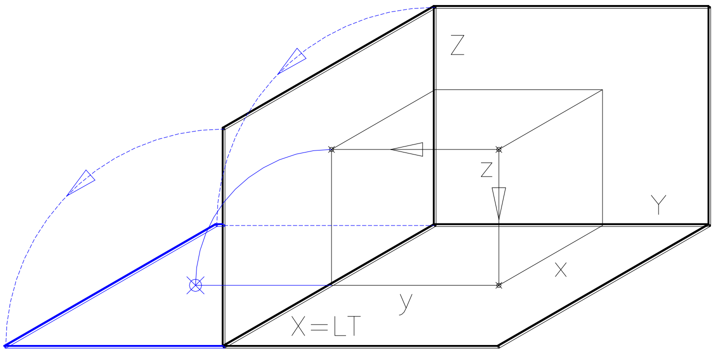
I. GAIA: ESPAZIO AFINEKO ELEMENTUEN DEFINIZIOA ETA ADIERAZPENA

1.1. M- Erreferentzia-sistema

Sistema diedrikoan irudikatu nahi diren puntuak proiektatzeko hiru plano ortogonal erabiltzen dira (XY, XZ eta ZY), PH, PB eta PP izendatuak. Orokorrena, gehien erabiltzen diren proiekzioak PH eta PB dira, PP kasu zehatzetarako utziz.

PH eta PB planoen arteko elkarguneari Lur Lerroa (LL) esaten zaio. Planoetako bat beste planoarekin bat egin arte Lur Lerroaren inguruan eraisten da. Horrela, plano bakar batean lan egin dezakegu.

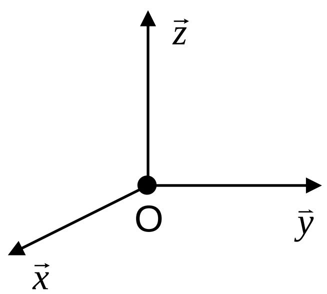


1.1.A - Erreferentzia- sistema

Izan bitez O espazioko puntu finko bat eta $B = \{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ R^3–ko oinarri bat. O puntua eta $B = \{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ oinarria erabiliz espazioko edozein punturen posizioa zehatz daiteke, hortaz, O puntuak eta $B = \{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ oinarriak erreferentzi sistema bat osatzen dute, $R = \{O\ ;\ \vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ adierazten dena.

O puntuari jatorria esaten zaio. O puntutik igaro eta oinarriko bektoreekiko paraleloak diren zuzenei koordenatu-ardatzak esaten zaie, OX, OY eta OZ denotatuko ditugu, hurrenez hurren.

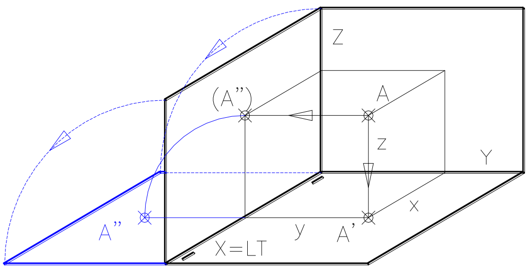
Erabiliko dugun oinarria oinarri ortonormala dela suposatuko dugu, ondorioz, $\vec{x}$, $\vec{y}$ eta $\vec{z}$ bektoreak elkarzutak eta unitarioak izango dira.

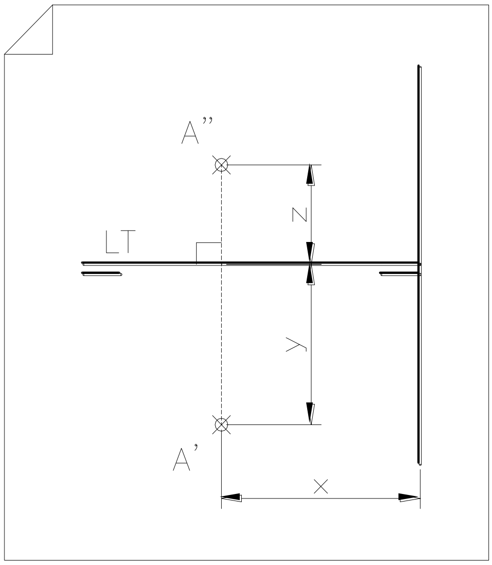


1.2. M - Puntua

Sistema diedrikoan (A) puntu bat bi proiekzioen bitartez definitzen da (A’ PH-ean eta A’’ PB-ean). Bi proiekzioak lotzen dituen lerroa, definioz, LL-arekiko elkarzuta da. Puntuaren hiru koordenatu kartesiarrak hurrengoak dira:

