dfrac{A}{u_1}=\dfrac{B}{u_2}=\dfrac{C}{u_3}$

►***39 Adibidea (A)***

Kalkula ezazu $r\colon\begin{cases}2x+5z=24\\ y=z\end{cases}$ zuzenak, plano horizontalarekin $(z=0)$ eta plano bertikalarekin $(y=0)$ sortzen dituen angeluak.

Emaitza: A=(12,0,0) eta B=(2,4,4), r zuzeneko edozein puntu aukeratu eta $\vec{u}=(5,-2,-2)$ norabide bektorea kalkulatzen dugu. $\vec{a}=(0,0,1)$, $y=0$ eta $\vec{b}=(0,1,0)$, $z=0$ planoen bektore normalak direla dakigu.

- Plano horizontalarekin sortzen duen angelua:

$$\theta = arcsin\,\frac{|\vec{u}.\vec{a}|}{|\vec{u}|.|\vec{a}|} = arcsin\frac{|(5,-2,-2).(0,0,1)|}{\sqrt{25+4+4}\,.\sqrt{1}} = arsin\frac{|-2|}{\sqrt{33}} = arcsin\,0{,}3481$$

$$\boxed{\theta = 20{,}37°}$$

- Plano bertikalarekin sortzen duen angelua:

$$\theta = arcsin\frac{|\vec{u}.\vec{a}|}{|\vec{u}|.|\vec{a}|} = arcsin\frac{|(5,-2,-2).(0,0,1)|}{\sqrt{25+4+4}.\sqrt{1}} = arcsin\ 0{,}3481 \rightarrow \boxed{\theta = 20{,}37°}$$

6.2. Ikasgai bietako adibideak

►*40 Adibidea (A)*

Kalkula ezazu (7,2,2) eta (2,4,4) puntuek mugatzen duten zuzenaren eta (5,1,4), (1,3,2) eta (7,4,1) puntuek definitzen duten planoaren arteko angelua.

Emaitza: (7,2,2) eta (2,4,4) puntuetatik igarotzen den zuzenaren norabide bektorea $\vec{u} = (5,-2,-2)$ da. (5,1,4), (1,3,2) eta (7,4,1) puntuek definitzen duten planoaren ekuazioa berriz, $y + z = 5$ denez, bere bektore normala $\vec{b} = (0,1,1)$ da.

Ondorioz, bien arteko angelua:

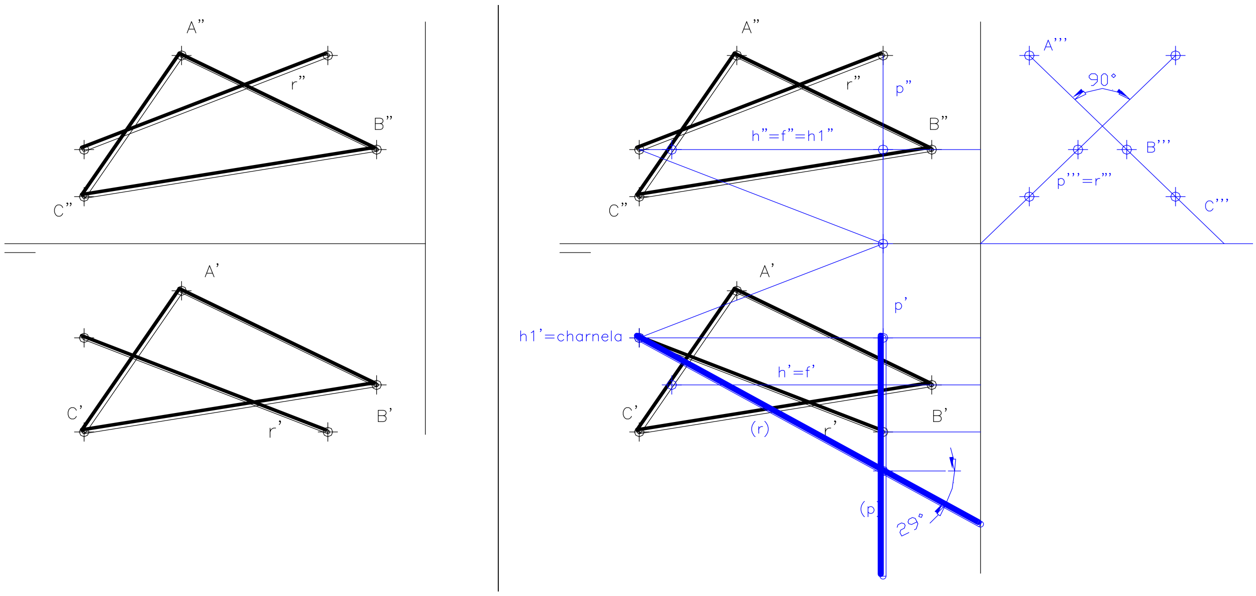
$$\theta = arcsin\frac{|\vec{u}.\vec{b}|}{|\vec{u}|.|\vec{b}|} = arcsin\frac{|(5,-2,-2).(0,1,1)|}{\sqrt{25+4+4}.\sqrt{1+1}} = arcsin\frac{|-2-2|}{\sqrt{33}.\sqrt{2}} = arcsin\frac{|-4|}{\sqrt{66}}$$

