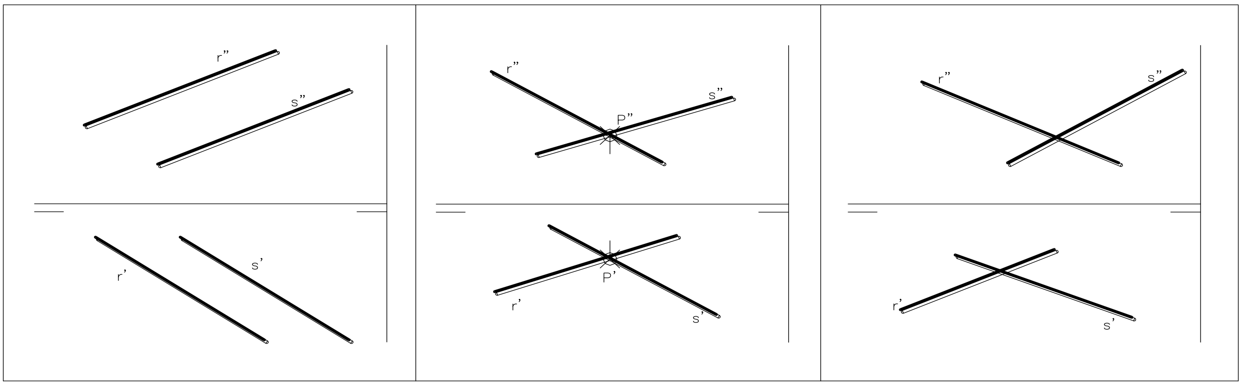
II. GAIA: ELEMENTUEN ARTEKO POSIZIO ERLATIBOAK

2.1.M – Bi zuzenen arteko posizio erlatiboa

Bi zuzenek espazioan hurrengo posizio erlatiboak izan ditzakete:

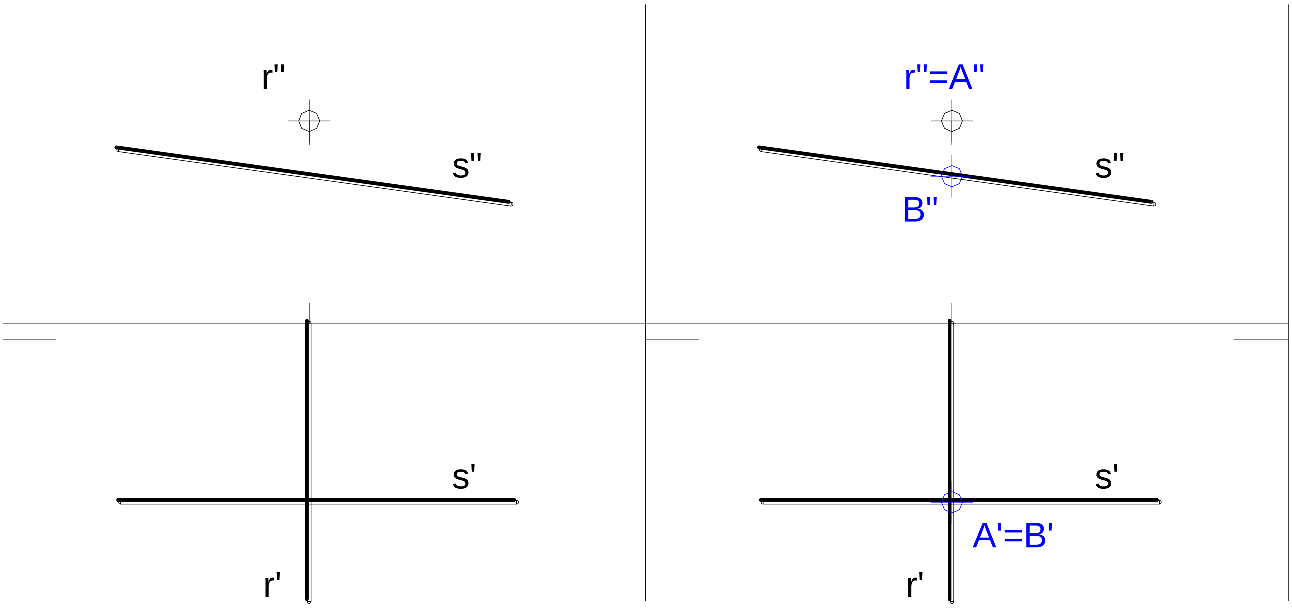
a) Paraleloak (beraien proiekzio homonimoak paraleloak direnean)
b) Ebakitzaileak (puntu komun bat dutenean)
c) Elkar gurutzatzen dute.



a) b) c)

► *4 Adibidea (M)*

eta s zuzenak emanik, beraien posizio erlatiboa zein den zehaztu eta arrazoitu.
Emaitza: Zuzenak espazioan elkar gurutzatzen dira, beraien proiekzio bertikalek ez baitute puntu komunik.



2.1.A – Bi zuzenen posizio erlatiboa

Oinarrizko geometriari esker bi zuzenen posizio erlabioak hurrengoak direla dakigu:

a) elkar ebakitzen dute: puntu komun bat dute
b) paraleloak dira: ez dute puntu komunik eta bi zuzenak plano berean daude
c) elkar gurutzatzen dute: ez dute puntu komunik eta ez daude plano berean kokatuta
d) bat datoz: Puntu guztiak puntu komunak dira.

Ikus ditzagun aurreko kasuak desberdintzeko beharrezkoak eta nahikoak diren baldintzak azterketa analitiko bat eginez:

2.1.A.1.- Ekuazio inplizituen bidez definitutako bi zuzenen posizio erlatiboaren zehazpena

Izan bitez r eta s hurrengo ekuazio inplizituak definitutako zuzenak:

$$r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$$

Bi zuzenen ebakidura ondorengo sistema izango da:

$$r\cap s:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$$

M koefizienteen matrizea eta M’ matrize hedatua ondorengoak izanik:

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \qquad M'=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

Lehengo bi planoak eta azkeneko bi planoak elkar ebakitzen dutenez, M-ren heina gutxienez 2 da. M eta M’ matrizeen heinen arabera kasu desberdinak daude, kasuen azterketa sistemaren ebazpenera murrizten delarik:

	M-ren heina	*M’-ren heina*	*Sistema*	*Zuzenen posizio erlatiboa*
1. kasua	3	4	Bateraezina	Elkar gurutzatzen dute
2. kasua	3	3	Bateragarri zehaztua	Elkar ebakitzen dute
3. kasua	2	3	Bateraezina	Paraleloak dira
4. kasua	2	2	Bateragarri zehaztugabea	Bat datoz

2.1.A.2.- Ekuazio parametrikoen bidez definitutako bi zuzenen posizio erlatiboaren zehazpena

Izan bitez r eta s ondorengo ekuazio parametrikoak dituzten bi zuzen:

$$r:\begin{cases} x = x_1 + \lambda a_1 \\ y = y_1 + \lambda b_1 \\ z = z_1 + \lambda c_1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = x_2 + \mu a_2 \\ y = y_2 + \mu b_2 \\ z = z_2 + \mu c_2 \end{cases}$$

non $A_r = (x_1, y_{1,}, z_1)$ eta $A_s = \left(x_2, y_{2,}, z_2\right)$ r eta s zuzenetan kokatutako puntu bi diren, hurrenez hurren. Bestalde, $\vec{v}_r = (a_1, b_{1,}, c_1)$ r zuzenaren norabide bektorea eta $\vec{v}_s = (a_2, b_{2,}, c_2)$ s zuzenaren norabide bektorea dira. $\overrightarrow{A_rA_s} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ bektorea sortzen da.

$\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ eta $\overrightarrow{A_rA_s}$ bektoreen arteko menpekotasun linealaren arabera hurrengo kasuak daude:

<u>1. Kasua</u>: $h(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 2 \neq h\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = 3$

$\vec{v}_r$ eta $\vec{v}_s$ bektoreak ez dira paraleloak, ondorioz, zuzenak elkar ebaki edo gurutza daitezke. $h\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = 3$ denez, zuzen biak plano desberdinetan daude, beraz elkar gurutzatzen dira.

<u>2. Kasua:</u> $h(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 2 = h\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right)$

$\vec{v}_r$ eta $\vec{v}_s$ bektoreak ez dira paraleloak, ondorioz, zuzenak elkar ebaki edo gurutza daitezke. $h\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = 2$ denez, zuzen biak plano berean daude, beraz elkar ebakitzen dute.

