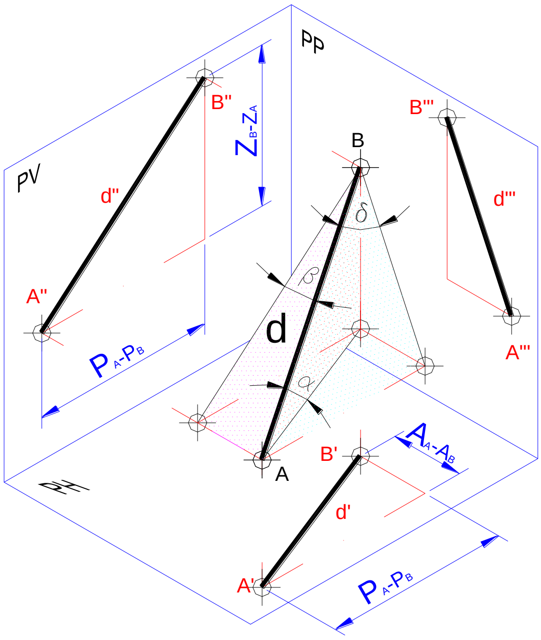
IV GAIA: DISTANTZIAK

4.1. M – Bi punturen arteko distantzia

Plano batekiko **AB** zuzenki baten proiekzio ortogonalen artean dauden erlazio metrikoak kontuan izanda, eta bere proiekzioak ezagutuz, bere benetako distantzia kalkula daiteke. Horretarako, PH-ren, PB-ren edo PP-ren gaineko proiekzioarekin osatzen diren triangelu batzuk eraiki behar dira (guztiak triangelu zuzenak izango direlarik).

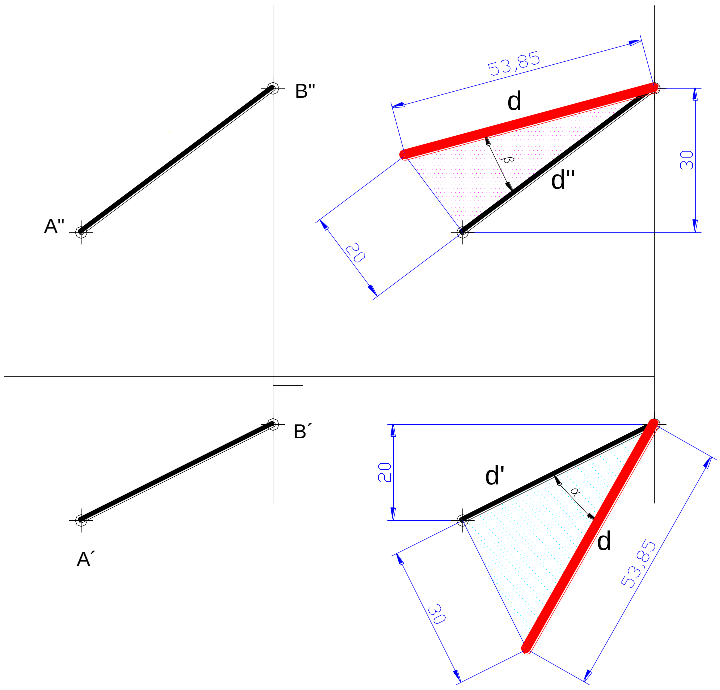


Triangelu hauek eraikitzean, zuzenkiak (kasu bakoitzean) PH, PB eta PP proiekzio planoekiko osatzen duen angelua lor daiteke. d´ erabiliz, PH-rekiko osatzen duen angelua, d" erabiliz PB-rekiko osatzen duena, eta d´´´ erabiliz PP-rekiko osatzen duena.

►26 Adibidea (M)

A(4,3,3) eta B(0,1,6) puntuen arteko distantzia kalkulatu.

Emaitza: Zuzenen proiekzioak erabiliz triangelu laguntzaileak eraikitzen dira. Triangelu bat eraikitzea nahikoa izango da distantzia kalkulatzeko. Adibide honetan bi eraiki dira, eta bi kasuetan emaitza bera lortzen dela egiaztatzen da.



4.1. A – Bi punturen arteko distantzia

Izan bitez A eta B espazioko bi puntu, bi puntu hauen arteko distantzia, $\overline{AB}$ zuzenkiaren luzera den, $\overrightarrow{AB}$ bektorearen moduluarekin bat dator. Bi punturen arteko distantzia, $d(A,B)$ edo $|\overrightarrow{AB}|$ izendatzen da.

$A=(x_1,y_1,z_1)$ eta $B=(x_2,y_2,z_2)$, A eta B puntuen koordenatuak badira, $\overrightarrow{AB}$ bektorearen koordenatuak ondorengoak dira:

$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

Beraz, distantziaren adierazpen analitikoa

$d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

da. Bi punturen arteko distantziak hurrengo propietateak ditu:

$d(A,B)=0$š $A=B$

$d(A,B)=D(B,A)$ (Simetria propietatea)

$d(A,C)\leq d(A,B)+d(B,C)$ (Desberdintza triangeluarra)

► ***27 Adibidea (A)***

$A(4,3,3)$ eta $B(4,3,6)$ puntuen arteko distantzia kalkulatu.

