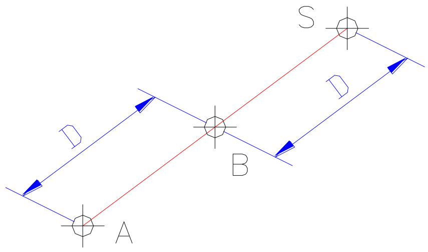
V GAIA: SIMETRIAK

Puntuaren hiru simetria kontsideratuko ditugu:

1. Puntu batekiko puntu simetrikoa
2. Zuzen batekiko puntu simetrikoa
3. Plano batekiko puntu simetrikoa

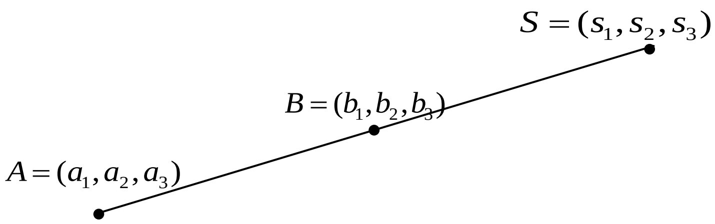
5.1. M – Puntu batekiko puntu simetrikoa

(A) puntuak (B) puntuarekiko duen (S) puntu simetrikoa, A eta B puntuak lotzen dituen zuzenaren luzapenean AB distantziara kokatuta dago.



5.1. A – Puntu batekiko puntu simetrikoa. Zuzenki baten erdiko puntua

Izan bitez $A=(a_1,a_2,a_3)$ eta $S=(s_1,s_2,s_3)$ puntuak. A eta S puntu hauek B puntuarekiko simetrikoak direla esaten da, B erdiko puntua duen AS zuzenkiaren muturrak badira.



B puntuaren koordenatuak $\left(\frac{a_1+s_1}{2},\frac{a_2+s_2}{2},\frac{a_3+s_3}{2}\right)$ dira.

5.1. Ikasgai bietako adibideak

►*36 Adibidea (A)*

$A=(4,3,3)$ puntuak $B=(0,1,6)$ puntuarekiko duen puntu simetrikoa lortu.

Emaitza: Lortu nahi dugun $S=(x,y,z)$ puntu simetrikoak hurrengoa betetzen du:

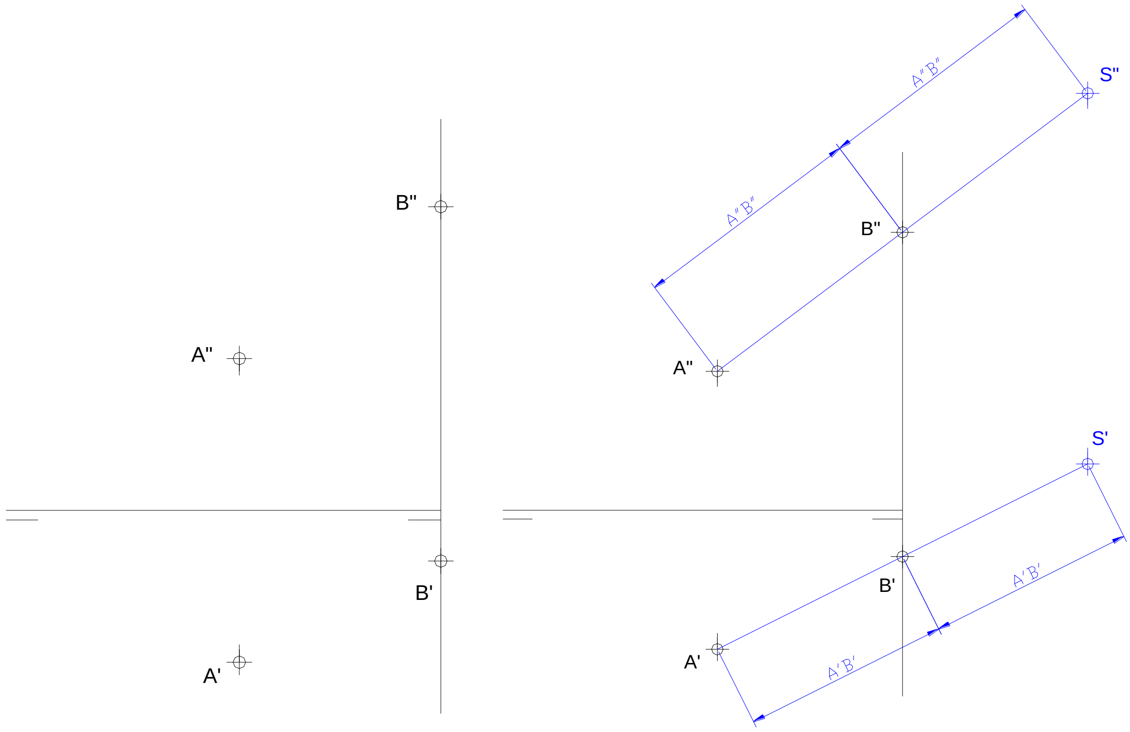
$$(0,1,6)=\left(\frac{4+x}{2},\frac{3+y}{2},\frac{3+z}{2}\right) \Rightarrow S=(-4,-1,9)$$