Elkar ebakitzen duten bi zuzenen puntu komuna aurkitzeko, bi zuzenen ekuazio parametrikoetan agertzen diren x, y eta z balioak berdinduz lortzen den sistema ebatzi behar da:

$$r \cap s:\begin{cases} x_1 + \lambda a_1 = x_2 + \mu a_2 \\ y_1 + \lambda b_1 = y_2 + \mu b_2 \\ z_1 + \lambda c_1 = z_2 + \mu c_2 \end{cases}$$

λ eta μ parametroen balioak kalkulatu ondoren, hauetako bat berari dagokion zuzenaren ekuazioan ordezkatuz ebaki-puntuaren koordenatuak lortzen dira.

<u>3. Kasua:</u> $h(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 1 \neq h\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = 2$

$\vec{v}_r$ eta $\vec{v}_s$ bektoreak paraleloak dira, beraz, zuzenak ere paraleloak dira. $h\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = 2$ denez, zuzenak ez datoz bat, hau da, zuzenak paraleloak eta desberdinak dira.

<u>4. Kasua:</u> $h(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 1 = h\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right)$

$\vec{v}_r$ eta $\vec{v}_s$ bektoreak paraleloak dira, ondorioz, zuzenak ere paraleloak dira. Are gehiago, heina($\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{A_rA_s}$)=1 denez, zuzen biak bat datoz.

► *5 Adibidea (A)*

Bi zuzen hauen posizio erlatiboa aztertu

$$r:\begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=1+3t \end{cases} \quad \text{eta} \quad p:\begin{cases} x=2+2s \\ y=-2s \\ z=7+6s \end{cases}$$

Ebazpena: Emandako ekuazioetatik zuzenen puntuak eta norabide bektoreak lortzen dira:

$$A_r=(0,2,1), \qquad \vec{v}_r=(1,-1,3), \qquad A_p=(2,0,7), \qquad \vec{v}_p=(2,-2,6)$$

eta $\overrightarrow{A_rA_p}=(2,-2,6)$ bektorea lortzen da.

Hurrengo heinak kalkulatzen dira:

$$h(\vec{v}_r,\vec{v}_p)=h\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 6\end{pmatrix}=1 \qquad \mathrm{h}(\vec{v}_r,\vec{v}_p,\overrightarrow{A_rA_p})=h\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 6\\ 2 & -2 & 6\end{pmatrix}=1$$

$h(\vec{v}_r,\vec{v}_p)=1=h(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{A_rA_p})$ betetzen denez, bi zuzenak bat datoz.

► *6 Adibidea (A)*

r eta s zuzenen ekuazio inplizituak abiapuntu bezala harturik, kalkulatu a parametro errealaren balioak bi zuzenak espazioan elkar gurutza daitezen

$$\text{r:}\begin{cases} x+y+z=1 \\ y=2 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 2ax+y+z=1/2 \\ y+2z=3 \end{cases}$$

Ebazpena:

$r\cap s$ sistemaren koefizienteen matrizearen eta matrize hedatuaren heinak kalkulatzen dira:

$$h\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2a & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=3 \text{ , izan ere } \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow h(M)=3\ \forall a\in\mathbb{R}$$

Matrize hedatuaren heina lortzeko, bere determinantea kalkulatzen da:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 2a & 1 & 1 & 1/2\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=4-6a$$

r eta s zuzenak plano berean egon gabe elkar gurutzatzeko, aurrean lortutako determinatea ez nulua izan behar da, M’ matrizearen heina 4 izan dadin.

Beraz, $4-6a\neq 0 \Rightarrow a\neq 2/3$

2.1. Ikasgai bietako adibideak

► ***7 Adibidea (A)***

Izan bitez hurrengo zuzenak:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

$$s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Euren posizio erlatiboa eta puntu komunik duten aztertu.

Ebazpena: Emandako ekuazioetatik zuzen bakoitzeko puntu bat eta norabide bektorea lortzen dira:

$$A_r = (1,2,1), \qquad \vec{v}_r = (1,1,2) \qquad A_s = (3,3,-1), \qquad \vec{v}_s = (-2,-1,2)$$

eta $\overrightarrow{A_r A_s} = (2,1,-2)$ bektorea lortzen da.

Ondorengo heinak kalkulatzen dira:

$$h(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = h\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$h(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_r A_s}) = h\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3 \text{ , izan ere } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ da.}$$

$h(\vec{v}_r, \vec{v}_p) = 2 \neq h(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_r A_p}) = 3$ betetzen denez, bi zuzenak elkar ebakitzen dute.

Ondoren, bi zuzenen puntu komuna lortzen da. Horretarako zuzenen ekuazio parametrikoak kalkulatzen dira:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{eta} \quad s: \begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = 3 - s \\ z = -1 + 2s \end{cases}$$

Ekuazioak berdinduz hurrengo ekuazio-sistema lortzen da:

$$\begin{cases} 1 + t = 3 - 2s \\ 2 + t = 3 - s \\ 1 + 2t = -1 + 2s \end{cases}$$

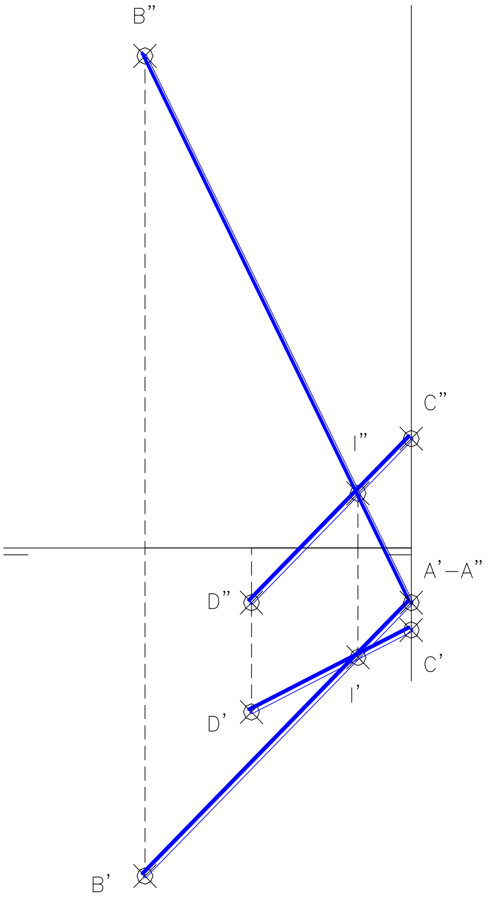
sistemaren soluzioa $t = 0$ eta $s = 1$ da.

Balio hauek bi zuzenetako batean ordezkatuz, bi zuzenen arteko ebaki-puntua lortzen da, $P = (1,2,1)$.

► ***7 Adibidea (M):***

r eta s zuzenen arteko posizio erlatiboa zehaztu

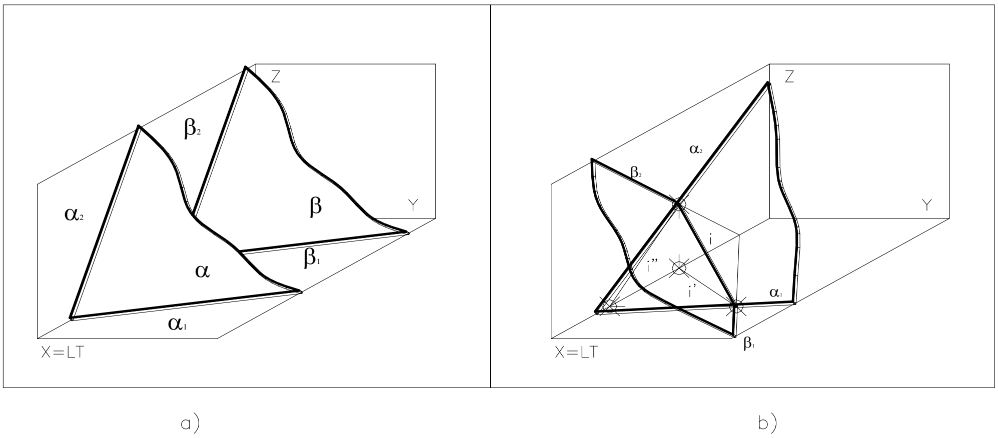
Emaitza: Zuzenak proiekzio horizontalak eta bertikalak elkar ebakitzen duten puntuan ebakitzen direnez, elkar ebakitzen dute.