$$= arcsin\ 0{,}4924 \rightarrow \boxed{\theta = 29{,}49°}$$

►*40 Adibidea (M)*

ABC puntuek definitzen duten planoaren eta r zuzenaren arteko angelua lortu.

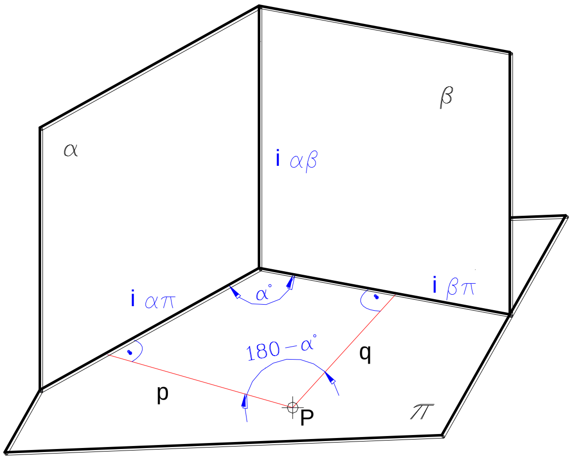
Emaitza: Soluzio lortzeko, r zuzeneko edozein puntutik planoarekiko elkarzuta den p zuzena eraikitzen da. Bi zuzen hauek, plano bat definitzen dute. Aurreko adibidean bezala, planoa eraitsi (egiazko magnitudera eraman) eta eraitsitako bi zuzenen arteko angelua neurtzen da.



6.3. M - Bi planoren arteko angelua

Definizioz, bi planoen arteko angelua, bi planoekiko elkarzuta den hirugarren plano baten eta emandako bi planoen arteko ebakidura-zuzenek osatzen duten angelua da. Plano hau definitzeko, nahikoa da, puntu batetik plano bakoitzarekiko elkarzutak diren bi zuzen eraikitzea.