Emaitza: Distantzia $d(A,B)=\sqrt{(4-4)^2+(3-3)^2+(3-6)^2}=3$ da.

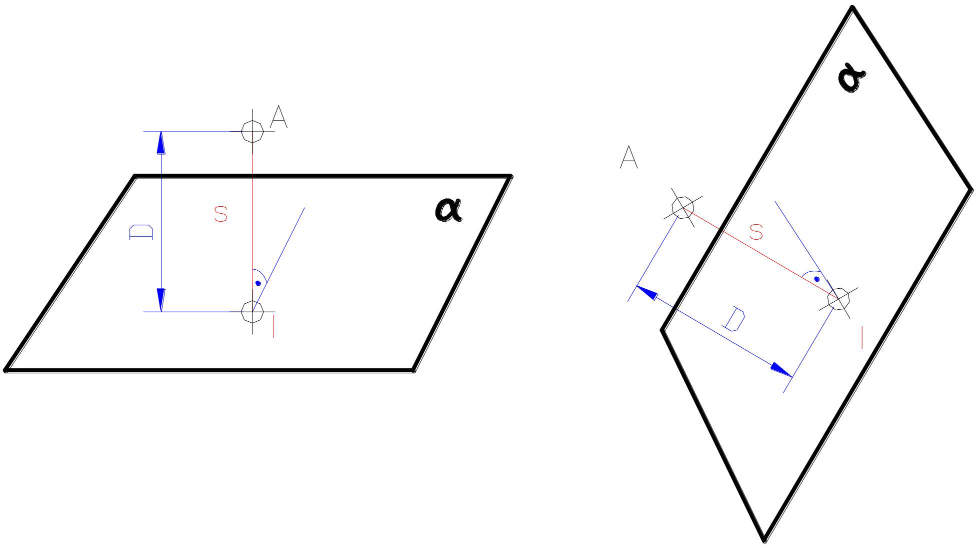
4.2. M – Puntu baten eta plano baten arteko distantzia

Puntu batetik plano batera dagoen distantzia, planoarekiko elkarzuta den eta puntutik igarotzen den zuzenean neurtzen da. Jarraitu beharreko pausuak honako hauek dira:

1.- **A** puntutik planoarekiko elkarzuta den **s** zuzena marraztu

2.- **s** zuzenaren eta planoaren arteko ebakidura lortu (**I** puntua)

3.- Bilatzen ari garen soluzioa, **AI** arteko benetako distantzia da.



4.2. A – Puntu baten eta plano baten arteko distantzia

P puntua α planoan badago, argi dago, puntuaren eta planoaren arteko distantzia nulua dela. Beraz, P puntua planotik kanpo dagoela suposatuko dugu. Kasu honetan, lortu nahi dugun distantzia, $\overline{PQ}$ zuzenkiaren luzera da, Q puntua P puntuak α planoan duen proiekzio ortogonala izanik.

Adierazpen bektoriala

Kontsidera ditzagun P puntua eta $\alpha(A_\alpha, \vec{n}_\alpha)$ -k mugatuko α planoa, A_α planoko edozein puntu eta $\vec{n}_\alpha$ planoaren bektore normala izanik. Izan bedi Q, P puntuak α planoan duen proiekzioa.

P puntuaren eta α planoaren arteko distantzia $\overrightarrow{QP}$ bektorearen modulua da, hau da, $d(P,\alpha) = |\overrightarrow{QP}|$

$A_\alpha QP$ triangelu zuzenean, $\overrightarrow{A_\alpha P} = \overrightarrow{A_\alpha Q} + \overrightarrow{QP}$ daukagu.

Aurreko berdintzako atal bien eta $\vec{n}_\alpha$ bektore normalaren arteko biderkadura eskalarra eginez: $\overrightarrow{A_\alpha P}\cdot\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{A_\alpha Q}\cdot\vec{n}_\alpha + \overrightarrow{QP}\cdot\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{QP}\cdot\vec{n}_\alpha$

$\overrightarrow{A_\alpha Q}$ eta $\vec{n}_\alpha$ ortogonalak direnez, euren arteko biderkadura eskalarra zero baita.

Azken espresioan balio absolutua aplikatuz:

$|\overrightarrow{A_\alpha P}\cdot\vec{n}_\alpha| = |\overrightarrow{QP}\cdot\vec{n}_\alpha| = |\overrightarrow{QP}|\cdot|\vec{n}_\alpha|$

Ondorioz, $\boxed{d(P,\alpha) = |\overrightarrow{QP}| = \dfrac{|\overrightarrow{A_\alpha P}\cdot\vec{n}_\alpha|}{|\vec{n}_\alpha|}}$ (1)

Adierazpen analitikoa

Izan bedi planoaren ekuazio inplizitua edo orokorra: $\alpha:\ Ax + By + Cz + D = 0$.

Izan bitez $A_\alpha(x_0, y_0, z_0)$ α planoan kokatuta dagoen puntu bat, $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$ planoaren bektore normala eta $P(x_1, y_1, z_1)$ emandako puntu bat.