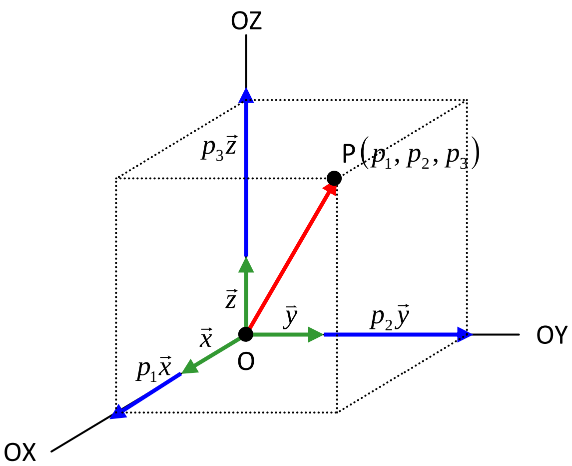
- x = Lan egiten dugun espazioan (XY+XZ planoetan) LL-arekiko elkarzuta den YZ (Profilezko Planoa deritzona) erreferentzia-planora dagoen distantzia
- y = A’ proiekziotik LL-ra dagoen distantzia.
- z = A” proiekziotik LL-ra dagoen distantzia.





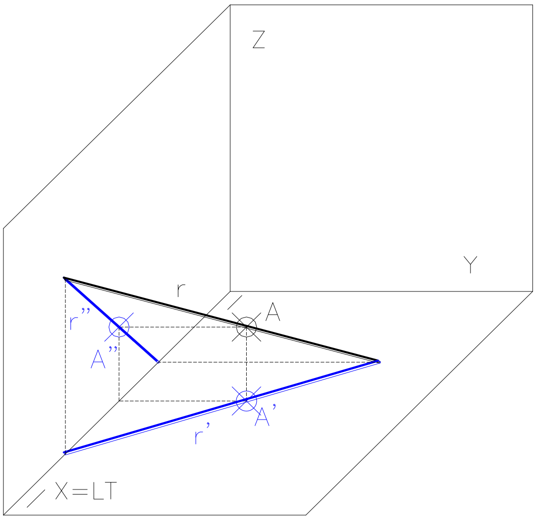
1.2.A - Puntu baten koordenatuak

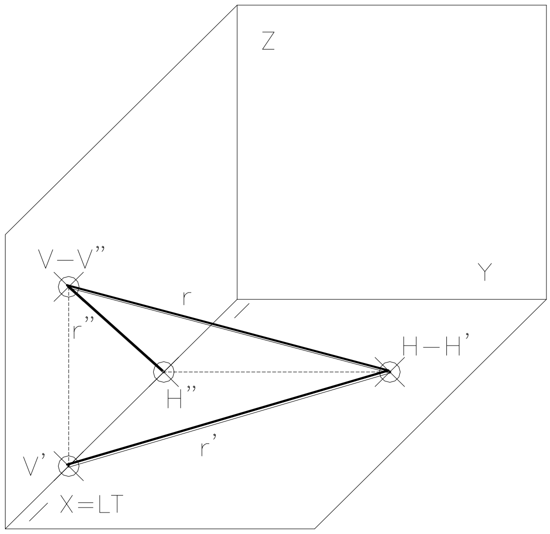
P espazioko edozein puntuk O puntuarekin batera B oinarriarekiko (p_1, p_2, p_3) osagaiak dituen $\overrightarrow{OP}$ bektorea mugatzen du, hau da, $\overrightarrow{OP} = p_1\vec{x} + p_2\vec{y} + p_3\vec{z}$. Ondorioz $R = \{O\,;\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ erreferentzi sistemarekiko P puntuaren koordenatu kartesiarrak (p_1, p_2, p_3) direla esaten da.



