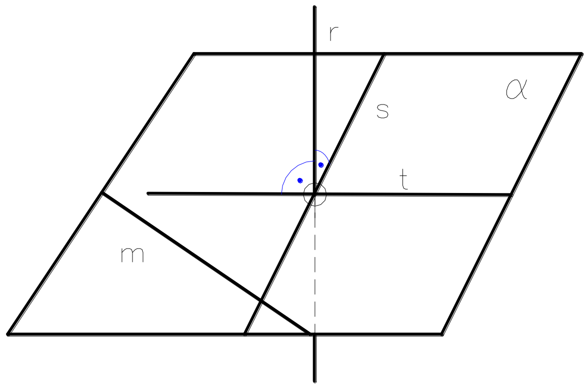
III GAIA: PERPENDIKULARTASUNA

3.1. M – Zuzen eta plano elkarzutak

Zuzen bat plano batekiko elkarzuta da, bere oinetik igarotzen diren eta paraleloak ez diren bi zuzenekiko elkarzuta denean.

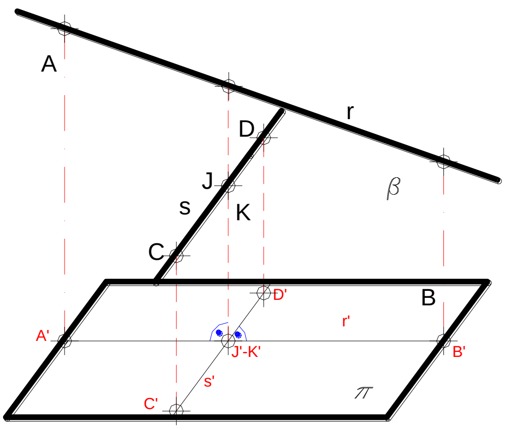


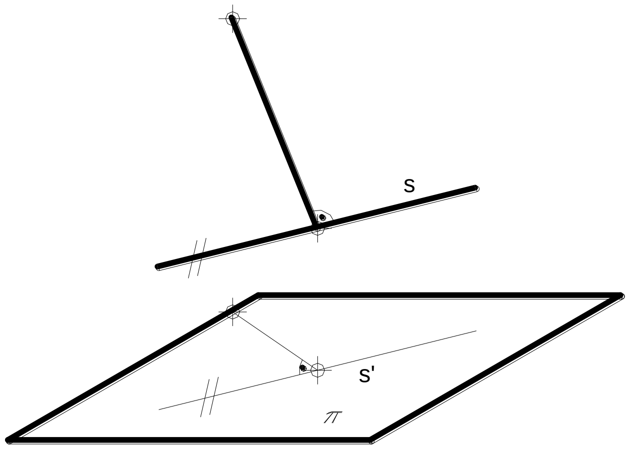
Aurreko enuntziatutik hurrengoa ondorioztatzen da: Zuzen bat plano batekiko elkarzuta izateko, nahikoa da planoan kokatuta dauden eta elkarrekiko paraleloak ez diren bi zuzenekiko edo planoarekiko paraleloak diren baina elkarrekiko paraleloak ez diren bi zuzenekiko elkarzuta izatea. Hortaz, zuzen bat plano batekiko elkarzuta bada, planoan kokatuta dauden zuzen guztiekiko elkarzuta izango da.

Bestalde, bi zuzen elkarrekiko paraleloak badira, zuzen batekiko elkarzuta den edozein plano beste zuzenarekiko ere elkarzuta izango da. Bi plano elkarrekiko paraleloak badira, plano batekiko elkarzuta den edozein zuzen, beste planoarekiko ere elkarzuta izango da. Beraz, zuzen batekiko elkarzutak diren bi plano elkarrekiko paraleloak dira, eta ondorioz, plano batekiko elkarzutak diren bi zuzen elkarrekiko paraleloak dira.

Zuzen bat plano batekiko elkarzuta bada, zuzen honekiko elkarzuta den edozein zuzen planoarekiko paraleloa da edo planoan kokatuta dago.