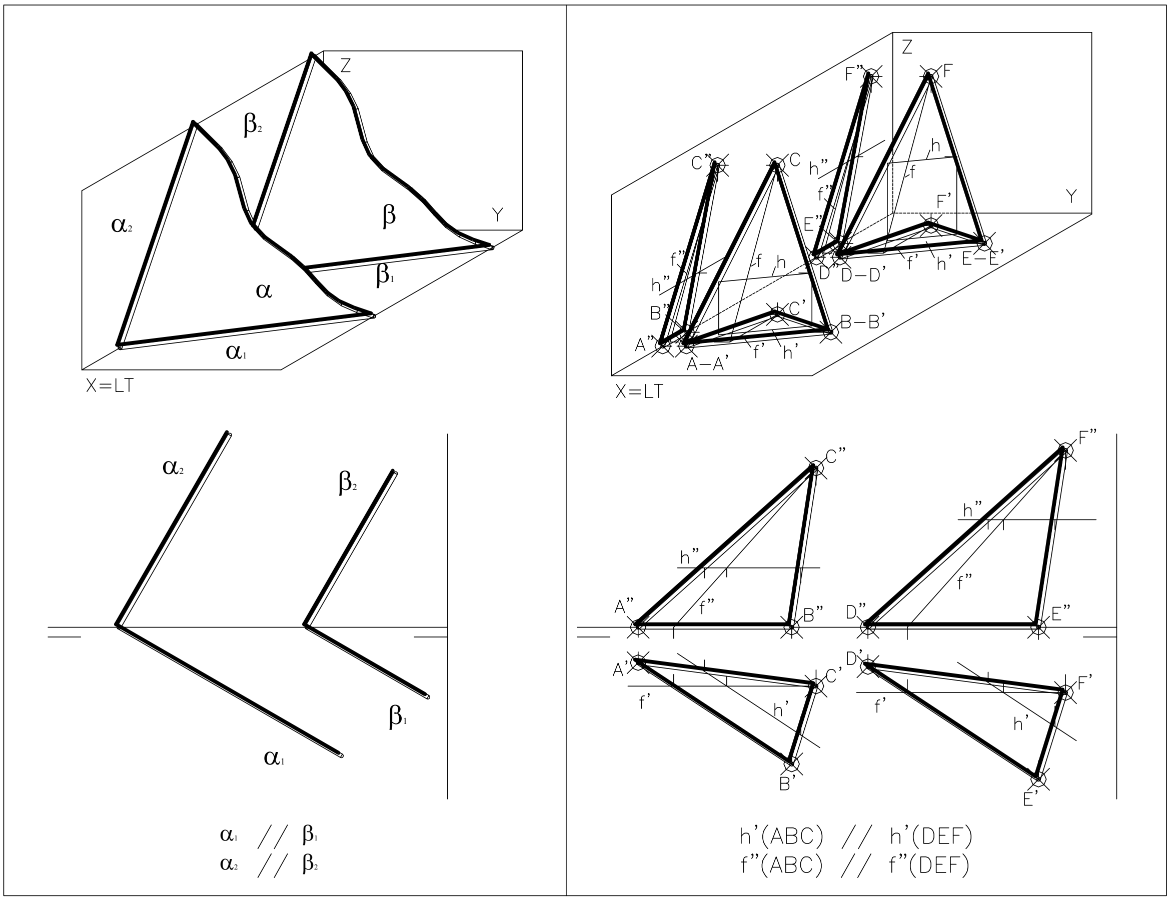
2.2. M – Bi planoren posizio erlatiboa

Bi planoek bi posizio izan ditzakete: beraien artean paraleloak edo ebakitzaileak izan daitezke.

a) Plano paraleloak (ez dute puntu komunik)



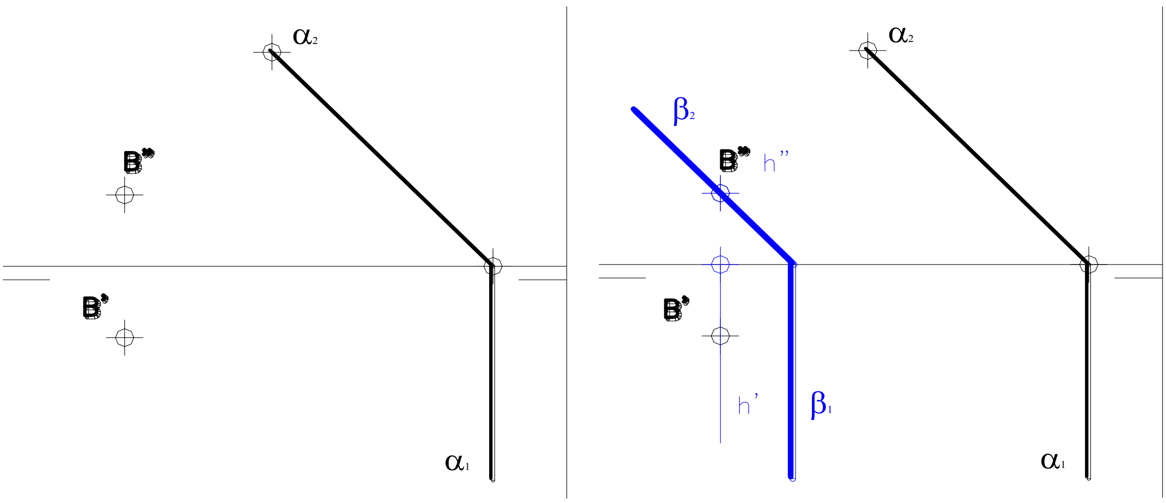
Bi plano elkarrekiko paraleloak badira, beraien traza homonimoak ere paraleloak izan behar dira. Era berean, planoko zuzen horizontalen eta frontalen proiekzio homonimoak ere paraleloak izango dira.



a)

► ***8 Adibidea (M):***

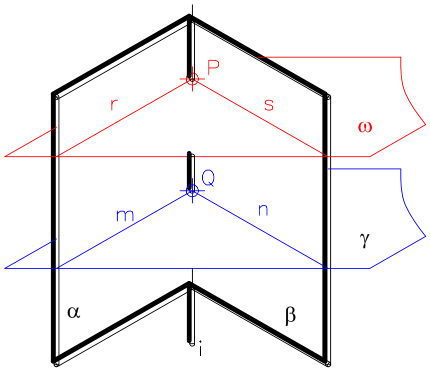
B puntua emanda, defini ezazu B puntua barne duen eta α-rekiko paraleloa den planoa.

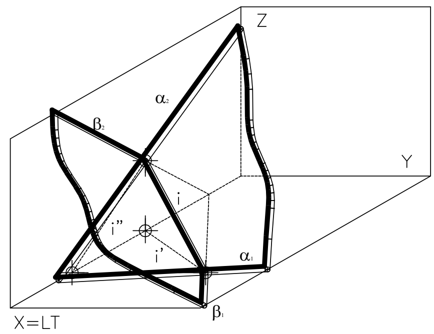


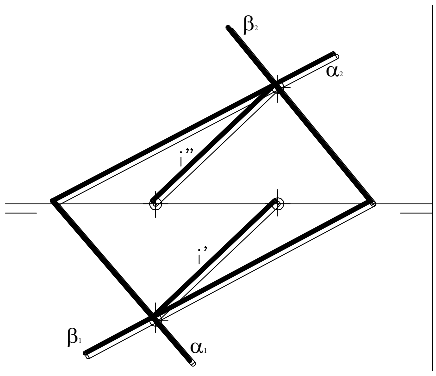
b) Elkar ebakitzen duten planoek zuzen batean ebakitzen dute elkar (“i” zuzena irudian).

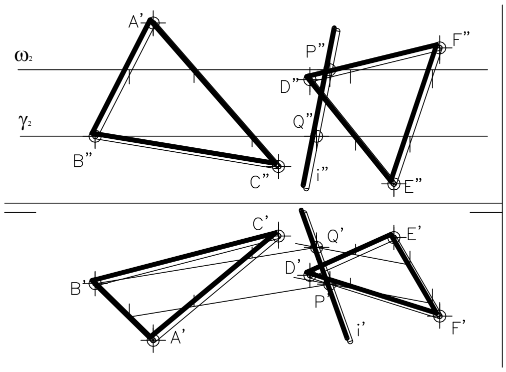
Orokorrean, bi planoen arteko ebaki-lerroa kalkulatzeko bi plano laguntzaile erabiltzen dira.