1.3. M- Zuzena

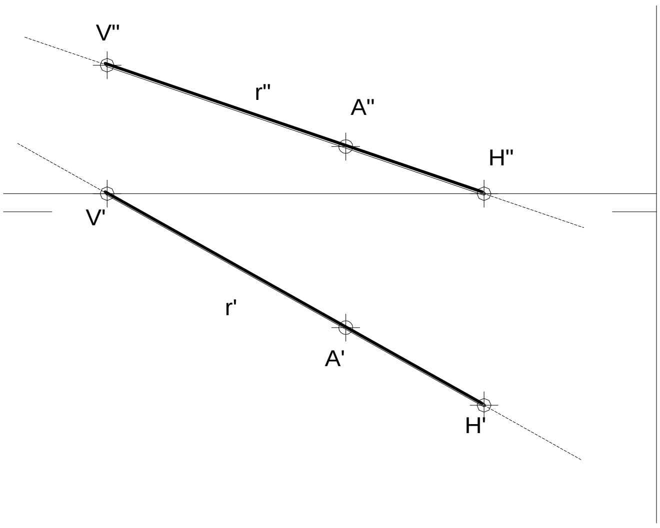
(r) zuzenaren bi proiekzioek (r’ PH-koa eta r’’ PB-koa) (r) zuzena zehaztuko dute. A puntua r zuzenean kokatuta badago, bere bi proiekzioak, A’ eta A’’ r’ eta r’’ proiekzioetan kokatuta egongo dira, hurrenez hurren.
Zuzenean dauden puntu biren proiekzioek zuzenaren proiekzioak definitzen dituzte.





Zuzenak proiekzio planoekin dituen ebaki-puntuei zuzenaren trazak deritze.

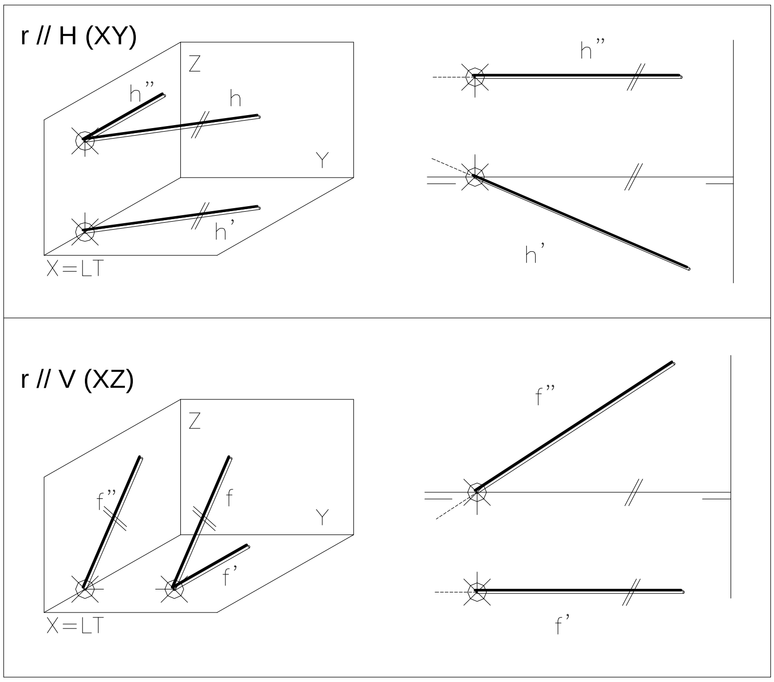
- Traza horizontala (H): r zuzenak XY planoa zeharkatzen duen puntua (puntu honetan z = 0)
- Traza bertikala (V): r zuzenak XZ planoa zeharkatzen duen puntua (puntu honetan y = 0)