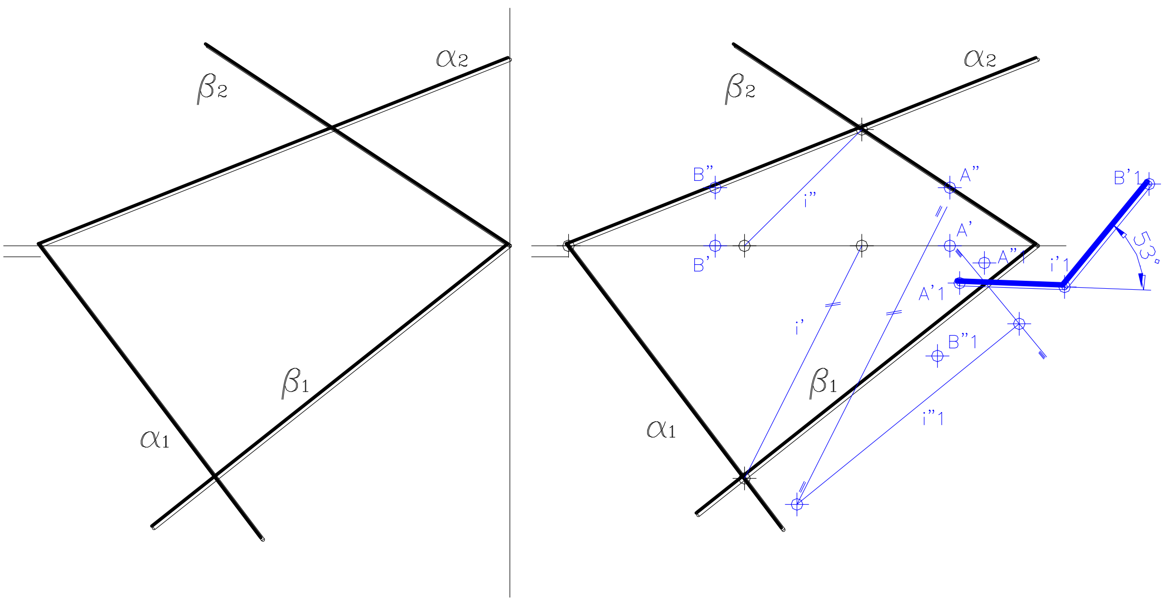
Irudian ikus dezakegunez, bi zuzen hauen arteko angelua, ebakidura-zuzenen betegarria da. Beraz, esandakoa kontutan hartuz, bi planoen arteko angelua kalkulatzea, bi zuzenen arteko angelua kalkulatzera laburtu daiteke (4.1.D)



►41 Adibidea (M)

α eta β planoek sortzen duten angelua lortu.

Emaitza: Kasu honetan ariketa ebazteko, α-k eta β-k definitzen duten planoa, proiekzio plano batekiko paralelo jarri da. Hau egitea edo, (i), bi planoen arteko ebakidura-zuzena lortzea eta plano aldaketen bidez proiekzio plano batekiko, (PH1)-rekiko, elkarzuta jartzea gauza bera da. Proiekzio honetan, bi zuzenen arteko angelua zuzenean neur daiteke.



6.3. A – Bi planoren arteko angelua

Espazioan, bi planoren arteko posizio erlatiboak hurrengoak dira: bat datoz, elkarrekiko paraleloak dira edo elkar ebakitzen dute. Posizio hauen arabera ondorengoa dugu:

- Elkar ebakitzen duten bi plano: Bi planoek elkar ebakitzen badute, binaka berdinak diren lau angelu osatzen dituzte. Angelu hauetako angelu txikienari bi planoen arteko angelua deritzo.
- Plano paraleloak edo bat datozen planoak: osatzen duten angelua 0º da.

Bi planoen bektore normalek osatzen duten angelua, angelu zorrotza bada, bi planoen arteko angelua, euren bektore normalek osatzen duten angeluarekin bat dator. Bektore normalen arteko angelua kamutsa bada berriz, bi planoen arteko angelua bere angelu betegarria izango da.

Hortaz, $\vec{a}_1$ bektore normala duen $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ planoa eta $\vec{a}_2$ bektore normala duen $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ planoa emanda, bi planoen arteko angelua hurrengo formula aplikatuz kalkula daiteke:

$$\theta = ang(\pi_1,\pi_2) = \arccos\frac{|\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|} = \arccos\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2++B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2++B_2^2+C_2^2}}$$

Lortzen dugun angelua kamutsa bada, bere angelu betegarria erabiliko dugu:

$$\cos(180-\vartheta) = -\cos\vartheta$$

π_1 eta π_2 planoak elkarrekiko elkarzutak dira $\cos\theta = 0$ bada $\Rightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2$ bada

$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ eta $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ planoak emanda, π_1 eta π_2 planoekiko distantzia berdinera dauden puntuen multzoa $\left(d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)\right)$ hurrengoa da:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2++B_1^2+C_1^2}} = \frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2++B_2^2+C_2^2}}$$

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2++B_1^2+C_1^2}} = -\frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2++B_2^2+C_2^2}}$$

Plano hauei π_1 eta π_2 planoen plano erdikariak deritze.

►***42 Adibidea (A)***

Kalkula ezazu $\pi: 4x-5y-6z=0$ planoak eta $y=0$ plano bertikalak osatzen duten angelua.