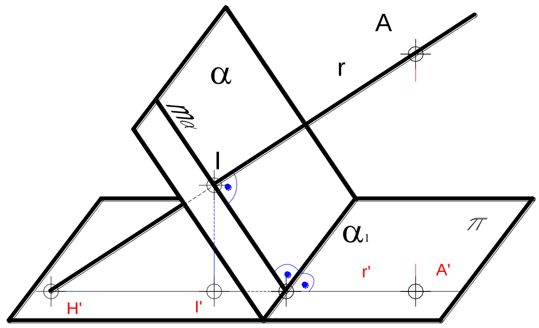
Hiru elkarzuten teorema proiekzioen elkarzutasuna aztertzeko teorema garrantzitsua da: *Bi zuzen espazioan elkarzutak badira, eta horietako bat plano proiektatzailearekiko paraleloa bada, plano horrekiko perpendikularki proiektatzen dira.*

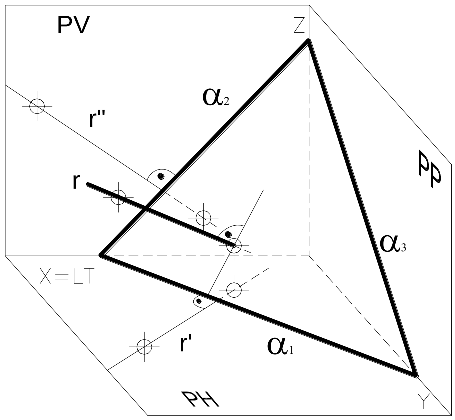




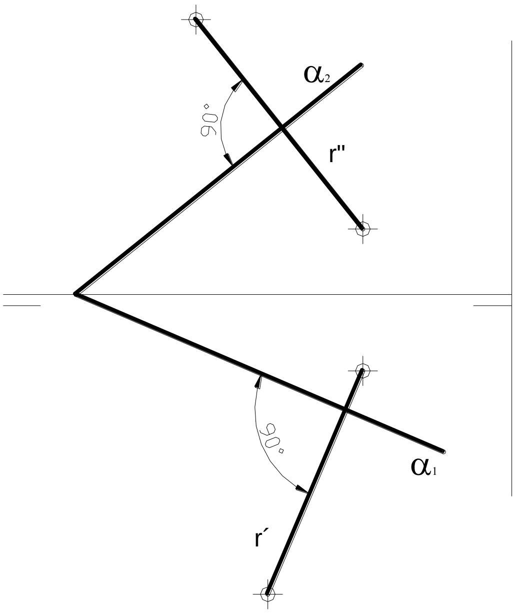
KOROLARIOA

"r" zuzena α planoarekiko elkarzuta bada, bere proiekzioak eta planoaren traza homonimoak elkarrekiko elkarzutak dira.





Lehen adierazi dugunaren arabera, zuzen bat plano batekiko elkarzuta bada, zuzenaren proiekzioak planoaren traza homonimoekiko elkarzutak dira: **r' α_1** –ekiko elkarzuta da eta **r" α_2**–rekiko elkarzuta da.



3.1. A – Zuzen eta plano elkarzutak

Izan bitez $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ norabide bektorea duen *r* zuzena eta $\vec{a} = (A, B, C)$ bektore normala duen $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ planoa. Zuzena eta planoa elkarrekiko elkarzutak dira zuzenaren norabide bektorea eta planoaren bektore normala paraleloak badira, hau da, bien arteko angelua $0°$ bada.

Beraz, *r* zuzena eta π planoa elkarrekiko elkarzutak dira, bien arteko angeluaren sinua 0 bada, hau da, $sen\theta = 0$, beste era batera esanda, $\vec{u}$ eta $\vec{a}$ linealki menpekoak badira $\Rightarrow \frac{A}{u_1} = \frac{B}{u_2} = \frac{C}{u_3}$

3.1. Ikasgai bietako adibideak

►17 Adibidea ***(A)***

Kalkula ezazu $P(7,3,4)$ puntutik igarotzen den eta (8,0,0), (3,0,2) eta (5,4,0) puntuak barne dituen planoarekiko elkarzuta den zuzena. Bien arteko ebaki-puntua lortu.