Balio hauek (1) espresioan ordezkatuz:

$$d(P,\alpha) = \frac{|(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)\cdot(A,B,C)|}{|(A,B,C)|} = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1-Ax_0-By_0-Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Bestalde, $A(x_0,y_0,z_0)$ puntua planoan dagonez $-Ax_0-By_0-Cz_0 == D$, hurrengoa lortzen dugu: $\boxed{d(P,\alpha)=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$

Planoaren ekuazioa beste era batera zehaztua badago, planoaren ekuazio inplizitua lortu eta aurreko formula erabili behar da.
Plano baten eta puntu baten arteko distantzia kalkulatzeko, puntuaren koordenatuak planoaren ekuazio inplizituan ordezkatu eta planoaren bektore normalaren moduluaz zatitu behar dira. Emaitza negatiboa bada, balio absolutua hartuko dugu.

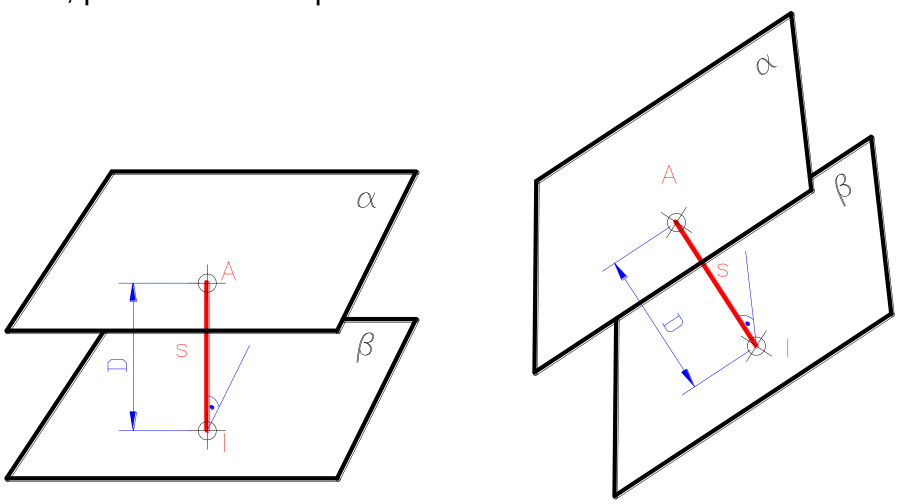
► ***28 Adibidea (A)***

$A(1,0,1)$ puntuaren eta $\alpha: 4x+y+4z=36$ planoaren arteko distantzia kalkulatu.

Emaitza: $d(A,\alpha)=\frac{|4\cdot1+0\cdot1+4\cdot1-36|}{\sqrt{4^2+1^2+4^2}}=\frac{28}{\sqrt{33}}$

4.3. M – Bi plano paraleloren arteko distantzia

Plano bateko (A) edozein puntu aukeratuta aurreko kasuan gaude eta bi planoen arteko distantzia, puntu baten eta planoaren arteko distantzia bezala kalkulatuko dugu.



4.3. A – Bi plano paraleloren arteko distantzia

α eta β elkarrekiko paraleloak diren bi planoren arteko distantzia, plano bateko edozein puntutik beste planora dagoen distantzia da.

$d(\alpha,\beta)=d(P_\alpha,\beta)=d(P_\beta,\alpha)$

Kalkuluak errazteko $(0,0,z),(0,y,0),(x,0,0)$ forma duen puntu bat aukera daiteke, honela, nahikoa da, kasu bakoitzean x, y edo z balioak lortzea.

► ***29 Adibidea (A)***

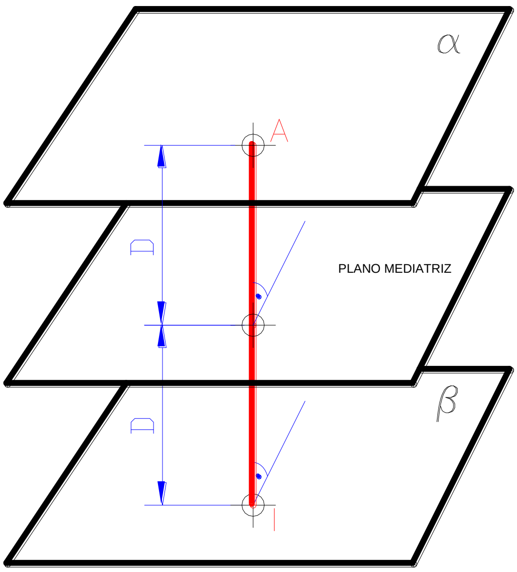
$\alpha: 4x+y+4z=36$ planoaren eta (2,0,0), (1,0,1) eta (1,4,0) puntuetatik pasatzen den β planoaren arteko distantzia kalkulatu.

Emaitza: β planoaren ekuazio inplizitua $\beta: 4x+y+4z=8$ da. Bestalde, bi planoen bektore normalak proportzionalak direnez, areago, berdinak direnez, planoak elkarrekiko paraleloak dira. Ariketa bukatzeko, α planoan dagoen edozein puntu, $P(9,0,0)\in\alpha$, aukeratu eta puntu horren eta β planoaren arteko distantzia kalkulatu behar da.

$$d(P,\alpha)=\frac{|9\cdot4+0\cdot1+0\cdot4-8|}{\sqrt{4^2+1^2+4^2}}=\frac{28}{\sqrt{33}}$$

4.4. M – Bi planoren plano erdibitzailea

Bi planoekiko paraleloa eta bi planoen arteko distantziaren erdiko puntutik igarotzen den planoa da izango da bi planoen erdibitzailea. Aurreko kasuetan bezala kalkulatuko da.