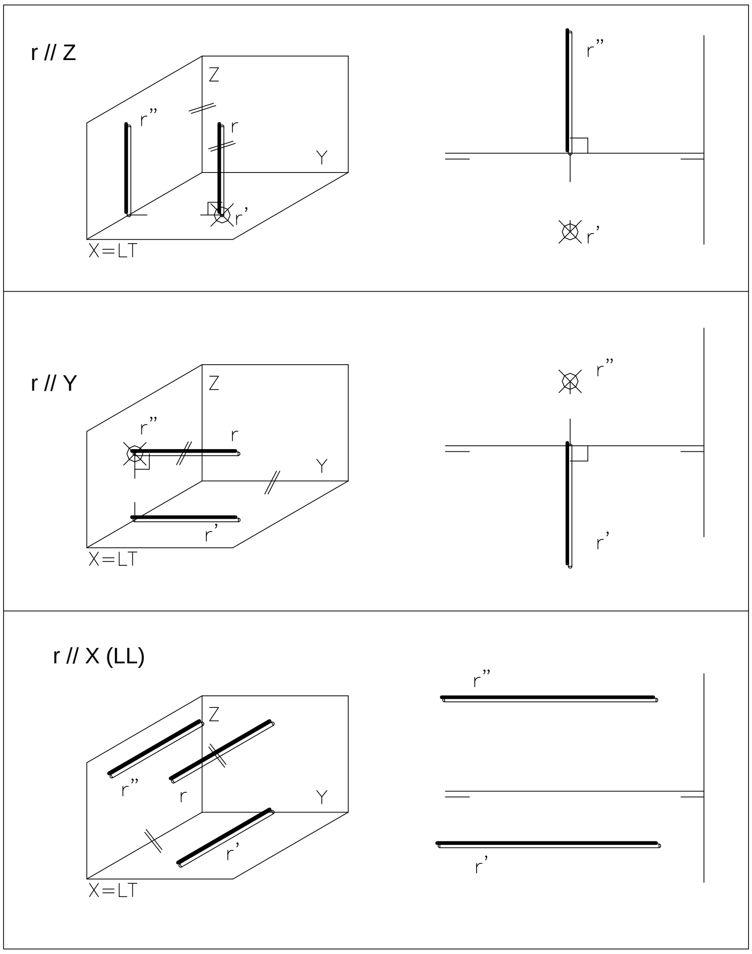
XY eta XZ planoekiko paraleloak diren zuzenak traza bakar bat dute, euren proiekzioetako bat Lur Lerroaren paraleloa baita.

Hurrengo irudian mota honetako zuzen bi agertzen dira:

- XY-rekiko paraleloa den zuzena (zuzen horizontala): h
- XZ-rekiko paraleloa den zuzena (zuzen frontala): f

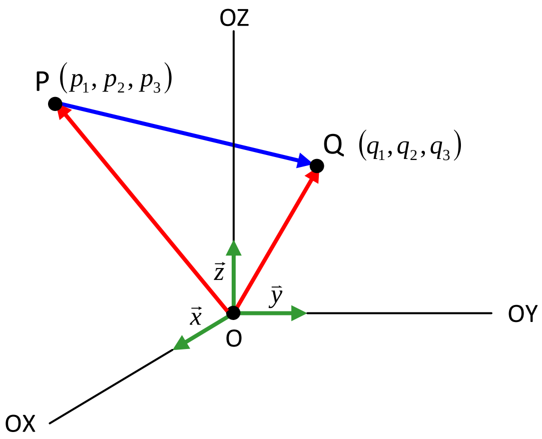


Hurrengo irudian koordenatu-ardatzekiko paraleloak diren zuzenak azaltzen dira:



1.3.A - Bi puntuk mugatutako bektorearen koordenatuak

Izan bitez ondorengo irudian agertzen diren $P = (p_1, p_2, p_3)$ eta $Q = (q_1, q_2, q_3)$ koordenatu espazioko bi puntu



Ondorioz, $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$ betetzen da, hortaz

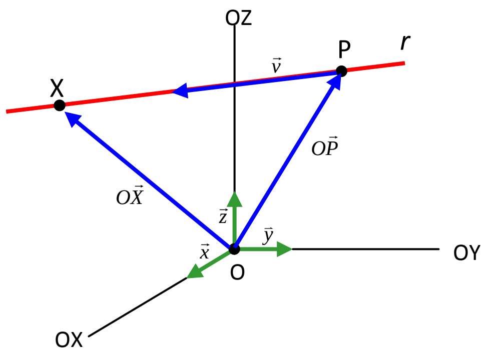
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (q_1, q_2, q_3) - (p_1, p_2, p_3) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$

1.3.A - Zuzena

Zuzen bat definitzeko zuzenean dagoen puntu bat eta zuzenaren norabidea behar dira. Zuzenaren norabide bera duen edozein bektore zuzenaren bektore zuzentzailea edo zuzenaren norabide bektorea dela esaten da.