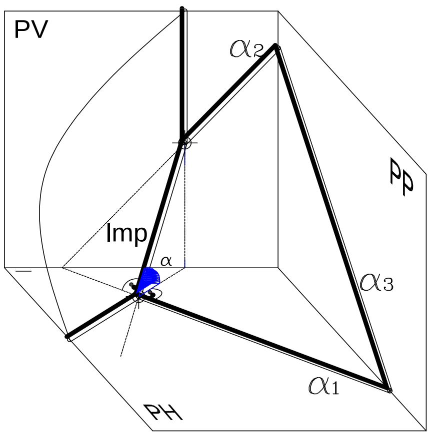
Emaitza: π planoaren $\vec{a} = (4, -5, -6)$ bektore normala eta plano bertikalaren $\vec{b} = (0,1,0)$ bektore normala hartuz:

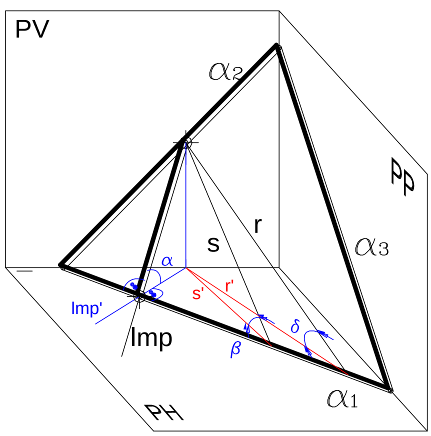
$$\theta = arcos\ \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|b|} = arcos \frac{|(4,-5,-6).(0,1,0)|}{\sqrt{16+25+36}.\sqrt{1}} = arcos \frac{|-5|}{\sqrt{77}} = arcos\ 0{,}5698$$

$$\rightarrow \boxed{\theta = 55{,}26°}$$

6.4. M – Proiekzio planoekiko angeluak

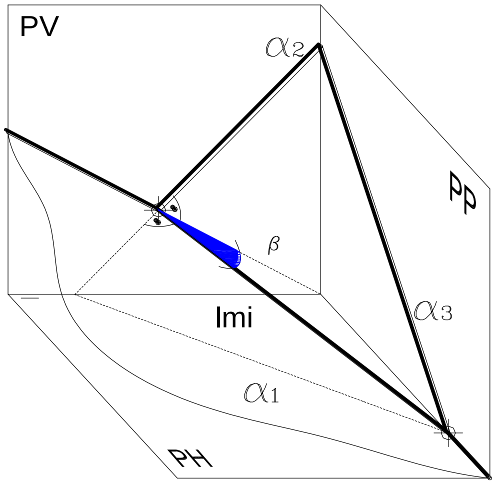
PH planoaren eta plano baten arteko angelua, bien arteko (**α_1**) ebakidurarekiko elkarzuta den plano bat eraikiz lortzen da. Plano laguntzaileak **α** planoa **mhl** (malda handieneko lerroa) deritzon zuzen batean ebakitzen du. Zuzen hau planoaren barnean dauden zuzenetatik PH-arekiko angelu handiena osatzen duen zuzena izateaz gain, berak bakarrik definitzen du planoa. **α_1**-ekiko elkarzuta da. Begira ezazu irudia.

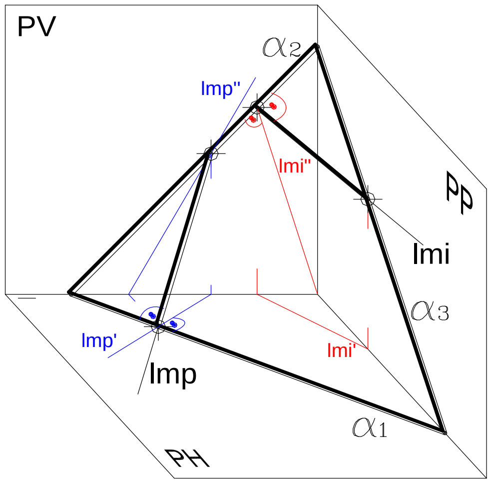




Planoko puntu batetik malda handieneko zuzena trazatzeko, bere PH-ko proiekzioa **α_1**–ekiko elkarzuta dela kontutan izan behar da.

Era berean, planoaren eta PB –ren arteko angelua eta **ihl** (inklinazio handieneko lerroa) defini daitezke. Kasu honetan, zuzen honen PB-ko proiekzioa **α_2** –rekiko elkarzuta da. Begiratu irudia.