4.4. A – Bi planoren plano erdibitzailea

α eta β bi plano paralelo badira, bi planoen plano erdibitzailea, α eta β planoetatik distantzia berdinera dauden puntuen leku geometrikoa da.
Hurrengo bi planoak emanda

$\alpha: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\beta: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

planoak paraleloak izan behar direnez, planoen bektore normalak proportzionalak izan behar dira:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \delta \in R$, hau da, $rg\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$

Bi planoren plano erdibitzailea lortzea, bi planoekiko paraleloa den eta plano biekiko distantzia berdinera dagoen planoa kalkulatzea da. Hortaz, bere ekuazio inplizituak $\gamma : A_1x + B_1y + C_1z + M_1 = 0$ forma izango du.

►30 Adibidea (A)

Hurrengo bi planoen plano erdibitzailea lortu $\begin{cases} \alpha : x - 2y + 3z - 14 = 0 \\ \beta : -x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$.

a) Plano batean kokatuta dagoen edozein puntu aukeratu ondoren, puntu horretatik pasatzen den eta bi planoekiko elkarzuta den *r* zuzena kalkulatu:

$P_\beta = (0,0,0) \in \beta$ aukeratuta, *r* zuzenaren ekuazio parametrikoak $\vec{n}_\alpha$ edo $\vec{n}_\beta$ bektore normalek eta aukeratutako puntuak mugatzen dute: $r : \begin{cases} x & = 0 + t \\ y & = 0 - 2t \\ z & = 0 + 3t \end{cases}$

b) *r* zuzenaren eta planoaren arteko P_α ebaki-puntua lortu:

Kasu honetan zuzenaren ekuazioa forma parametrikoan dagoenez, $x = t,\ y = -2t,\ z = 3t$ α planoaren ekuazioan ordezkatuz:

$(0+t) - 2(0-2t) + 3(0+3t) - 14 = 0$š $t = 1$, ondorioz, $P_\alpha = (1,-2,3) \in \alpha$ ebaki-puntua lortzen da.

c) $\overline{P_\alpha P_\beta}$ zuzenkiaren erdiko puntua, P_γ , lortu:

$$P_\gamma = \frac{P_\alpha + P_\beta}{2} = \frac{(1,-2,3) + (0,0,0)}{2} = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$$

d) P_γ puntua γ planoan egotea eskatu:

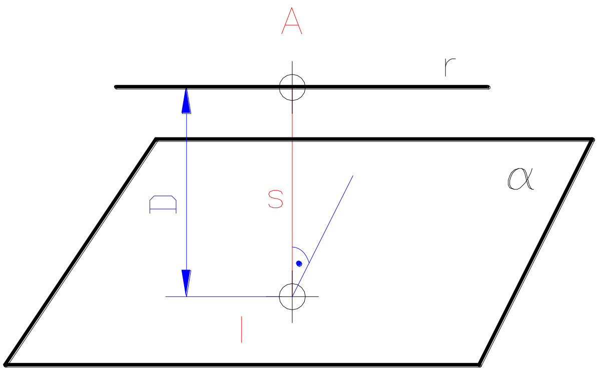
$P_\gamma \in \gamma : x - 2y + 3z + M_1 = 0 \rightarrow M_1 = -7$

Azkenik, α eta β planoen plano erdibitzailearen ekuazioa lortu:

$\gamma : x - 2y + 3z - 7 = 0$

<u>4.5. M – Zuzen eta plano paraleloen arteko distantzia</u>

Zuzenean dagoen (A) edozein puntu aukeratuz, puntu baten eta planoaren arteko distantzia bezala kalkulatu ahal izango dugu.



4.5. A - Zuzen eta plano paraleloen arteko distantzia

Izan bitez $r(A_r,\vec{u}_r)$-k zehaztutako r zuzena, eta $\alpha(A_\alpha,\vec{n}_\alpha)$-k zehaztutako α planoa. r eta α paraleloak direnez, $\vec{u}_r$, r zuzenaren norabide bektorea eta $\vec{n}_\alpha$, α planoaren bektore normala, elkarrekiko elkarzutak dira, beraz, euren biderkadura eskalarra nulua da: $\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\alpha = 0$.

Geometrikoki, r eta α-ren arteko distantzia, r zuzenean dagoen A_r ausazko puntu bat aukeratu eta puntu honen eta α planoaren arteko distantzia kalkulatzea besterik ez da: $d(r,\alpha)=d(A_r,\alpha)$.

Oharra: Honela kalkulatutako distantzia nulua bada, r zuzena α planoan kokatuta dagoela ondorioztatzen da.

► ***31 Adibidea (A)***

Kalkula ezazu $r:\begin{cases} x=3-3t \\ y=6-t \\ z=6t \end{cases}$ zuzenaren eta berarekiko paraleloa den $\alpha: 6x+12y+5z-66=0$ planoaren arteko distantzia.