$R = \{O\ ;\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ erreferentzi sisteman, $P = (p_1, p_2, p_3)$ puntutik igaro eta $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ norabide bektorea duen r zuzenaren ekuazioak hurrengoak dira:

- <u>Zuzenaren ekuazio bektoriala</u>



Irudian ageri den bezala, r zuzeneko X edozein puntu emanik, $\overrightarrow{PX}$ eta $\vec{v}$ bektoreak linealki menpekoak dira, beraz, $\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{v}$ non $\lambda \in \mathbb{R}$ den. Are gehiago, $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}$.

$\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ eta $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ kontsideratuz, $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{v}$ espresioa lortzen da, espresio honi zuzenaren ekuazio bektoriala esaten zaio.

- <u>Zuzenaren ekuazio parametrikoak</u>

Zuzenaren ekuazio bektorialean bektore bakoitzaren ordez bere koordenatuak jarriz gero, zuzenaren ekuazio parametrikoak lortzen dira:

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ non } \lambda \in \mathbb{R} \text{ den}$$

- <u>Zuzenaren ekuazio jarraitua</u>

Ekuazio parametrikoetan λ parametroa bakantzean ondorengoa lortzen da:

$$\lambda = \frac{x - p_1}{v_1} \ ; \ \lambda = \frac{y - p_2}{v_2} \ ; \ \lambda = \frac{z - p_3}{v_3}$$

Espresio hauek berdinduz zuzenaren ekuazio jarraitua lortzen da:

$$r : \frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}$$

Izendatzaileren bat nulua denean adierazpen honek zentzu sinbolikoa du, izan ere, izendatzaileak norabide bektorearen koordenatuak dira.

- <u>Zuzenaren ekuazio inplizituak</u>

Ekuazio jarraituetatik edozein bi berdintza kontsideratuz:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \Rightarrow v_2\left(x - p_1\right) = v_1\left(y - p_2\right)$$

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{z - p_3}{v_3} \Rightarrow v_3\left(x - p_1\right) = v_1\left(z - p_3\right)$$

Ondorengo ekuazio linealetako sistema osatzen da

$$\begin{cases} v_2 x - v_1 y + \left(p_2 v_1 - p_1 v_2\right) = 0 \\ v_3 x - v_1 z + \left(p_3 v_1 - p_1 v_3\right) = 0 \end{cases}$$

Era orokorrean adieraziz, ekuazio inplizituak lortzen dira:

$$r : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Kasu berezi bezala, plano koordenatuekiko eta koordenatu-ardatzekiko paraleloak diren zuzen batzuen ekuazioak zehazten dira:

Plano koordenatuekiko paraleloak diren zuzenen ekuazioak

XOY planoarekiko paraleloa den zuzena $r: \begin{cases} Ax + By + D = 0 \\ z = kte \end{cases}$

XOZ planoarekiko paraleloa den zuzena $r: \begin{cases} Ax + Cz + D = 0 \\ y = kte \end{cases}$

YOZ planoarekiko paraleloa den zuzena $r: \begin{cases} By + Cz + D = 0 \\ x = kte \end{cases}$

Koordenatu-ardatzekiko paraleloak diren zuzenen ekuazioak

OX ardatzarekiko paraleloa den zuzena $r: \begin{cases} y = kte \\ z = kte \end{cases}$

OY ardatzarekiko paraleloa den zuzena $r: \begin{cases} x = kte \\ z = kte \end{cases}$

OZ ardatzarekiko paraleloa den zuzena $r: \begin{cases} x = kte \\ y = kte \end{cases}$

► *1 Adibidea (A)*

$A = (5,4,2)$ eta $B = (1,6,4)$ puntuetatik igarotzen den zuzenaren ekuazioak lortu.