►36 Adibidea (M)

A puntuak B puntuarekiko duen puntu simetrikoa lortu.

Emaitza:

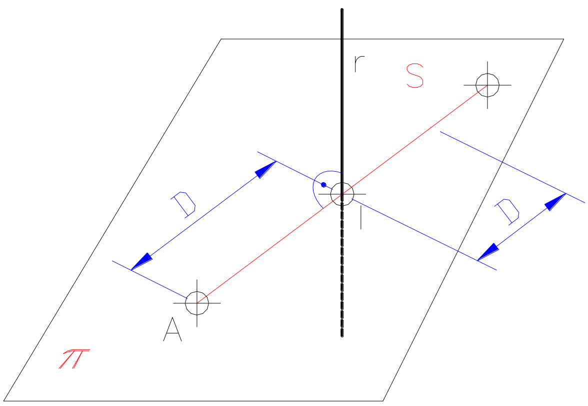
A eta B puntuak lotzen dira, eta zuzen horren luzapenera (B-tik aurrera) AB distantzia eramaten da, horrela A-ren simetrikoa lorturik: S puntua.



5.2. M – Zuzen batekiko puntu simetrikoa

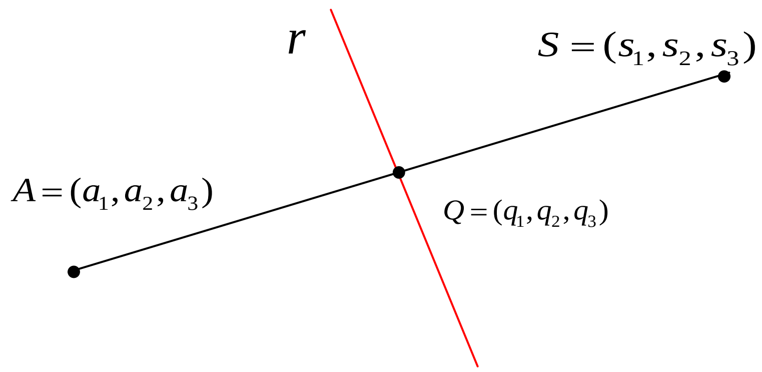
(A) puntuaren (r) zuzenarekiko (S) puntu simetrikoa, r zuzenarekiko elkarzuta eta ebakitzailea den zuzenean, beraien artean dagoen distantziara kokatuta dago, hau da, (AI) distantziara. Ondorioz, soluzioa (A) puntutik igarotzen den eta (r) zuzenarekiko elkarzuta den planoan egongo da. Jarraitu beharreko pausuak:

1. π , (r) -rekiko elkarzuta den eta (A) puntutik igarotzen den planoa lortu
2. (r) zuzenaren eta π planoaren arteko (I) ebaki-puntua lortu
3. (A) puntuak (I) puntuarekiko duen (S) puntu simetrikoa lortu



5.2. A – Zuzen batekiko puntu simetrikoa

Izan bitez $A=(a_1,a_2,a_3)$ eta $S=(s_1,s_2,s_3)$ puntuak, bi puntu hauek r zuzenarekiko simetrikoak direla esaten da, r erdibitzailea duen AS zuzenkiaren muturrak badira.



Q puntua, AS zuzenkiaren eta r zuzenaren arteko ebaki-puntua dena, A puntuak r zuzenean duen proiekzioa da. Are gehiago, A eta S puntuak Q puntuarekiko simetrikoak dira. A puntuak r zuzenarekiko duen puntu simetrikoa lortzeko jarraitu behar diren pausuak, hurrengoak dira:

1. A puntutik igarotzen den eta r zuzenarekiko elkarzuta den π planoa lortu.
2. r eta π-ren arteko Q ebaki-puntua lortu.
3. S puntua, Q puntuarekiko A puntuaren puntu simetrikoa zehaztu.