Emaitza: Lehenik eta behin, r zuzena eta α planoak elkarrekiko paraleloak direla egiaztatuko dugu:

$$\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\alpha = (-3,-1,6)\cdot(6,12,5) = 0.$$

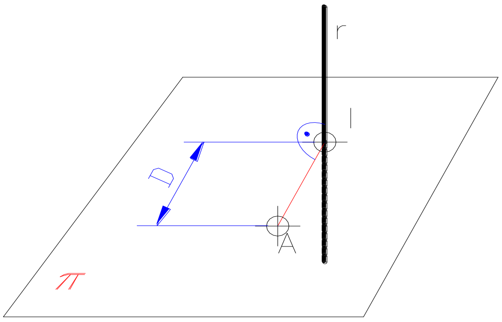
Zuzen eta plano paraleloen arteko distantzia, zuzenean kokatuta dagoen puntu baten eta planoaren arteko distantziara murrizten da:

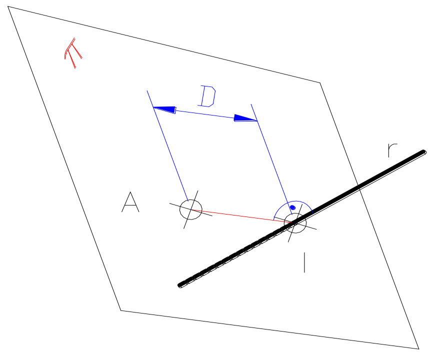
$$d((3,6,6),\alpha) = \frac{|6\cdot 3+12\cdot 6+5\cdot 0-66|}{\sqrt{6^2+12^2+5^2}} = \frac{24}{\sqrt{205}}$$

4.6. M – Puntu baten eta zuzen baten arteko distantzia

Puntu baten eta zuzen baten arteko distantzia, zuzenarekiko elkarzuta den zuzen batean, hortaz, zuzenarekiko elkarzuta den plano batean neurtzen da.
Jarraitu behar den prozesua:

1.- **A** puntutik **r**-ekiko elkarzuta den π plano bat trazatu
2.- **r** zuzenaren eta planoaren arteko ebaki-puntua kalkulatu (**I** puntua)
3.- Bilatzen ari garen soluzioa, **AI** puntuen arteko benetako distantzia da.





4.6. A – Puntu baten eta zuzen baten arteko distantzia

P puntua zuzen batean kokatuta badago, nabaria da, puntutik zuzenera dagoen distantzia nulua dela. Ondorioz, P puntua zuzenetik kanpo dagoela suposatuko dugu. Kasu honetan, P puntuaren eta zuzenaren arteko distantzia $\overline{PQ}$ zuzenkiaren luzera da, Q puntua P puntuak zuzenean duen proiekzio ortogonala izanik.

Adierazpen bektoriala

Kontsidera dezagun $r(A_r,\vec{u}_r)$-k zehazten duen r zuzena, A_r zuzenean kokatuta dagoen edozein puntu eta $\vec{u}_r$ zuzenaren norabide bektorea izanik.

P puntutik r zuzenera dagoen distantzia $\overrightarrow{QP}$ bektorearen modulua da. Hau da, $d(P,r)=|\overrightarrow{QP}|$.

A_rQP triangelu zuzenetik $\overrightarrow{A_rP}=\overrightarrow{A_rQ}+\overrightarrow{QP}$ daukagu.

Aurreko berdintzako atal bien eta $\vec{u}_r$ norabide bektorearen arteko biderkadura bektoriala eginez: $\overrightarrow{A_rP}\times\vec{u}_r=\overrightarrow{A_rQ}\times\vec{u}_r+\overrightarrow{QP}\times\vec{u}_r=\overrightarrow{QP}\times\vec{u}_r$

$\overrightarrow{A_rQ}$ eta $\vec{u}_r$ paraleloak direnez euren arteko biderkadura bektoriala zero baita.

Azken espresioan modulua aplikatuz hurrengoa daukagu: $|\overrightarrow{A_rP}\times\vec{u}_r|=|\overrightarrow{QP}\times\vec{u}_r|=|\overrightarrow{QP}|\cdot|\vec{u}_r|$

Ondorioz, $d(P,r)=|\overrightarrow{QP}|=\dfrac{|\overrightarrow{A_rP}\times\vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}$ (2)

Beraz, $\vec{u}_r$ eta $\overrightarrow{A_rP}$ bektoreen gainean eraikitako paralelogramoaren azalera oinarriaz zatitzean ($|\vec{u}_r|$ modulua duena), puntuaren eta zuzenaren arteko distantzia lortzen da.

Adierazpen analitikoa

r zuzenaren ekuazio jarraitua $r:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ bada, orduan,

$A_r(x_0,y_0,z_0)$ zuzenean dagoen puntu bat da eta $\vec{u}_r=(a,b,c)$ zuzenaren norabide bektorea. Izan bedi $P(x_1,y_1,z_1)$ r zuzenetik kanpo dagoen puntua. Balio hauek (2) ekuazioan ordezkatuz:

$$d(P,r)=\frac{|(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)\times(a,b,c)|}{|(a,b,c)|}$$

Zuzena beste era batera zehaztua badago, zuzeneko puntu bat eta zuzenaren norabide bektorea kalkulatu eta aurreko formula aplikatu behar da.