Emaitza: α planoaren ekuazio inplizitua hurrengoa da:

$$\alpha:\begin{vmatrix} x-8 & y & z \\ 3-8 & 0-0 & 2-0 \\ 5-8 & 4-0 & 0-0 \end{vmatrix}=0 \mapsto \ \alpha: 4x+3y+10z=32$$

$\vec{n}_\alpha=(4,3,10)=\vec{u}_p$ bektorea eta $P(7,3,4)$ puntua ezagunak direnean, p zuzenaren ekuazio lor daiteke:

$$p:\frac{x-7}{4}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-4}{10}$$

p eta α -ren arteko A ebaki-puntua kalkulatzeko:

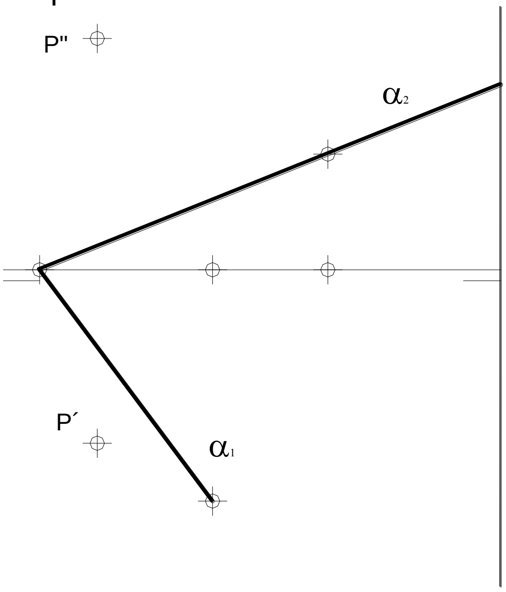
p zuzenean dauden $x=4t+7, y=3t+3, z=10t+4$ puntu guztien artean α planoaren ekuazioa betetzen duen bat dago:

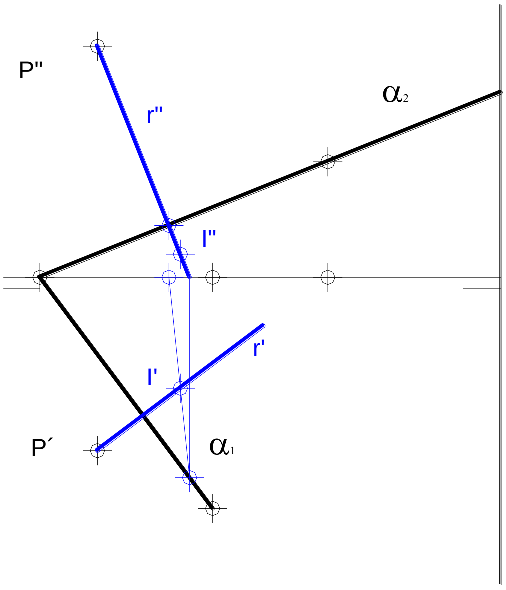
$4(4t+7)+3(3t+3)+10(10t+4)=32 \mapsto t=-9/25$ eta ondorioz: $A\left(\frac{139}{5},\frac{48}{5},\frac{2}{5}\right)$

►18 Adibidea (M)

Marraz ezazu P puntutik α planoarekiko elkarzuta den zuzen bat. Ebaki-puntua lortu.

Emaitza: r soluzioa den zuzenak, proiekzio bertikala α_2 –rekiko elkarzuta du eta proiekzio horizontala α_1–rekiko elkarzuta. Ebaki-puntua lortzeko, aurreko atalean azaldutako prozedurak erabiltzen dira.





►19 Adibidea (A)

$r\,((9,0,2),(7,4,5))$ zuzenarenekiko elkarzuta den eta $P(11,2,4)$ puntutik igarotzen den α plano bat lortu. Bien arteko ebaki-puntua kalkulatu.