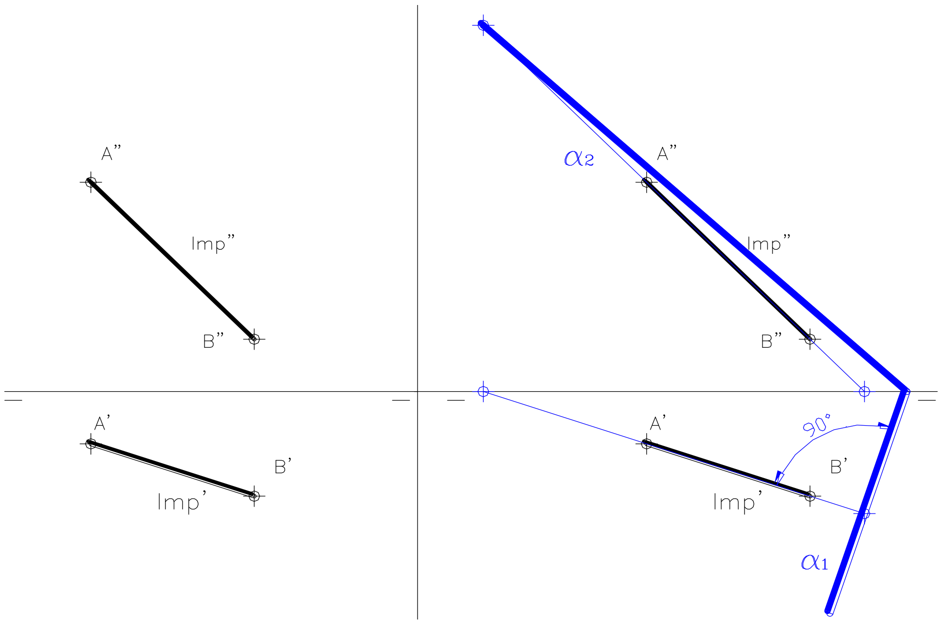




►43 Adibidea (M)

Defini ezazu α planoa, bere **mhl** ezaguturik.

Emaitza: **mhl** zuzena, malda handieneko lerroa denez, planoaren traza horizontala **mhl**-ren proiekzio horizontalalrekiko elkarzuta da. Adibidean, zuzenaren traza biak lortu ondoren traza horizontaletik α_1 irudikatu da.



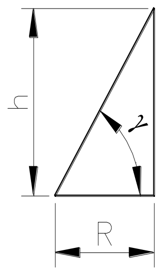
6.5. M – Alderantzizko problemak

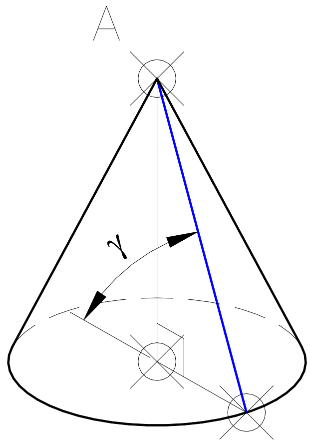
Batzuetan bi elementuen arteko angelua ezaguna izango da. Kasu hauetan ezaguna den angelua eta beste baldintza batzuk erabiliz, elementu horiek zehaztu beharko dira, era honetako problemei “alderantzizko problema”-k deritze.

Oinarrizko kontzeptuak

1) Puntu batetik igarotzen diren eta plano batekin angelu finko bat osatzen duten zuzenen leku geometrikoa, hurrengo ezaugarriak dituen konoa da:

- Ezagutzen den puntua konoaren erpina da (A puntua irudian)
- Konoa, kono zuzena da eta konoaren ardatza planoarekiko elkarzuta da.
- Konoaren oinarria zirkularra da, eta bere erradioa (R), konoaren altueraren, (h)-ren , eta ezagutzen den angeluaren, (γ)-ren, menpekoa da.