► *32 Adibidea (A)*

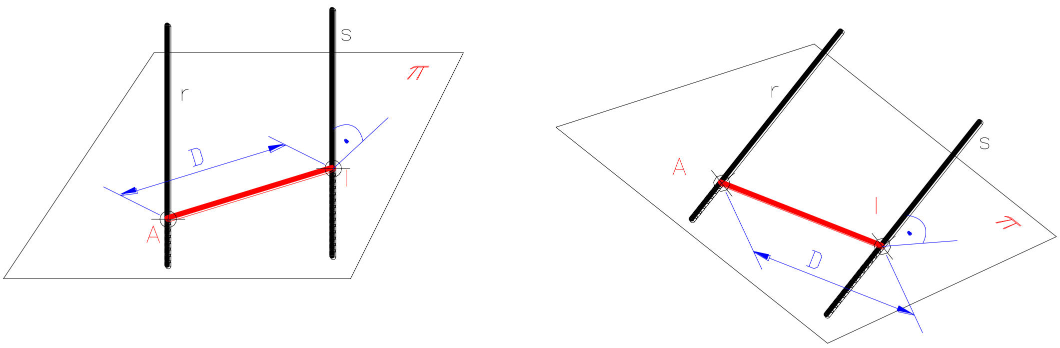
$A(7,1,5)$ puntuaren eta $r:\frac{x-1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{-3}$ zuzenaren arteko distantzia kalkulatu.

Emaitza: *r* zuzeneko edozein puntu, adibidez P(1,0,5), definitu ondoren, puntuaren eta zuzenaren arteko distantziaren formula aplikatu behar da $\vec{u}_r=(4,2,-3)$, $\overrightarrow{AP}\times\vec{u}_r=(3,-18,-8)$ eta $|\vec{u}_r|=\sqrt{29}$ izanik:

$$d(A,r)=\frac{|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}=\frac{\sqrt{397}}{\sqrt{29}}$$

4.7. M –Bi zuzen paraleloren arteko distantzia

Zuzen batetako edozein puntu aukeratzean, bi zuzen paraleloen arteko distantzia aurreko kasura murrizten da (puntu batetik zuzen baterako distantzia).



4.7. A – Bi zuzen paraleloren arteko distantzia

Elkarrekiko paraleloak diren bi zuzenen arteko distantzia, zuzen bateko edozein puntutatik beste zuzenera dagoen distantzia da: $d(r,s)=d(P_r,s)=d(P_s,r)$.

P_r edo P_s puntuak aukeratu ondoren, puntu baten eta zuzen baten arteko distantzia kalkulatu behar da.

► *33 Adibidea (A)*

Hurrengo zuzenen arteko distantzia kalkulatu $r:\frac{x-1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{-3}$ eta $s:\begin{cases}x=7+4t\\y=1+2t\\z=5-3t\end{cases}$.

Emaitzak: Bistan denez, zuzen biak elkarrekiko paraleloak dira, euren norabide bektoreak paraleloak baitira. $A(7,1,5) \in s$ puntua aukeratuz, aurreko adibidean gaude, puntuaren eta zuzenaren arteko distantzia kalkulatu dugun adibidean, hain zuzen ere.

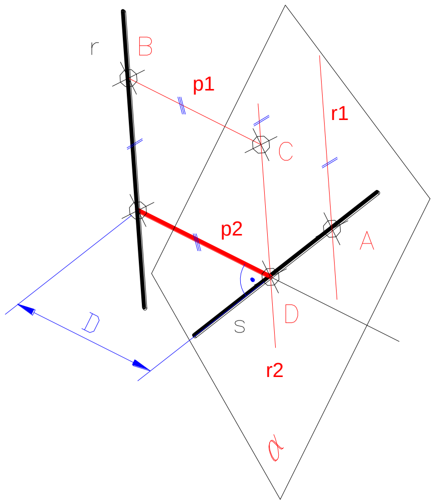
Ondorioz, $d(r,s) = d(r,A) = \sqrt{\frac{397}{29}}$

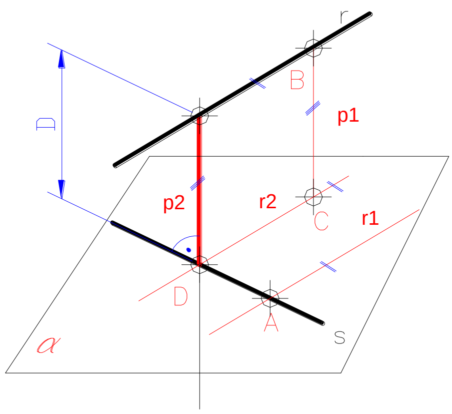
4.8. M – Elkar gurutzatzen duten bi zuzenen arteko distantzia

Elkar gurutzatzen duten bi zuzenen arteko distantzia bi zuzenekiko elkarzuta den zuzen batean neurtzen da. Distantzia bakarrik kalkulatu nahi badugu, ariketa sinplifikatu egiten da. Bi zuzenen arteko ebakidura-zuzenkia kalkulatu nahi badugu, aldiz, prozesua luzeagoa da.