Ebazpena: Zuzenaren norabide bektorea $\vec{v} = B - A = (-4,2,2)$ da, ondorioz

- Ekuazio bektoriala

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Ekuazio parametrikoak

$$\begin{cases} x = 5 - 4\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

- Ekuazio jarraitua

$$\frac{x-5}{-4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{2}$$

- Ekuazio inplizituak

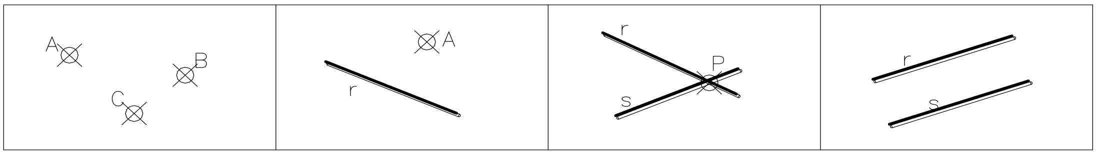
Ekuazio jarraituetatik bi berdintza hartuz, adibidez:

$$\frac{x-5}{-4} = \frac{y-4}{2} \rightarrow x + 2y - 13 = 0 \text{ eta } \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{2} \rightarrow y - z - 2 = 0$$

Hortaz, ekuazio inplizituak $\begin{cases} x + 2y = 13 \\ y - z = 2 \end{cases}$ dira

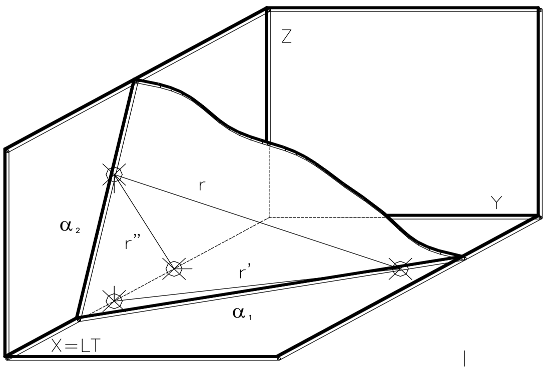
1.4.M - Planoa

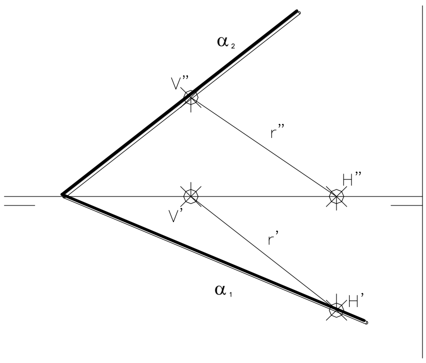
Planoa definitzeko era desberdinak daude:
a) Lerrokatuta ez dauden hiru puntuz
b) Zuzen bat eta zuzen horretatik kanpo dagoen puntu batez.
c) Elkar ebakitzen duten bi zuzenez.
d) Bi zuzen paraleloz.



Sistema Diedrikoan planoak era bitan adierazten dira:

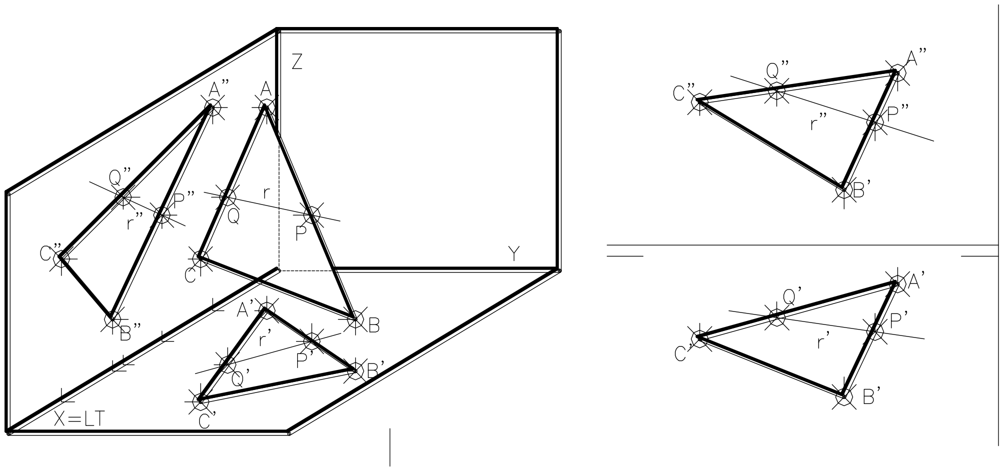
a. Planoaren traza horizontala eta bertikala (α_1, α_2) erabiliz, traza hauek planoak bi proiekzio-planoekin (XY eta XZ) ebakitzean sortzen dituen zuzenak dira.