- Bi planoen trazak ezagunak badira, XY eta XZ proiekzio planoak aukeratuko ditugu plano laguntzaile bezala, beraz, nahiko da planoen trazen elkargunea kalkulatzea.
- Trazak ezagunak ez badira, proiekzio planoekiko edo proiekzio planoekiko paraleloak diren bi plano erabiltzen dira.
-

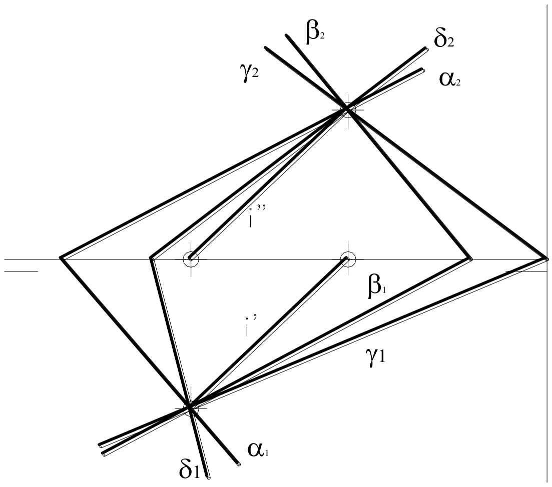


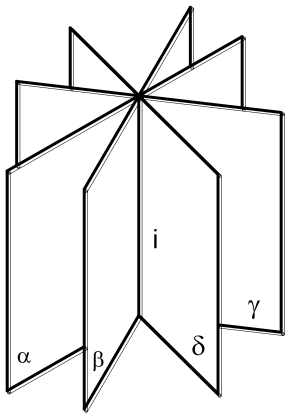






Zuzen berean elkar ebakitzen duten plano multzoari, plano-sorta deritzo.

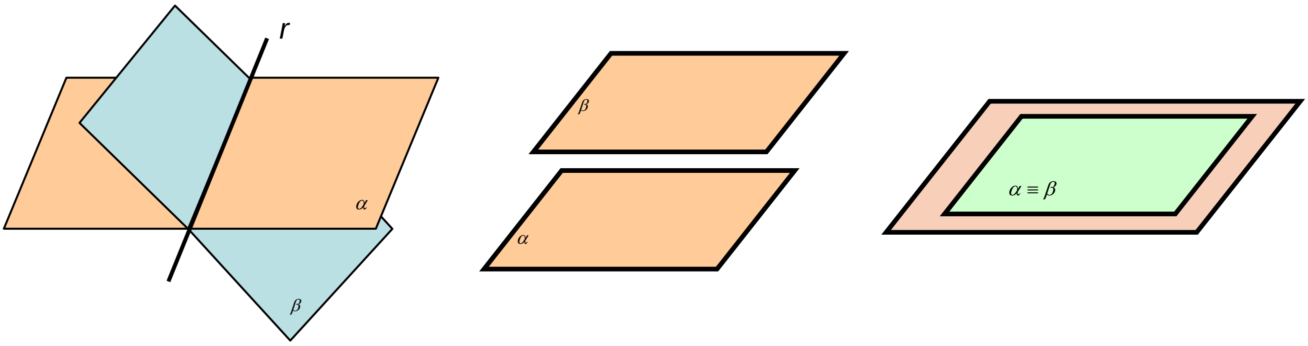




2.2.A – Bi planoren posizio erlatiboa

Oinarrizko geometriari esker bi planoren posizio erlabioak ondorengoak direla dakigu:

a) elkar ebakitzen dute: zuzen bateko puntu guztiak puntu komunak dira
b) paraleloak dira: ez dute puntu komunik
c) bat datoz: puntu guztiak puntu komunak dira.



Ikus ditzagun aurreko kasuak desberdintzeko beharrezkoak eta nahikoak diren baldintzak, planoa adierazteko dauden era desberdinen araberako azterketa analitikoa eginez.

Adierazpen analitikoa:

Izan bitez hurrengo ekuazio orokorrak dituzten bi plano:

$$\begin{aligned} \alpha: A_1x+B_1y+C_1z+D_1 &= 0 \\ \beta: A_2x+B_2y+C_2z+D_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Bi plano hauen posizio erlatiboa aztertzea euren ekuazio linealek sortzen duten sistema aztertzearen baliokidea da. M koefizienteen matrizea eta M’ matrize hedatua ondorengoak dira:

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad M'=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

M eta M’ matrizeen heinen arabera, hurrengo kasuak daude:

<u>1. kasua:</u> h(M)=2 eta h(M’)=2

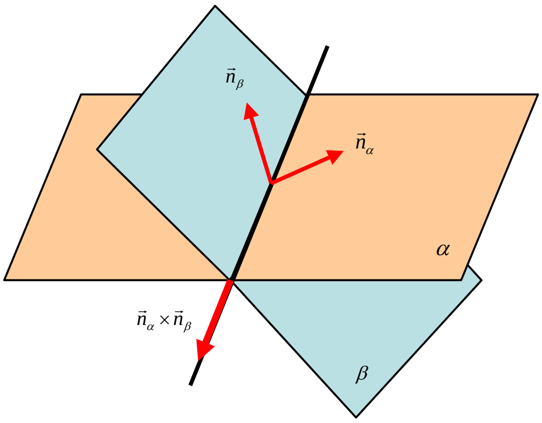
Sistema bateragarri zehaztugabea da, bere indeterminazio maila bat izanik. Hortaz, sistema honen infinitu soluzioak parametro baten menpe daude. Ondorioz, bi planoek zuzen batean elkar ebakitzen dute, hau da, bi planoak ebakitzaileak dira.

Beraz, zuzen bat adierazteko modu berri bat dago: elkar ebakitzen duten bi planoen arteko ebakidura bezala, hain zuzen ere.

Elkar ebakitzen duten bi planoek osatutako sistemari zuzenaren ekuazio inplizituak deritze.

Bi planoek elkar ebakitzean definitzen duten r zuzenaren norabide bektorea

$\vec{u}_r = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$ da.



Zuzean kokatuta dagoen puntu bat lortzeko, nahikoa da x, y edo z ezezagun bati balio bat eman ondoren, beste bi ezezagunen menpe geratzen den sistema ebaztea.

Zuzenaren puntu bat eta norabide bektorea ezagunak izanik, zuzenaren ekuazio bektoriala, parametrikoa edo jarraitua idatz daiteke.

2. Kasua: h(M)=1 eta h(M')=2

Sistema bateraezina da. Planoek ez dute puntu komunik, hau da, paraleloak eta desberdinak dira.

3. Kasua: h(M)=1 eta h(M')=1

Sistema bateragarri zehaztugabea da. Ekuazio biak linealki menpekoak dira eta soluzio berberak dituzte. Ondorioz, planoetako puntu guztiak puntu komunak dira, hau da, planoak bat datoz.

	M-ren heina	M'-ren heina	Sistema	Planoen posizio erlatiboa
1. kasua	2	2	Bateragarri zehaztugabea	Elkar ebakitzen dute
2. kasua	1	2	Bateraezina	Paraleloak dira
3. kasua	1	1	Bateragarri zehaztugabea	Bat datoz

Praktikan, bi planoen posizioa zehazteko, orokorrean, gai askeak eta koefizienteak proportzionalak diren edo ez aztertzen da:

1. Koefizienteak ez dira proportzionalak: planoek elkar ebakitzen dute.
2. Koefizienteak proportzionalak dira baina bai askeak ez: planoak paraleloak dira.
3. Koefizienteak eta gai askeak proportzionalak dira: planoak bat datoz.

Plano paraleloen sorta

Planoaren ekuazio inplizitua emanik

$Ax+By+Cz+D=0$

Aurreko planoarekiko paraleloak diren planoak

$$Ax + By + Cz + K = 0, K \in R$$

itxura dute, izan ere, denek $\vec{n}=(A,B,C)$ bektore normal bera dute.

Plano batekiko paraleloak diren planoek osatzen duten multzoari plano paraleloen sorta deritzo.

Plano paraleloen sorta bertan dagoen plano batek mugatzen du. Bere ekuazioa hurrengo izanik:

$$Ax + By + Cz + K = 0, K \in R$$

Hurrengo kasuetan plano baten ekuazioa zehazteko plano paraleloen sorta erabiltzen da:

a) P(x_1, y_1, z_1) puntutik igaro eta $Ax+By+Cz+D=0$ planoarekiko paraleloa den planoa kalkulatzeko.

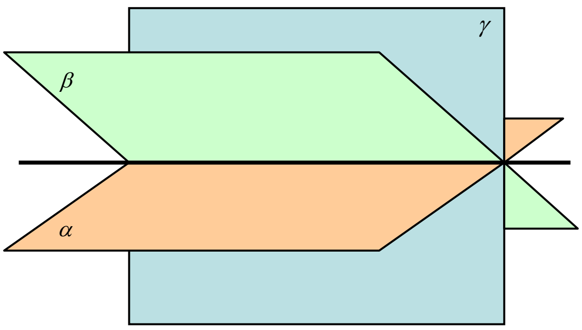
b) P(x_1, y_1, z_1) puntutik igaro eta $\vec{n}=(A,B,C)$ bektorearekiko elkarzuta den planoa zehazteko.

c) P(x_1, y_1, z_1) puntutik igaro eta $\dfrac{x-A}{A}=\dfrac{y-b}{B}=\dfrac{z-c}{C}$ zuzenarekiko elkarzuta den planoa zehazteko.