Jarraitu beharreko prozesua:

1.-Zuzen bateko **A** puntu bat aukeratu eta puntu honetatik igarotzen den eta beste zuzenarekiko paraleloa den **r1** zuzena eraiki. Bi zuzen hauek α planoa definitzen dute.
2.-Beste zuzeneko **B** edozein puntu aukeratu eta puntu honetatik pasatzen den eta α planoarekiko elkarzuta den **p1** zuzena marraztu.
3.-Planoaren eta **p1** zuzenaren arteko ebakidura lortu (**C** puntua)
4.-Bilatzen ari garen soluzioa, **BC** arteko benetako distantzia da.
Zuzenki hau zuzenetan bermatzea nahi bada, prozesuak jarraitu egiten du:
5.- **C** puntutik **r**–rekiko paraleloa den **r2** zuzena marraztu
6.- Zuzen hau eta **s** zuzena plano berean daudenez eta paraleloak ez direnez, **D** puntu batean elkar ebakiko dute.
7.- **D** puntutik **p1** zuzenarekiko paraleloa den zuzen bat eraiki, zuzen hau eta **r** zuzena plano berean daudenez, elkar ebakiko dute (**p2** zuzena)
8.-Bilatzen ari garen soluzioa **DI** da





4.8. A – Elkar gurutzatzen duten bi zuzenen arteko distantzia

r eta s elkar gurutzatzen duten bi zuzenen arteko distantzia, r zuzenetik igarotzen den eta s zuzenarekiko paraleloa den eta s zuzenetik igarotzen den eta r zuzenarekiko paraleloa den planoen arteko distantzia da.

Adierazpen bektoriala

Izan bitez *r* eta *s*, $r(A_r,\vec{u}_r)$-k eta $s(A_s,\vec{u}_s)$-k zehaztutako zuzenak, hurrenez hurren.

r eta *s* zuzenen arteko distantzia, A_s puntuaren eta $\alpha(A_r,\vec{u}_r,\vec{u}_s)$ planoaren arteko distantzia da: $d(r,s)=d(A_s,\alpha)$

P puntutik α planora dagoen distantziaren adierazpen bektoriala hurrengoa da:

$$d(P,\alpha)=\frac{|\overrightarrow{A_\alpha P}\cdot\vec{n}_\alpha|}{|\vec{n}_\alpha|}$$

Gure kasuan, $A_\alpha=A_r$, $P=A_s$ eta $\vec{n}_\alpha=\vec{u}_r\times\overrightarrow{u_s}$ kontsideratuz, ondorengoa dugu:

$$d(r,s)=d(A_s,\alpha)=)=\frac{|\overrightarrow{A_rA_s}\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}$$

Biderkadura mistoaren edo biderkadura nahasiaren definizioa gogoratuz, azkenik berdintza hau lortu dugu:

$$\boxed{d(r,s)=\frac{|det(\overrightarrow{A_rA_s},\vec{u}_r,\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}} \quad (3)$$

Adierazpen analitikoa:

Zuzenen ekuazio jarraituak ezagutuz:

$$r:\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \qquad s:\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

(3) formulan erabili beharreko bektoreak:

$\vec{u}_r=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{u}_s=(a_2,b_2,c_2)$, $\overrightarrow{A_rA_s}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ dira.

Balio hauekin lortzen den formula oso konplexua denez, praktikan (3) formula zenbakizko balioekin erabiltzen da.

Zuzena era jarraituan barik beste era batean zehaztua badago, zuzen bakoitzeko puntu bat eta zuzen bakoitzaren norabide bektoreak kalkulatu eta (3) formula aplikatu behar da.

Oharra: Kasu batzuetan, errazagoa da bi zuzenen arteko distantziaren definizioa garatzea. Nahikoa da, *r* zuzena barne duen, $A_r(x_1,y_1,z_1)$ -tik igarotzen den eta *s* –rekiko paraleloa den α planoa eta A_s puntu bat kalkulatzea.

Ondoren, A_s puntuaren eta α planoaren arteko distantziaren formula erabili behar da. Aipatutako α planoaren ekuazioa determinante bat garatuz lortzen da:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

►***34 Adibidea (A)***

$r:\frac{x-13}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z-5}{-3}$ eta $s:\begin{cases} x=3+5t \\ y=2+t \\ z=4t \end{cases}$ zuzenen arteko distantzia kalkulatu.

Emaitza: Adibide honetan elkar gurutzatzen duten bi zuzenen artean dagoen distantziaren formula analitikoa aplikatutako dugu.

r zuzena $B(13,0,5)$ puntuaz eta $\vec{u}_r=(4,5,-3)$ bektoreaz zehaztua dago, s zuzena berriz, $A(3,2,0)$ puntuaz eta $\vec{u}_s=(5,1,4)$ bektoreaz. Hortaz, bi zuzenen arteko distantzia ondorengoa izango da:

$$d(r,s)=\frac{|\,det(\overrightarrow{AB},\vec{u}_r,\vec{u}_s)\,|}{|\,\vec{u}_r\times\vec{u}_s\,|}=\frac{187}{\sqrt{1931}}$$, $\overrightarrow{AB}=B-A=(10,-2,5)$ izanik.

$$det(\overrightarrow{AB},\vec{u}_r,\vec{u}_s)=\begin{vmatrix}10 & -2 & 5\\ 4 & 5 & -3\\ 5 & 1 & 4\end{vmatrix}=187$$ eta $|\,\vec{u}_r\times\vec{u}_s\,|=|\,(23,-31,-21)\,|=\sqrt{1931}$