►37 Adibidea (A)

$A=(4,2,2)$ puntuak $r:\dfrac{x-6}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-5}{-3}$ zuzenarekiko duen puntu simetrikoa kalkulatu.

Emaitza: r-rekiko elkarzuta den eta A puntua barne duen planoa lortuko dugu. Horretarako, zuzenaren norabide bektorea planoaren bektore normal bezala hartuko dugu: $\alpha: 4x+2y-3z+D=0$

eta A puntutik pasarazten dugu, $4.4+2.2-3.2+D=0 \Rightarrow D=-14$

$\alpha: 4x+2y-3z-14=0$

r zuzenaren ekuazio inplizituak lortuz: $r:\begin{cases} x-2y=4 \\ 3y+2z=13 \end{cases}$

r eta α -ren arteko Q ebaki-puntua kalkulatuko dugu: $Q=\begin{cases} x-2y=4 \\ 3y+2z=13 \\ 4x+2y-3z=14 \end{cases} \Rightarrow$

$Q=\left(\frac{186}{29},\frac{25}{29},\frac{136}{29}\right)$.

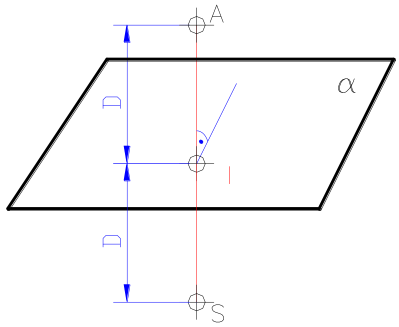
Orain, A puntuak Q puntuarekiko duen puntu simetrikoa kalkulatu behar dugu:

$$\left(\frac{186}{29},\frac{25}{29},\frac{136}{29}\right)=\left(\frac{4+x}{2},\frac{2+y}{2},\frac{2+z}{2}\right) \Rightarrow S=\left(\frac{256}{29},-\frac{8}{29},\frac{214}{29}\right)$$

5.3. M – Plano batekiko puntu simetrikoa

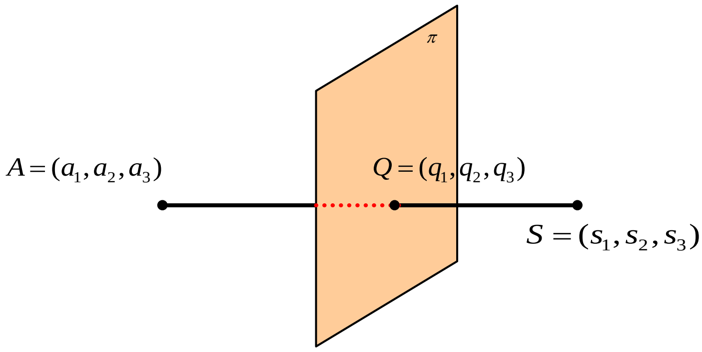
(A) puntuaren (α) planoarekiko (S) puntu simetrikoa, (A) puntutik igarotzen den eta planoarekiko elkarzuta den zuzenean, euren artean dagoen distantziara, hau da, (AI) distantziara, kokatuta dago. Simetrikoa lortzeko jarraitu behar diren pausuak:

1. (A) puntutik igarotzen den eta (α) planoarekiko elkarzuta den p zuzena zehaztu
2. (I), (α) eta p-ren arteko ebaki-puntua lortu
3. (I) puntuarekiko (A) puntuaren puntu simetrikoa den (S) puntua kalkulatu



5.3. A – Plano batekiko puntu simetrikoa

Izan bitez $A=(a_1,a_2,a_3)$ eta $S=(s_1,s_2,s_3)$ puntuak, bi puntu hauek π planoarekiko simetrikoak direla esaten da, π plano erdibitzailea duen AS zuzenkiaren muturrak badira.



Q puntua, AS zuzenkiaren eta π planoaren arteko ebakidura dena, A puntuak π planoan duen proiekzioa da, A eta S puntuak Q puntuarekiko simetrikoak izanik.