Elkar ebakitzen duten planoen sorta

Emandako bi planok r zuzenean elkar ebakitzen badute eta, hirugarren plano bat zuzen horretatik igarotzen bada, lehenengo bi planoen soluzio komunak hirugarren planoaren soluzioak ere izango dira. Hortaz, azken planoa beste bi planoen konbinazio lineala da eta hurrengo eran idatz daiteke:

$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=t(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+s(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$



s=0 eginez lehenengo planoa lortzen da, eta t=0 eginez berriz, bigarrena. Era berean, ebakidura-zuzenetik igarotzen den edozein planoren ekuazioak soluzio berdinak ditu.

Zuzen batetik igarotzen den plano multzoari, elkar ebakitzen duten planoen sorta eta r ebakidura-zuzenari plano sortaren ertza deritze.

Plano sorta, bere barnean dauden bi plano desberdinek zehazten dute, ekuazioa ondorengoa izanik:

$$t(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + s(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad t, s \in R$$

Sinbolikoki:

$\mathbf{t}\alpha + \mathbf{s}\beta = 0$

Plano sorta erabiliz plano bat zehaztea

Elkar ebakitzen duten plano sortaren ohiko aplikazioa, $P(x_1, y_1, z_1)$ puntutik igaro eta α eta β planoek mugatutako zuzena barnean duen planoaren ekuazioa lortzea da.

$$\begin{aligned} \alpha &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \beta &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}$$

Puntua planoetatik kanpo dagoen puntu bat dela suposatzen da. Planoak α eta β planoek mugatutako zuzena barnean badu, eurek zehaztutako plano sortaren barruan egongo da, hau da, hurrengo itxura izango du:

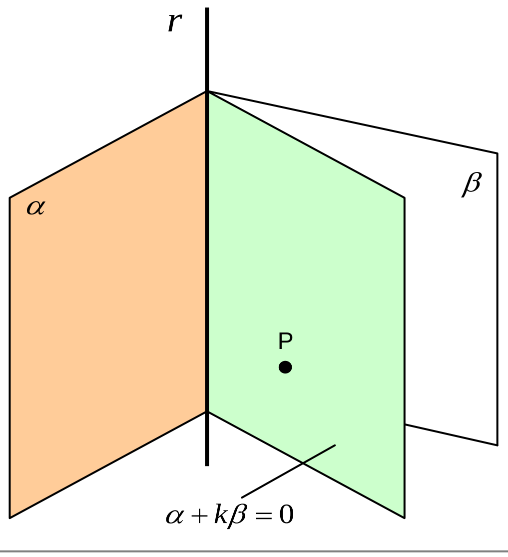
$\mathbf{t}\alpha + \mathbf{s}\beta = 0$

P puntuaren koordenatuak plano sortaren ekuazioan ordezkatuz gero, t eta s parametroen arteko erlazioa lortuko da:

$$t(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) + s(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) = 0$$

Eragiketak eginez, $s = kt$ erako erlazioa lortzen da, k zenbaki bat izanik. Balio hau plano sortan ordezkatuz eskatutako planoaren ekuazioa lortzen da:

$\mathbf{t}\alpha + \mathbf{kt}\beta = 0 \mapsto \alpha + \mathbf{k}\beta = 0$



► ***9 Adibidea (A)***

Hurrengo planoen posizio erlatiboa aztertu:

$$\begin{aligned} \alpha &: x+y-5z &&= -4 \\ \beta &: -3x-3y+15z &&= 12 \end{aligned}$$

Ebazpena: Ekuazioek osatutako sisteman h(M)=1 eta h(M')=1 dira; hortaz, sistema bateragarria da. Are gehiago, ekuazio biak proportzionalak direnez, sistema ekuazio batera murrizten da. Ondorioz, planoak bat datoz.

2.2. Ikasgai bietako adibideak

► ***10 Adibidea (A)***

Planoen posizio erlatiboa aztertu:

$$\begin{aligned} \alpha &: x+y-5z &&= -4 \\ \beta &: 3x-y+25z &&= 1 \end{aligned}$$

Ebazpena: h(M)=h(M')=2 denez, planoek osatutako sistema bateragarria da. Bi planoek zuzen batean elkar ebakitzen dute, zuzen hau sistemaren ebazpena izanik. Zuzen honen norabide bektore bat α eta β planoen bektore normalen biderkadura bektoriala eginez lortzen da:

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = 3\vec{i} - 17\vec{j} - 4\vec{k}$$

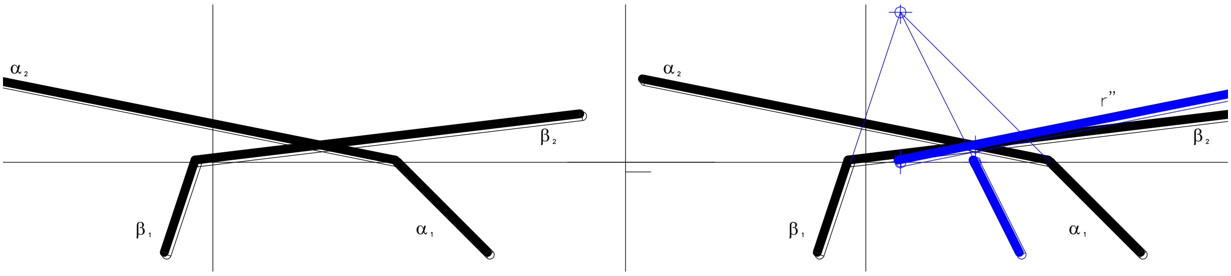
Azkenik, zuzenaren ekuazioa zehazteko, nahiko da bi planoen ebakiduran dagoen puntu bat hartzea. Horretarako, z aldagaiari 5 balioa emanez geratzen den sistema lineala ebazten da, $x=3$ eta $y=18$ lortuz. Ondorioz, zuzenaren ekuazio jarraitua hurrengoa da:

$$r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-18}{-17} = \frac{z-5}{-4}$$

► *10 Adibidea (M)*

α eta β planoen arteko posizio erlatiboa aztertu

Emaitza: r zuzenean elkar ebakitzen dute.



► *11 Adibidea (A)*

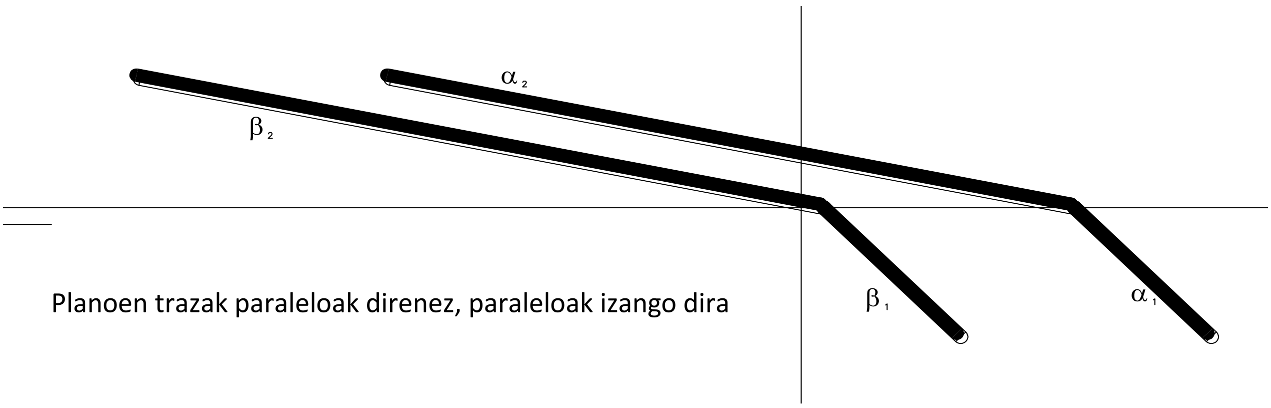
Planoen posizio erlatiboa aztertu:

$$\alpha: x+y-5z = -4$$
$$\beta: -3x-3y+15z = 1$$

Ebazpena: h(M)=1 eta h(M')=2 direnez, bi planoek sortutako sistema bateraezina da. Plano bien ekuazioak guztiz proportzionalak ez direnez, planoak paraleloak eta desberdinak dira.