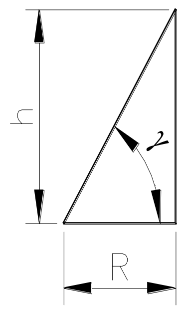


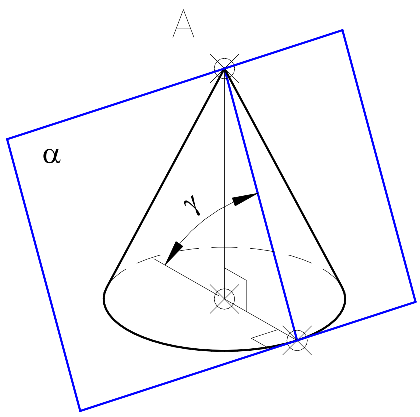


Konoaren zuzen sortzaile guztiak planteatutako problemaren soluzioak dira.

2) Puntu bat barnean duten eta beste plano batekin angelu finko bat osatzen duten planoek, hurrengo ezaugarriak dituen kono baten ukitzaileak dira:

- Ezagutzen den puntua konoaren erpina da (A puntua irudian)
- Konoa, kono zuzena da eta bere ardatza planoarekiko elkarzuta da.
- Konoaren oinarria zirkularra da, eta, (R), bere erradioa, (h), konoaren altueraren, eta (γ) angeluaren araberakoa izan behar da.

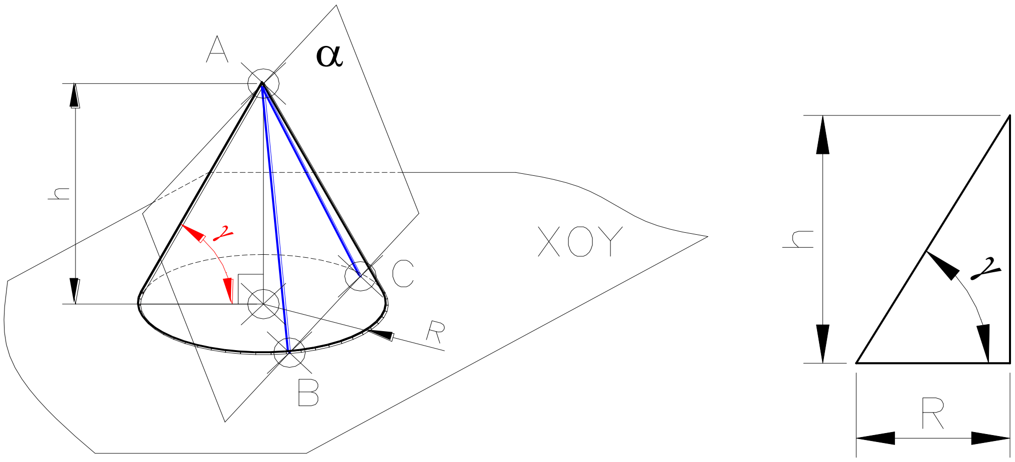




1 motako problema: Zehatz itzazu A puntutik igarotzen diren, α planoaren barnean dauden eta XOY planoarekin γ angelua sortzen duten zuzenak.

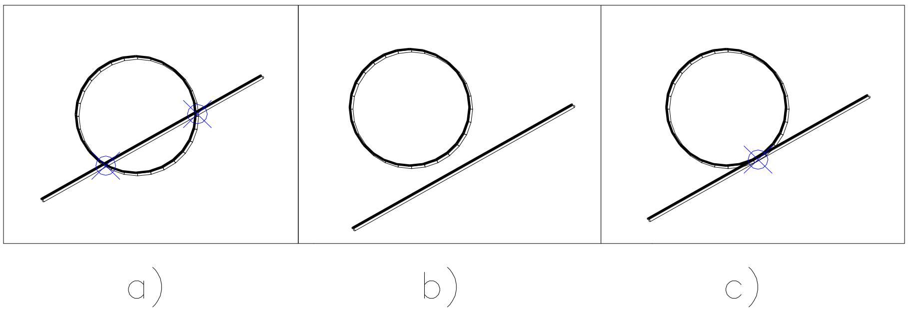
Jarraitu beharreko prozedura:

1. Konoaren dimentsioak (R, oinarriaren erradioa) lortu: konoaren erpina A puntua izango da, eta (h) konoaren altuera Z koordenatua.
2. Konoaren oinarria irudikatu: A' zentroa duen R erradioko zirkunferentzia.
3. α planoaren eta konoaren oinarriaren arteko ebakidura zehaztu: B eta C puntuak.
4. Kasu orokorreko, bi soluzioak AB eta AC zuzenak dira.