Emaitza: Zuzenaren ekuazio jarraitua:

$$r: \frac{x-9}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{3}$$

Kalkulatu nahi dugun α planoak, $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{u_r} = (-2,4,3)$ bektorea, bektore normaltzat izango du eta $P = (11,2,4)$ puntutik pasatuko da.

$$\alpha: -2(x-11)+4(y-2)+3(z-4)=0 \mapsto -2x+4y+3z+2=0$$

r eta α planoen arteko A ebaki-puntua kalkulatzeko:

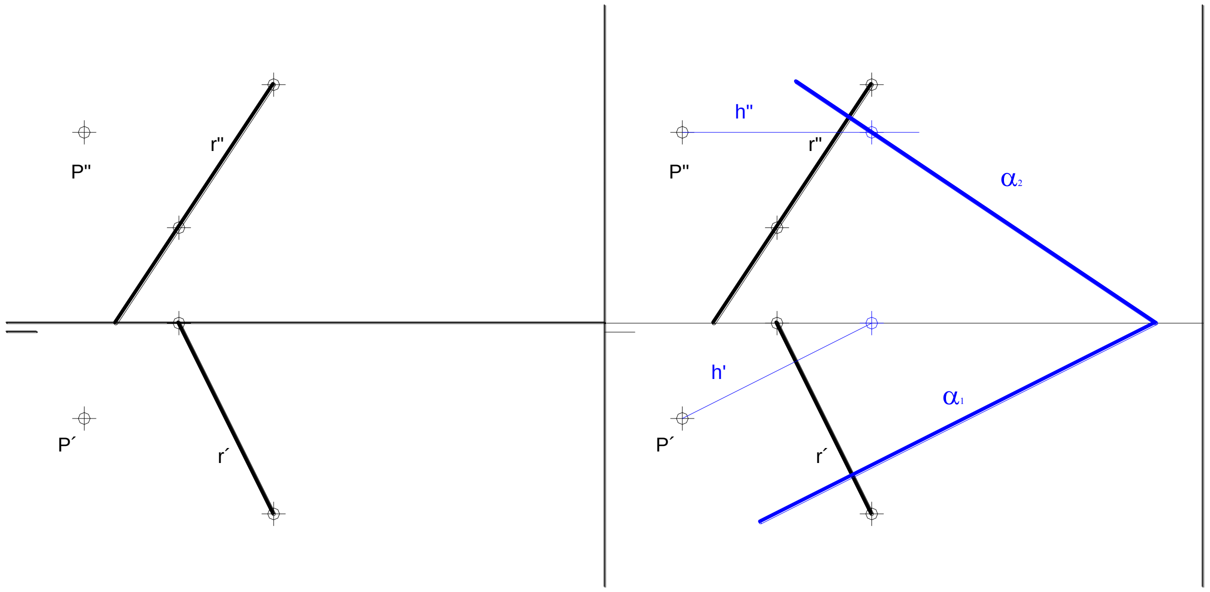
r zuzenean dauden $(x=-2t+9, y=4t, z=3t+2)$ puntu guztien artean α planoaren ekuazioa betetzen duen puntu bat dago, $t = 10/29$ balioari dagokiona, hain zuzen ere. Beraz, zuzenaren eta planoaren arteko ebaki-puntua hurrengoa da:

$$A\left(\frac{241}{29}, \frac{40}{29}, \frac{88}{29}\right)$$

► *20 Adibidea (M)*

Marraz ezazu **P** puntutik **r** zuzenarekiko elkarzuta den plano bat.

Emaitza: Emaitza den planoak $\boldsymbol{\alpha_1}$ **r'**–rekiko eta $\boldsymbol{\alpha_2}$ **r''**–rekiko elkarzutak ditu. Planoaren trazak lortzeko, traza horizontalarekiko eta traza bertikalarekiko paraleloak diren, **h** horizontala edo **f** frontala marrazten dira. Kasu honetan, soluzioa den planoaren horizontal bat marraztu dugu, eta zuzen hau abiapuntu bezala hartuta bere trazak lortu ditugu.



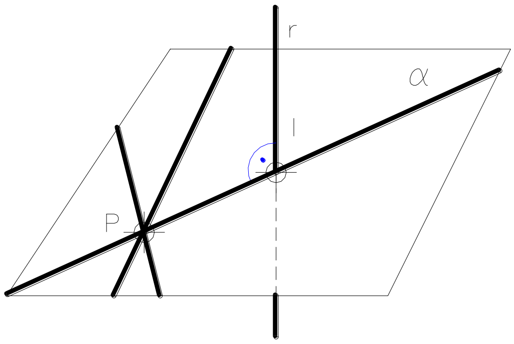
3.2. M – Zuzen elkarzutak

Zuzen batekiko elkarzutak diren zuzen guztiak, zuzenarekiko elkarzuta den plano batean kokatuta daude.