► *11Adibidea (M)*

α eta β planoen arteko posizio erlatiboa aztertu:



► *12 Adibidea (A)*

$A(1,1,1)$ puntutik igarotzen den eta $3x-5y+z-5=0$ planoarekiko paraleloa den planoaren ekuazioa kalkulatu.

Ebazpena: Emandako planoarekiko paraleloak diren planoek hurrengo adierazpena dute

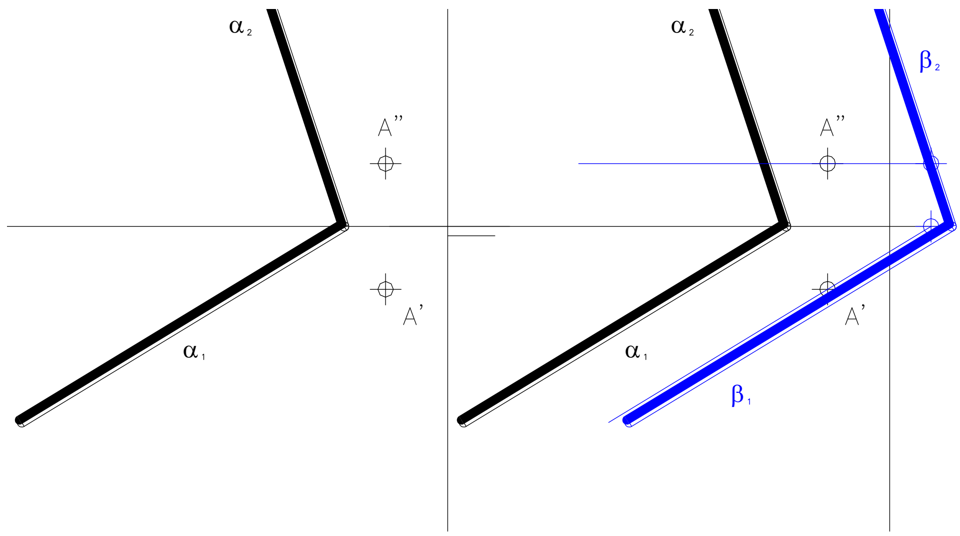
$3x-5y+z+K=0$

Bestalde, $A(1,1,1)$ puntua planoan dagoenez: $3-5+1+K=0$™ $K=1$

Beraz, eskatutako planoaren ekuazioa $3x-5y+z+1=0$ da.

► *12Adibidea (M)*

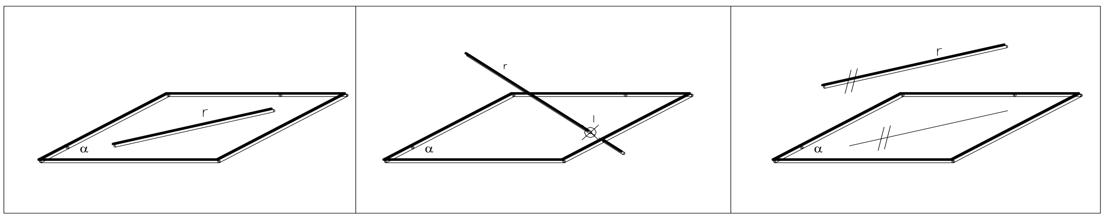
Traza ezazu A puntua barne duen eta α planoarekiko paraleloa den planoa.



2.3.M – Zuzen baten eta plano baten posizio erlatiboa:

uzen batek eta plano batek hiru posizio erlatiboa izan ditzakete:

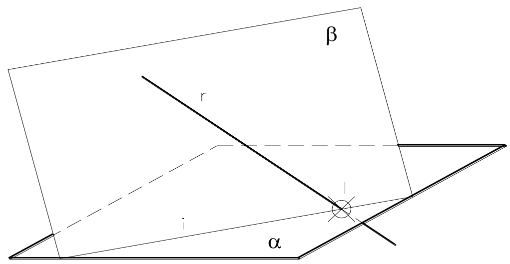
a) Zuzena planoan dago (zuzeneko puntu guztiak planoan daude)
b) Zuzenak eta planoak puntu batean elkar ebakitzen dute.
c) Zuzena eta planoa paraleloak dira (ez dute puntu komunik).



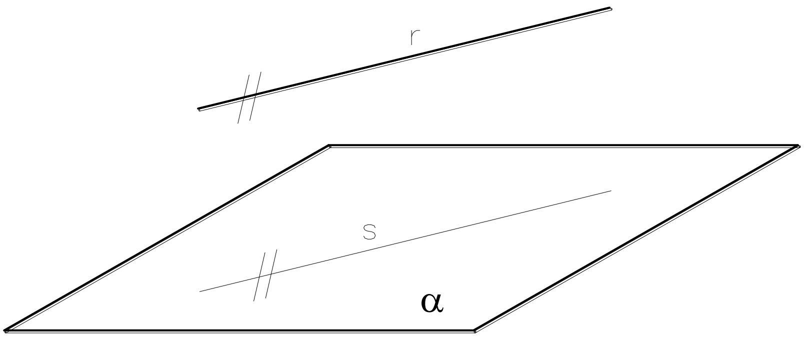
a) b) c)

a) Aurrean ikusi dugun bezala, zuzen bat plano batean kokatuta egoteko bere trazak planoaren traza homonimoetan egon behar dira.

b) Zuzenaren eta planoaren arteko ebakidura: a plano baten eta r zuzen baten arteko ebakidura zehazteko bplano laguntzaile bat erabiltzen da. Plano laguntzaile hau r zuzena barnean duen plano proiektatzaile bat izan ohi da. a eta b planoen arteko (i) ebakidura-zuzenak eta r zuzen planokideen arteko ebakidura bilatzen ari garen (I) ebakidura-puntua izango da.



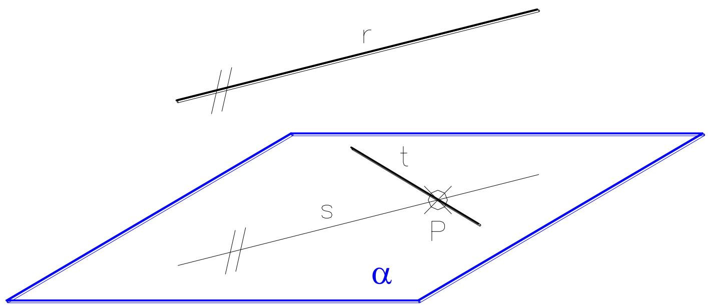
c) r zuzena a planoarekiko paraleloa izango da planoak barnean duen s zuzen batekiko paraleloa bada.



► ***Ariketa***

r eta t zuzenak emanik, defini ezazu t zuzena barne duen eta r zuzenarekiko paraleloa den planoa.
Jarraitu beharreko prozedura hurrengoa da:

1. t zuzeneko edozein (P) puntutik, r zuzenarekiko paraleloa den (s) zuzen bat pasarazten da.
2. s eta t zuzenek definitutako planoa zehaztu (emaitza)

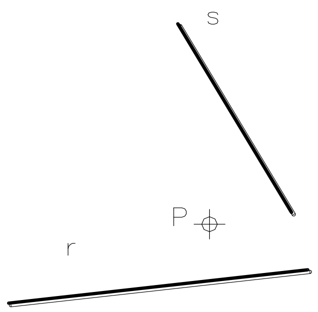


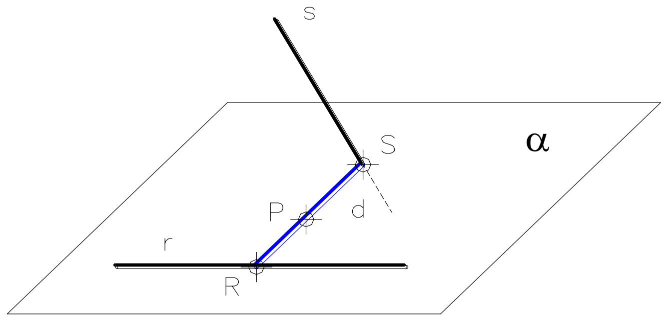
► *Ariketa*

r eta t zuzenak emanik, marraz ezazu P puntutik bi zuzenak ebakitzen dituen zuzena.

Jarraitu beharreko prozedura hurrengoa da:

1. Aurreko zuzen batek, (r) zuzenak, eta (P) puntuak definitutako a planoa zehaztu.
2. s zuzenaren eta a planoaren arteko (S) ebaki-puntua kalkulatu.
3. S eta P puntuek bilatzen ari garen zuzena definitzen dute, bi puntu hauek r zuzenarekin batera plano berean baitaude. Bi zuzenak planokideak direnez, elkar ebakitzen dute edo elkarrekiko paraleloak izan behar dira. Kasu honetan R puntuan elkar ebakitzen dute.