Kasu posibleak:

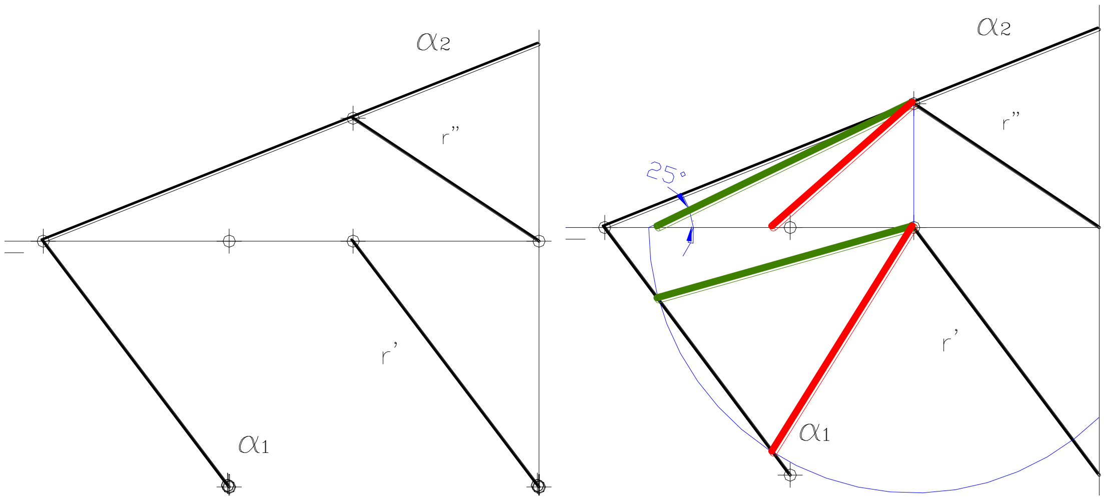
a) Eskatutako zuzenen malda planoaren malda baino txikiagoa bada, ebazpena diren bi zuzen egongo dira (planoak bi sortzaileren bidez ebakiko du konoa)
b) Eskatutako zuzenen malda planoaren malda baino handiagoa bada, ez da soluziorik existituko (planoak ez du konoa ebakiko)
c) Eskatutako zuzenen malda planoaren maldaren berdina bada, ebazpena zuzen bat izango da (planoa konoarekiko ukitzailea izango da).



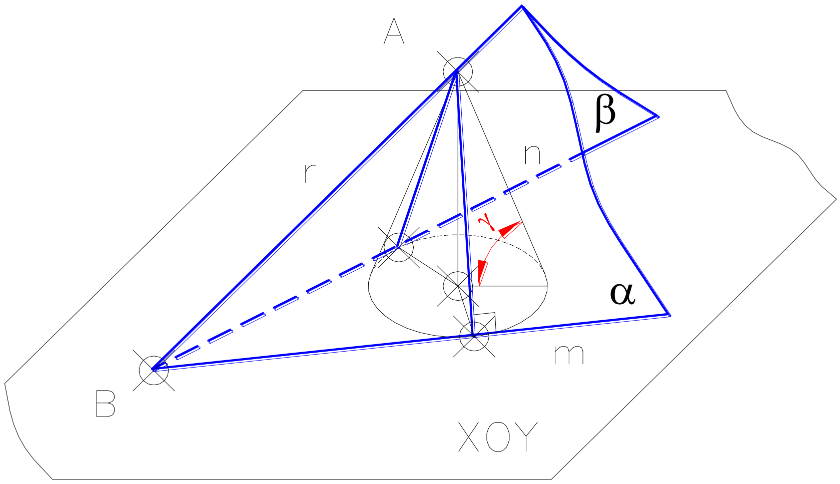
►44 Adibidea (M)

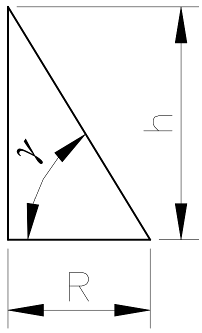
Defini eta irudika itzazu r zuzena ebakitzen duten, α planoaren barnean dauden eta PH-arekin, (XOY)-rekin, 25º-tako angelua sortzen duten zuzenak.