►*21 Adibidea (M)*

Marraz ezazu **P** puntutik **r** zuzenarekiko elkarzuta den eta **r** zuzena ebakitzen duen zuzena.

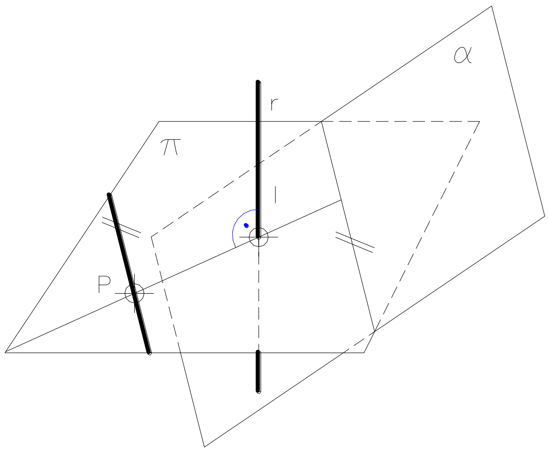
Emaitza: **P** punturik zuzenarekiko elkarzuta den plano bat trazatu behar da. Planoaren eta zuzenaren arteko ebaki-puntuak eta **P** puntuak soluzioa den zuzena definitzen dute.



►*22 Adibidea (M)*

Marraz ezazu **P** puntutik **r** zuzenarekiko elkarzuta den eta α planoarekiko paraleloa den zuzena.

Emaitza: **P** puntutik zuzenarekiko elkarzuta den plano bat marraztu behar da, eta bi planoen arteko ebakidura lortu. Bilatzen ari garen soluzioa, **P** puntutik igarotzen den eta bi planoen arteko ebakidura-zuzenarekiko paraleloa den zuzena da.



3.2. A – Zuzen elkarzutak

Izan bitez, *r* eta *s*, hurrenez hurren $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ eta $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ norabide bektoreak dituzten bi zuzen. Bi zuzen hauek elkarrekiko elkarzutak dira euren norabide bektoreak elkarzutak badira, hau da, euren arteko angelua $90°$ bada.

Ondorioz, *r* eta *s* zuzenak elkarrekiko elkarzutak dira, euren arteko angeluaren cosinua 0 bada, hau da, $\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$

►*23 Adibidea (A)*

Kalkula ezazu $P(12,3,6)$ puntutik igarotzen den, $r: \frac{x-6}{-6} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-4}{3}$ zuzenarekiko elkarzuta den eta *r* zuzena mozten duen zuzen bat. Euren arteko ebaki-puntua lortu.

Emaitza: P puntutik igarotzen den eta r zuzenaren norabide bektorea bektore normaltzat duen α planoa definitu:

$\alpha: -6(x-12)+3(y-3)+3(z-6)=0 \mapsto \alpha: -2x+y+z+15=0$

α planoaren eta r zuzenaren arteko ebakidura, Q, lortu:

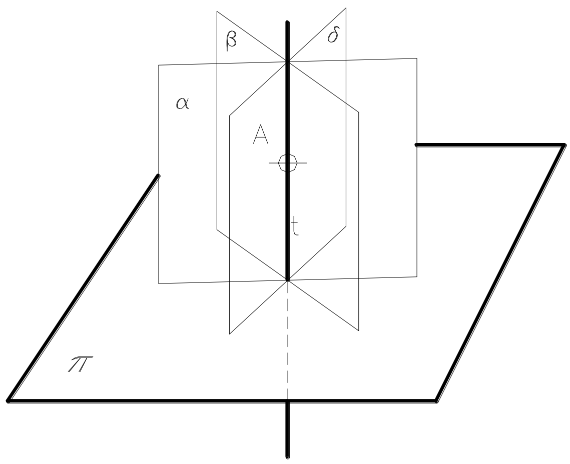
$-2(6-6t)+1(5+3t)+1(4+3t)+15=0 \ \rightarrow \ t=-2/3$, ondorioz, $Q=(10,3,2)$.