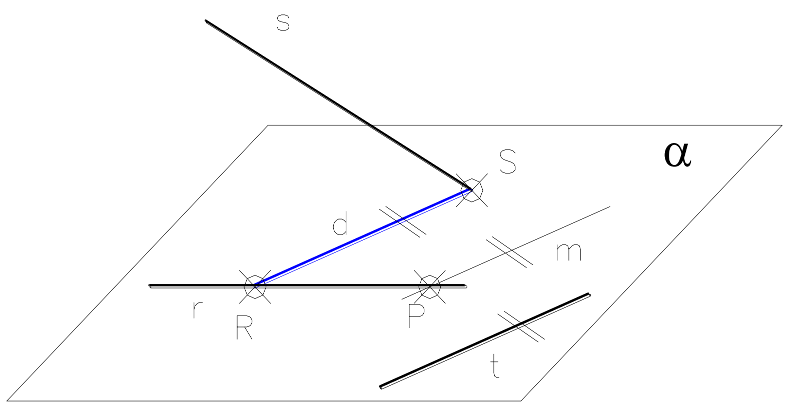


► *Ariketa*

r, s eta t zuzenak emanik, traza ezazu t zuzenarekiko paraleloa den eta r eta s zuzenak ebakitzen dituen zuzena.

Jarraitu beharreko prozedura hurrengoa da:

1. r zuzeneko edozein (P) puntutik, t zuzenarekiko paraleloa den (m) zuzena trazatu.
2. r eta m zuzenek (a) planoa definitzen dute.
3. a planoaren eta s zuzenaren ebakidura zehaztu: S puntua.
4. S puntutik, t zuzenarekiko paraleloa den (d) zuzena trazatu.
5. d eta r zuzenen arteko ebakidura zehaztu: R puntua.
6. d zuzena bilatzen ari garen soluzioa da, eta R eta S puntuak d zuzenak r eta s zuzenak ebakitzen dituen puntuak dira, hurrenez hurren.



2.3.A – Zuzen baten eta plano baten posizio erlatiboa

2.3.A.1.- Zuzen baten eta plano baten posizio erlatiboaren zehazpena zuzena eta planoa ekuazio inplizituak erabiliz definituta daudenean

Izan bitez $r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ zuzena eta $\pi: A_3+B_3y+C_3z+D_3=0$ planoa.

Euren posizio erlatiboa aztertzeko $r\cap\pi$ barietate lineal afina aztertzen da:

$$r\cap\pi:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3+B_3y+C_3z+D_3=0 \end{cases}$$

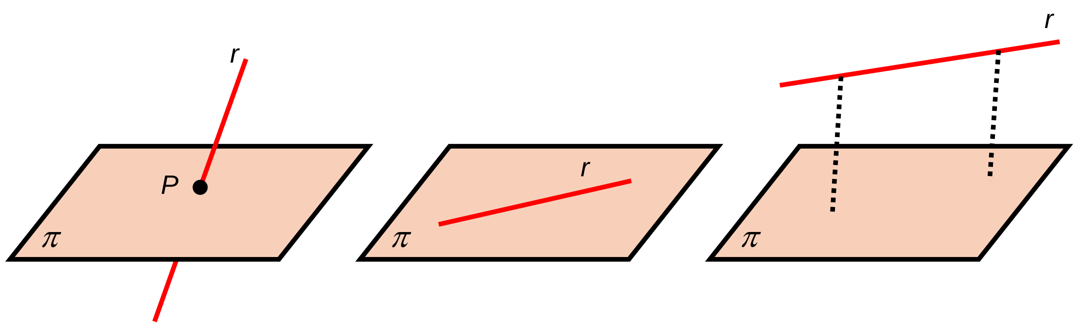
non $M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ eta $M'=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$ diren.

$r\cap\pi$ ekuazio linealen sistema honelakoa izan daiteke:

1. Kasua: Bateragarri Zehaztua ($h(M)=h(M')=3=ezezagun\ \ kopurua$)
Sistemak soluzio bakarra du, ondorioz, planoaren eta zuzenaren arteko ebakidura puntu bat da, ebaki-puntu hau aurreko sistemaren soluzioa izanik. Kasu honetan, r zuzenak eta π planoak elkar ebakitzen dutela edo ebakitzaileak direla esaten da.

2. Kasua: Bateragarri Zehaztugabea ($h(M)=h(M')=2<3=ezezagun\ kopurua$)
Sistemak infinitu soluzio ditu, hirugarren ekuazioa beste bi ekuazioen konbinazioa lineala baita. π planoa r zuzena ertz bezala duten planoen sortan egongo da, beraz, $r\subset\pi$. Kasu honetan, r zuzena π planoan dagoela esaten da.

3. Kasua: Bateraezina ($h(M)=2\neq h(M')=3$)
Sistemak ez du soluziorik. Ondorioz, $r\cap\pi=\{\text{O}\}$, hau da, r zuzena eta π planoa elkarrekiko paraleloak dira.



Zuzenak eta planoak elkar ebakitzen dute

Zuzena planoan dago

Zuzena eta planoa paraleloak dira

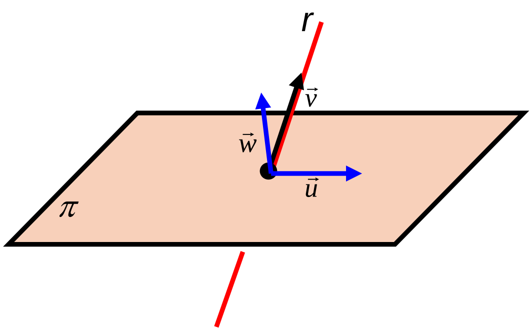
2.3.A.2- Zuzen baten eta plano baten posizio erlatiboaren zehazpena zuzena eta planoa ekuazio bektorialak edo parametrikoak erabiliz definituta daudenean

Izan bedi r hurrengo ekuazio parametrikoak definitutako zuzena $r:\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$

$P=(p_1,p_2,p_3)$ zuzeneko edozein puntu eta $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ zuzenaren norabide bektorea izanik. Eta izan bedi π hurrengo ekuazio parametrikoak definitutako planoa $\pi:\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$ $Q=(q_1,q_2,q_3)$ planoak barnean duen edozein puntu eta $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ eta $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ planoaren bektore zuzentzaileak izanik. Zuzenaren eta planoaren posizio erlatiboa norabide bektoreak erabiliz azter daiteke:

a. Zuzenak eta planoak elkar ebakitzen dute
Zuzenaren norabide bektorea eta planoaren bektore zuzentzaileak linealki independenteak badira, zuzenak eta planoak elkar ebakitzen dute.

Kasu honetan $h\begin{pmatrix}v_1 & u_1 & w_1\\v_2 & u_2 & w_2\\v_3 & u_3 & w_3\end{pmatrix}=3$ betetzen da

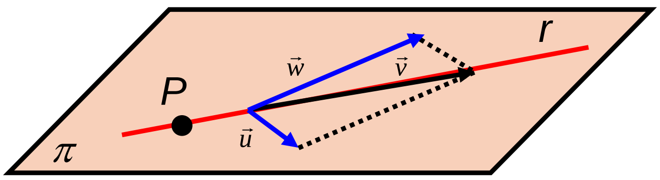


b. Planoak barnean duen zuzena edo planoarekiko paraleloa den zuzena
Zuzenaren norabide bektorea planoaren bektore zuzentzaileen konbinazio lineala bada bi posibilitate daude, zuzena planoan dago edo zuzena eta planoa paraleloak dira.

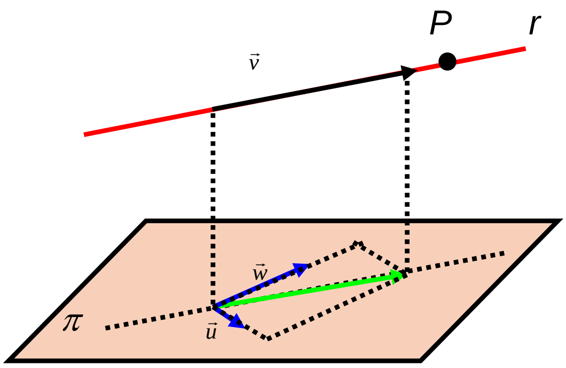
Kasu bietan $h\begin{pmatrix}v_1 & u_1 & w_1\\v_2 & u_2 & w_2\\v_3 & u_3 & w_3\end{pmatrix}=2$ betetzen da.