Bi zuzenen elkarzut komuna

Elkar gurutzatzen duten bi zuzen ortogonalki ebakitzen dituen zuzenari, bi zuzenen elkarzut komuna deritzo.
r eta s elkar gurutzatzen duten bi zuzenen p elkarzut komuna, $\alpha(A_r,\vec{u}_r,\vec{u}_r\times\vec{u}_s)$ eta $\beta(A_s,\vec{u}_s,\vec{u}_r\times\vec{u}_s)$ planoen arteko ebakidurak zehazten du.
Ondorioz, elkarzut komunaren adierazpen analitikoa

$$p:\begin{cases}det(\overrightarrow{A_rX},\vec{u}_r,\vec{u}_r\times\vec{u}_s) & =0\\ det(\overrightarrow{A_sX},\vec{u}_s,\vec{u}_r\times\vec{u}_s) & =0\end{cases}$$ da, X zuzen elkarzut honen puntu bat izanik.

Elkar gurutzatzen duten bi zuzenen arteko distantzia, elkarzut komunaren eta bi zuzenen ebaki-puntuen arteko distantzia da.

Elkarzut komuna lortzeko beste metodo bat dago, puntu orokorren metodoa hain zuzen ere:
Izan bitez P_r eta P_s elkarzut komunak *r* eta *s* zuzenak zeharkatzean sortzen dituen ebaki-puntuak hurrenez hurren. P_r puntuaren koordenatu orokorrak *r* zuzenaren ekuazio parametrikoak izango dira, hau da: $P_r(x_1+a_1t,y_1+b_1t,z_1+c_1t)$.
Era berean, P_s, s zuzenean dagoen puntuaren koordenatu orokorrak $P_s(x_2+a_2s,y_2+b_2s,z_2+c_2s)$ izango dira.

$\overrightarrow{P_rP_s}$ bektorea, $\vec{u}_r$ eta $\vec{u}_s$ bektoreekiko elkarzuta denez: $\begin{cases}\overrightarrow{P_rP_s}\cdot\vec{u}_r & =0\\ \overrightarrow{P_rP_s}\cdot\vec{u}_s & =0\end{cases}$

Eragiketak burutuz, *t* eta *s* parametroak ezezagun bezala dituen bi ekuaziotako sistema bat dugu.
Sistema ebatzi ondoren, *t* eta *s* parametroen balioak P_r eta P_s puntuen koordenatuetan ordezkatu behar dira, hurrenez hurren.
P_r eta P_s puntuak ezagututa, p elkarzut komunaren ekuazioa lor daiteke, bere norabide bektorea $\overrightarrow{P_rP_s}$ izanik. Azkenik, *r* eta *s* zuzenen arteko distantzia $|\,\overrightarrow{P_rP_s}\,|$ da.

► ***35 Adibidea (A)***

$r: x=y=z$ y $s: x=y=3z-1$ zuzenen elkarzut komunaren ekuazioa lortu.

Emaitza: Zuzenen ekuazioetatik hurrengoa dugu:

$A_r(0,0,0), \vec{u}_r = (1,1,1), A_s(-1,-1,0), \vec{u}_s = (3,3,1) \to \vec{u}_r \times \vec{u}_s = (-2,2,0)$

p elkarzut komuna planoen arteko ebakidurak mugatzen du:

$$det(\overrightarrow{A_r X}, \vec{u}_r, \vec{u}_r \times \vec{u}_s) = 0 \to \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow x + y - 2z = 0$$

$$det(\overrightarrow{A_s X}, \vec{u}_s, \vec{u}_r \times \vec{u}_s) = 0 \to \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow x + y - 6z + 2 = 0$$

Ondorioz, elkarzut komunaren ekuazioa $p: \begin{cases} x + y - 2z & = 0 \\ x + y - 6z + 2 & = 0 \end{cases}$ da.

Puntu orokorren metodoa erabiliz hurrengoa dugu:

$P_r = (t,t,t),\ P_s = (3s-1, 3s-1, s) \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (3s - t - 1, 3s - t - 1, s - t)$

Bektore hau $\vec{u}_r$ eta $\vec{u}_s$ bektoreekiko elkarzuta denez:

$\overrightarrow{P_r P_s} \cdot \vec{u}_r = (3s - t - 1, 3s - t - 1, s - t) \cdot (1,1,1) = 0$

$\overrightarrow{P_r P_s} \cdot \vec{u}_s = (3s - t - 1, 3s - t - 1, s - t) \cdot (3,3,1) = 0$

Eragiketak eginez: $\begin{cases} 7s - 3t & = 2 \\ 19s - 7t & = 6 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} t & = \dfrac{1}{2} \\ s & = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

t eta s parametroen balio hauei dagozkien puntuak $P_r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P_s = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dira.

Begi-bistakoa denez, bi puntu hauek bat datoz. Hortaz, bi zuzenek elkar ebakitzen dute eta euren arteko distantzia zero da.

Elkarzut komuna $P_r = (1/2, 1/2, 1/2)$ puntutik igarotzen da eta $\vec{u}_r \times \vec{u}_s = (-2,2,0)$ norabide bektorea du, beraz, bere ekuazio inplizitua:

$$p: \frac{x - \frac{1}{2}}{-2} = \frac{y - \frac{1}{2}}{2} = \frac{z - \frac{1}{2}}{0} \qquad p: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\to\to$