Lortu nahi dugun zuzen perpendikularra, P eta Q puntuetatik pasatzen den zuzena da:

$$p: \begin{cases} y = 3 \\ 2x - z = 18 \end{cases}$$

3.3. M – Plano elkarzutak

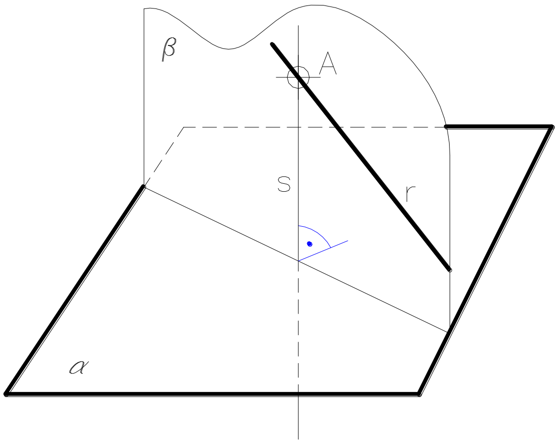
Plano bat beste plano batekiko elkarzuta bada, lehen planoarekiko elkarzuta den zuzen bat barnean izan behar du. Beraz, egin behar den lehen gauza, lehen plano horrekiko elkarzuta den edozein zuen aurkitzea izango da. Azkenik zuzen hori bere baitan duten infinitu planok (plano-sorta) izango da lehen planoarekiko bigarren plano elkarzuta.



► *24 Adibidea (M)*

Marraz ezazu **r** zuzena barne duen eta **α** planoarekiko elkarzuta den planoa.

Emaitza: **r** zuzeneko puntu batetik **s** planoarekiko elkarzuta den zuzen bat trazatu behar da, bi zuzen hauek soluzio den planoa definitzen dute.



3.3. A – Plano elkarzutak

Izan bitez $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $\vec{a_1}=(A_1,B_1,C_1)$ bektore normala eta $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ $\vec{a_2}=(A_2,B_2,C_2)$ bektore normala dituzten bi plano. Bi plano hauek elkarrekiko elkarzutak dira, euren bektore normalak elkarzutak badira. Hau da, euren arteko angelua 90° bada.

Ondorioz, planoak elkarrekiko elkarzutak dira euren arteko angeluaren kosinua zero bada, hau da, $\cos\theta=0 \Rightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

►25 Adibidea (A)

Traza itzazu $P(4,3,1)$ puntutik $\alpha: 5x+6y+4z=50$ planoarekiko elkarzutak diren eta $(6,5,4)$ eta $(0,8,7)$ puntuek mugatzen duten *r* zuzenarekiko paraleloak diren planoak.

Emaitza: α planoarekiko elkarzutak diren eta P(4,3,1) puntua barne duten β planoek, hurrengo forma dute: $\beta: A(x-4)+B(y-3)+C(z-1)=0$, planoen bektore normalen arteko biderkadura eskalarra nulua izanik:

$$(A,B,C)\cdot(5,6,4)=0 \mapsto A=\frac{-6B-4C}{5}$$

Beraz, β planoaren ekuazio orokorra hurrengoa da:

$$\beta: \frac{-6B-4C}{5}(x-4)+B(y-3)+C(z-1)=0, \forall\, B,C \in R$$

Bestalde, $\vec{v_r}=(-2,1,1)$ r zuzenaren norabide bektore bat da. Eskatzen diguten β planoa r zuzenarekiko paraleloa denez, $\vec{n_\beta}$ eta $\vec{v_r}$ elkarzutak izan behar dira, hau da, $\vec{n_\beta}.\vec{v_r}=0$. Hortaz, $B=\frac{-13C}{17}$ daukagu. Lortu ditugun B-ren eta A-ren adierazpenak, β planoaren ekuazioan ordezkatuz eta sinplifikatuz, bilatzen ari garen β planoa lortuko dugu:

$$\beta: 2x-13y+17z+14=0$$