Emaitza: Bi zuzen dira.



2 motako problema: r zuzena barnean duten eta XOY planoarekin γ angelua sortzen duten plano guztiak zehaztu.





Jarraitu beharreko prozedura:

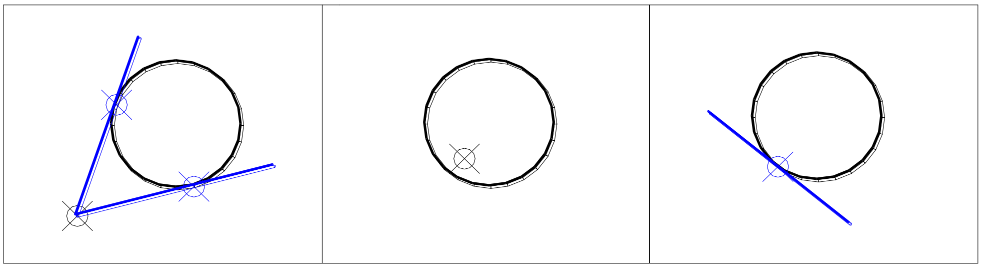
1. Konoaren dimentsioak (R, oinarriaren erradioa) lortu: konoaren erpina r zuzenean kokatutako edozein puntu izan daiteke, A puntua irudian, eta (h) konoaren altuera, puntu honen Z koordenatua izango da.
2. Konoaren oinarria irudikatu: A' zentroa duen R erradioko zirkunferentzia
3. r zuzenaren traza horizontala zehaztu: B puntua.
4. B puntutik konoaren oinarriarekiko zuzen ukitzaileak marraztu: m eta n zuzen horizontalak.
5. (Kasu orokorrean) hurrengo bi planoak dira soluzioak: α = r+m, eta β = r+n.

Kasu posibleak:

a) Eskatutako planoen malda, zuzenaren malda baino handiagoa bada, soluzioa diren bi plano egongo dira (bi planoak konoarekiko ukitzaileak izango dira).

b) Eskatutako planoen malda, zuzenaren malda baino txikiagoa bada, ez da soluziorik existituko (ez da konoarekiko ukitzailea den planorik egongo).

c) Eskatutako planoen malda, zuzenaren maldaren berdina bada, soluzio bakar bat egongo da (konoarekiko ukitzailea den plano bat existituko da).



a) b) c)

6.5. Ikasgai bietako adibideak

►*45 Adibidea (A)*

$r\colon\begin{cases} x - z = 3 \\ 3y + z = 9 \end{cases}$ zuzena barnean duen eta XOY planoarekin 45º angelua osatzen duen planoa kalkulatu.

Emaitza:

Plano sorta kontzeptua erabiliz, *r* zuzena barnean duen planoa hurrengoa dela dakigu:

$\pi_1\colon x - z - 3 + \alpha\,(3y + z - 9) = 0$, bere bektore normala $n_{\pi_1} = (1{,}3\alpha, \alpha - 1)$ da.

Bestalde, $\pi_2\colon z = 0$ planoaren bektore normala $n_{\pi_2} = (0{,}0{,}1)$ da. Bi planoen arteko angelua bere bektore normalen arteko angelua da →

$$\cos 45° = \frac{|(1{,}3\alpha, \alpha - 1)(0{,}0{,}1)|}{\sqrt{1^2 + (3\alpha)^2 + (\alpha - 1)^2}\ \sqrt{1}} = \frac{|\alpha - 1|}{\sqrt{10\alpha^2 - 2\alpha + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow$$

$$2(\alpha - 1)^2 = 10\alpha^2 - 2\alpha + 2 \rightarrow \ 4\alpha^2 + \alpha = 0 \ \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Balio hauek π_1 planoan ordezkatuz, ondorengo bi planoak lortu ditugu:

$\pi_{1a}\colon x - z - 3$ y $\pi_{1b}\colon 4x - 3y - 5z - 3 = 0$

►*45 Adibidea (M)*

Defini eta irudika itzazu r zuzena barnean duten eta PH-rekin 45º angelua osatzen duten planoak.

Emaitza: Ebazpena bi plano dira, α eta β.