A puntuak π planoarekiko duen puntu simetrikoa lortzeko jarraitu behar diren pausuak:

1. A puntutik igarotzen den eta π planoarekiko elkarzuta den r zuzena lortu
2. Q, r eta π -ren arteko ebaki-puntua kalkulatu
3. S puntua, Q puntuarekiko A puntuaren puntu simetrikoa lortu

5.3. Ikasgai bietako adibideak

►***38 Adibidea (A)***

Izan bedi $A=(5,0,0)$ puntua, kalkula ezazu $\alpha: 4x-y-4z=8$ planoarekiko A puntuaren puntu simetrikoa.

Emaitza: α -rekiko elkarzuta den eta A puntutik igarotzen den zuzena kalkulatuko dugu, horretarako zuzenaren norabide bektore bezala planoaren bektore normala hartuz: $\vec{a}=(4,-1,-4)$

$$r: \frac{x-5}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-4} \Rightarrow \begin{cases} 5-x=4y \\ 4y=z \end{cases}$$

r eta α -ren arteko ebaki-puntua kalkulatuko dugu: $Q=\begin{cases} 5-x=4y \\ 4y=z \\ 4x-y-4z=8 \end{cases} \Rightarrow$

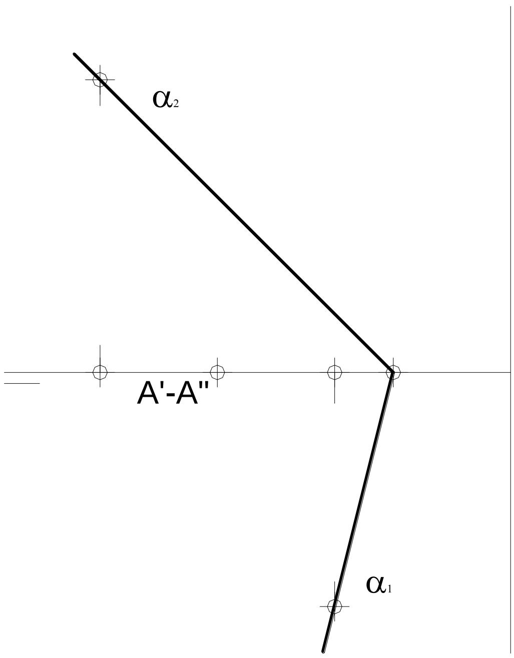
$$Q=\left(\frac{39}{11},\frac{4}{11},\frac{16}{11}\right).$$

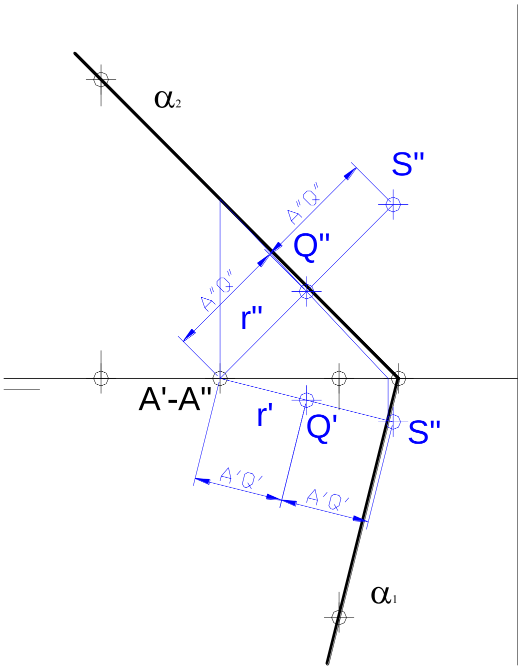
A puntuak Q puntuarekiko duen puntu simetriko lortu behar dugu:

$$\left(\frac{39}{11},\frac{4}{11},\frac{16}{11}\right)=\left(\frac{5+x}{2},\frac{0+y}{2},\frac{0+z}{2}\right) \Rightarrow S=\left(\frac{23}{11},\frac{8}{11},\frac{32}{11}\right)$$

►38 Adibidea (M)

A puntua emanda, zehatz ezazu α planoarekiko duen puntu simetrikoa.





Emaitza: A puntutik α planoarekiko elkarzuta den r zuzena marrazten da; r eta α-ren arteko ebakidura (plano laguntzaile bat erabiliz) kalkulatzen da; r zuzenera (Q puntutik aurrera) AQ distantzia eramaten da, eta A puntuarekiko simetrikoa den S puntua kalkulatzen da.