Bi kasuak desberdintzeko, zuzenean dagoen edozein puntu hartu eta planoaren ekuazioan ordezkatzen da. Puntuak planoaren ekuazioa betetzen badu, zuzena planoan egongo da. Puntuak planoaren ekuazio betetzen ez badu, berriz, zuzena eta planoa elkarrekiko paraleloak izango dira.

Zuzena planoan dago



Zuzena eta planoa elkarrekiko paraleloak dira



► *13 Adibidea (A)*

a parametro errealaren arabera $\alpha : x + ay - z = 1$ planoaren eta $r : \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$ zuzenaren posizio erlatiboa aztertu.

Ebazpena: Hurrengo sistema aztertu behar dugu $r \cap \alpha : \begin{cases} x + ay - z - 1 = 0 \\ 2x + y - az - 2 = 0 \\ x - y - z - a + 1 = 0 \end{cases}$

non $M = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ eta $M' = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -a & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1-a \end{pmatrix}$ diren.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow h(M) \geq 2$; $\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + a + 2$

$-a^2 + a + 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) = 0$

- $a \neq 2$ eta $a \neq -1$ bada $\Rightarrow h(M) = 3 = h(M') \Rightarrow$ zuzenak eta planoak puntu batean elkar ebakitzen dute.
- $a = 2$ bada

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow h(M) = 2 = h(M') \Rightarrow$$ Zuzena planoan dago.

- $a = -1$ bada

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow h(M) = 2 \neq h(M') = 3 \Rightarrow$$ Zuzena eta planoa elkarrekiko paraleloak dira

.

2.3 Ikasgai bietako adibideak

► ***14 Adibidea (A)***

$r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ zuzenaren eta $\alpha: 2x - 3y + z + 1 = 0$ planoaren posizio erlatiboa zehaztu

Ebazpena: Zuzenaren ekuazio inplizituak kalkulatuko ditugu:

$$r: \begin{cases} x = y \\ x = z + 1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Zuzenaren eta planoaren arteko ebakidura $r \cap \alpha: \begin{cases} 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ x - y = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$ da, non

$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ eta $M' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ diren.

M eta M' matrizeen heinak aztertuko ditugu:

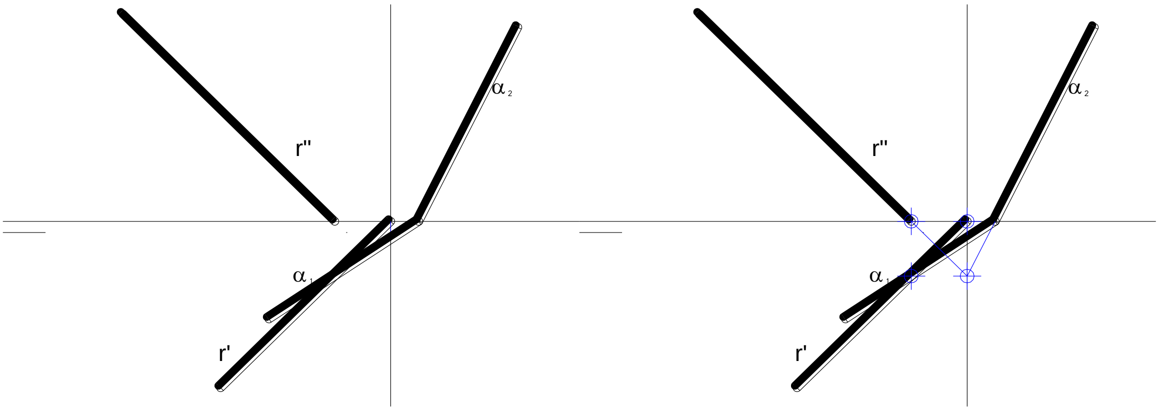
$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow h(M) \geq 2$; $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow h(M) = 2 = h(M')$

Beraz, zuzena planoan dago.

► ***14 Adibidea (M):***

r zuzenaren eta α planoaren arteko posizioa egiaztatu:

Emaitza: Irudian ikusten den bezala, zuzenaren trazak planoaren traza homonimoetan daude. Hortaz, zuzena planoan kokatuta dago.



► ***15 Adibidea (A)***

Zehaztu b parametro errealaren balioa $r:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{b}=\frac{z+3}{2}$ zuzenak $\alpha: 2x-4y+5z=6$ planoa ebaki ez dezan.

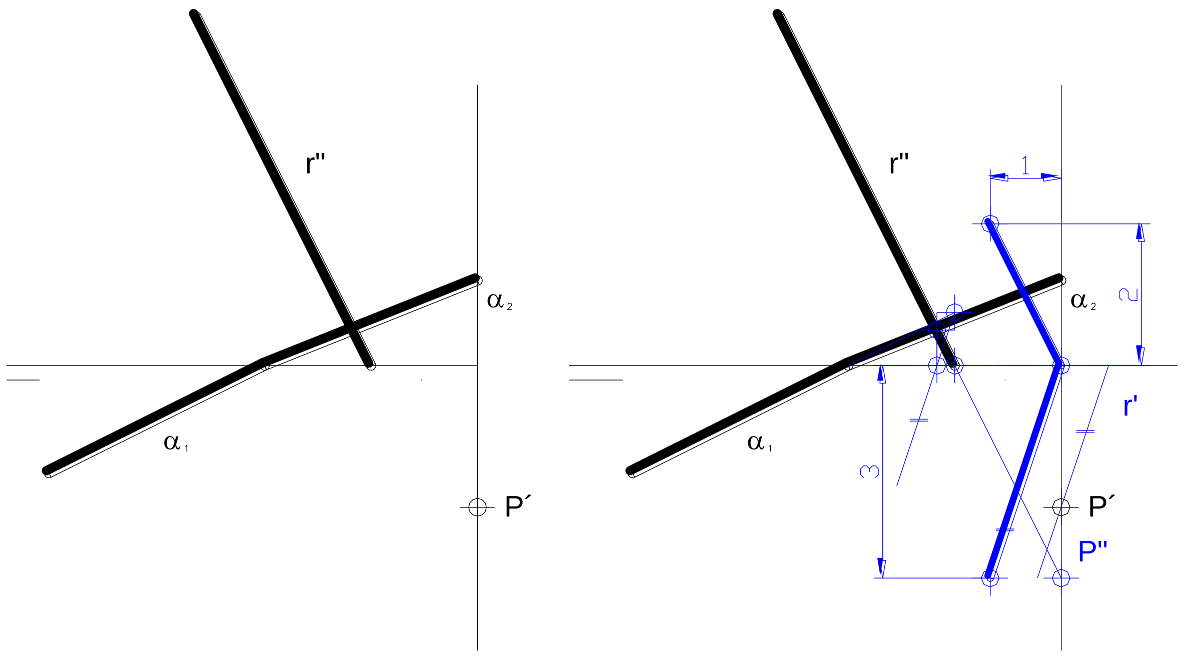
Ebazpena: Zuzenak eta planoak elkar ez ebakitzeko, elkarrekiko paraleloak izan behar dira. Ondorioz, zuzenaren norabide bektorea eta planoaren bektore normala elkarzutak izan behar dira (hau da, euren biderkadura eskalarra zero izan behar da).

Zuzenaren norabide bektorea $\vec{u}=(1,b,2)$ da eta planoaren bektore normala, ostera, $\vec{a}=(2,-4,5)$

$$\vec{u}\perp\vec{a}\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{a}=0\Rightarrow(1,b,2)\cdot(2,-4,5)=0\Rightarrow 2-4b+10=0\Rightarrow b=3$$

► ***15(M) Adibidea***

Kalkula itzazu r’ eta P”, r α planoarekiko paraleloa izan dadin. Zehatz ezazu falta den parametroa (zuzenaren norabide bektorearen “y” koordenatua).



► *16 Adibidea (A)*

r: $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ x + 2z = 7 \end{cases}$ zuzenaren eta $\alpha: x - 13y - 8z + 41 = 0$ planoaren arteko ebakidura kalkulatu.

Ebazpena: Ekuazio linealen sistema ebatziz, zuzenaren eta planoaren arteko ebakidura kalkulatuko dugu:

$$r \cap \alpha: \begin{cases} x + 2y = 9 \\ x + 2z = 7 \\ x - 13y - 8z = -41 \end{cases} \rightarrow x = \frac{91}{23}\ ,\ y = \frac{58}{23}\ ,\ z = \frac{35}{23}$$

► *16 Adibidea (M)*

r zuzenaren eta ABC planoaren arteko ebakidura zehaztu.