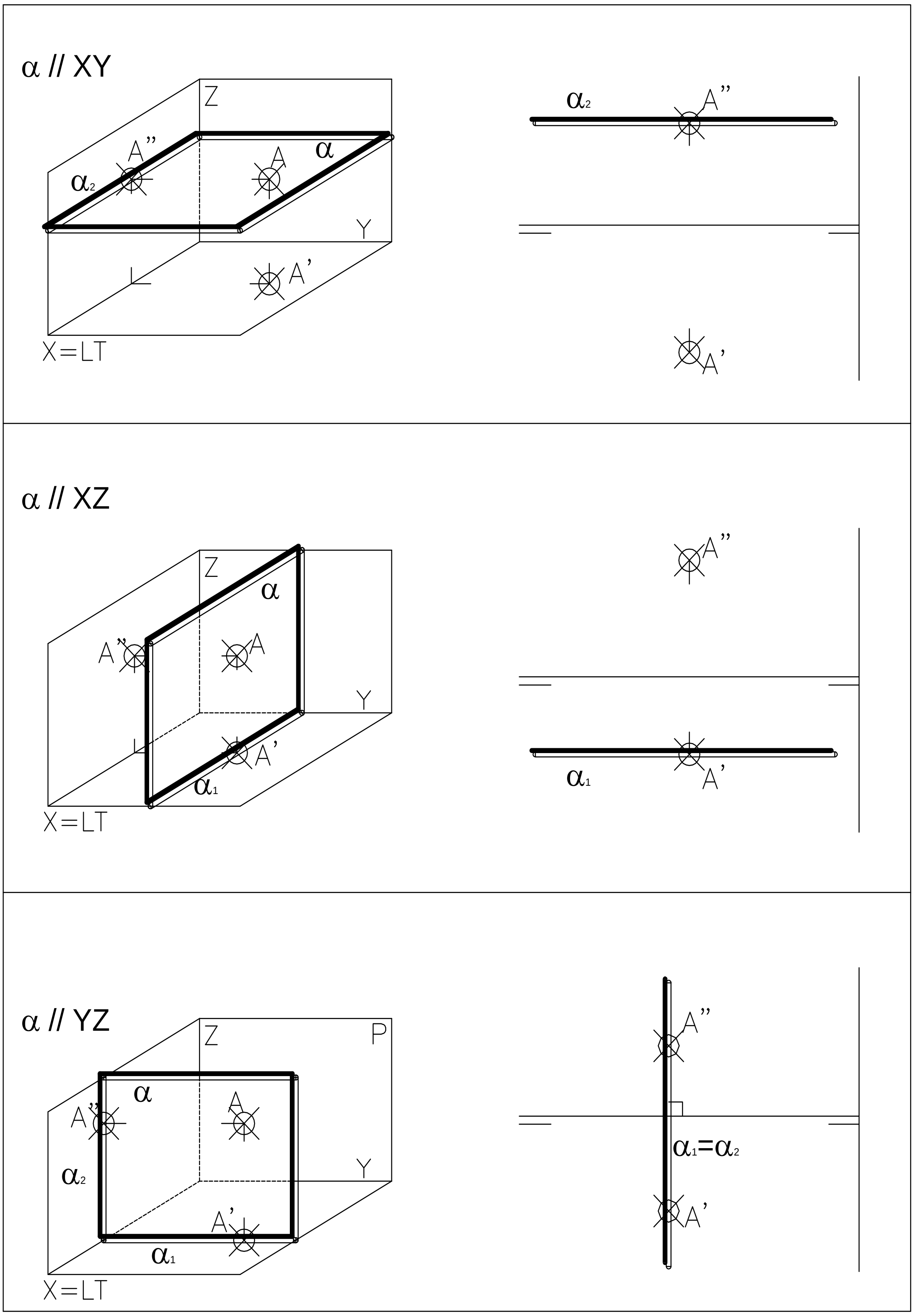
Planoaren barnean kokatuta dauden zuzenen trazak, planoaren trazetan egongo dira.

b. Hiru puntu (edo elkar ebakitzen duten bi zuzen) erabiliz:



Plano batean kokatuta dauden zuzenek, plano berean dauden beste bi zuzen ebakitzen dituzte, gutxienez.

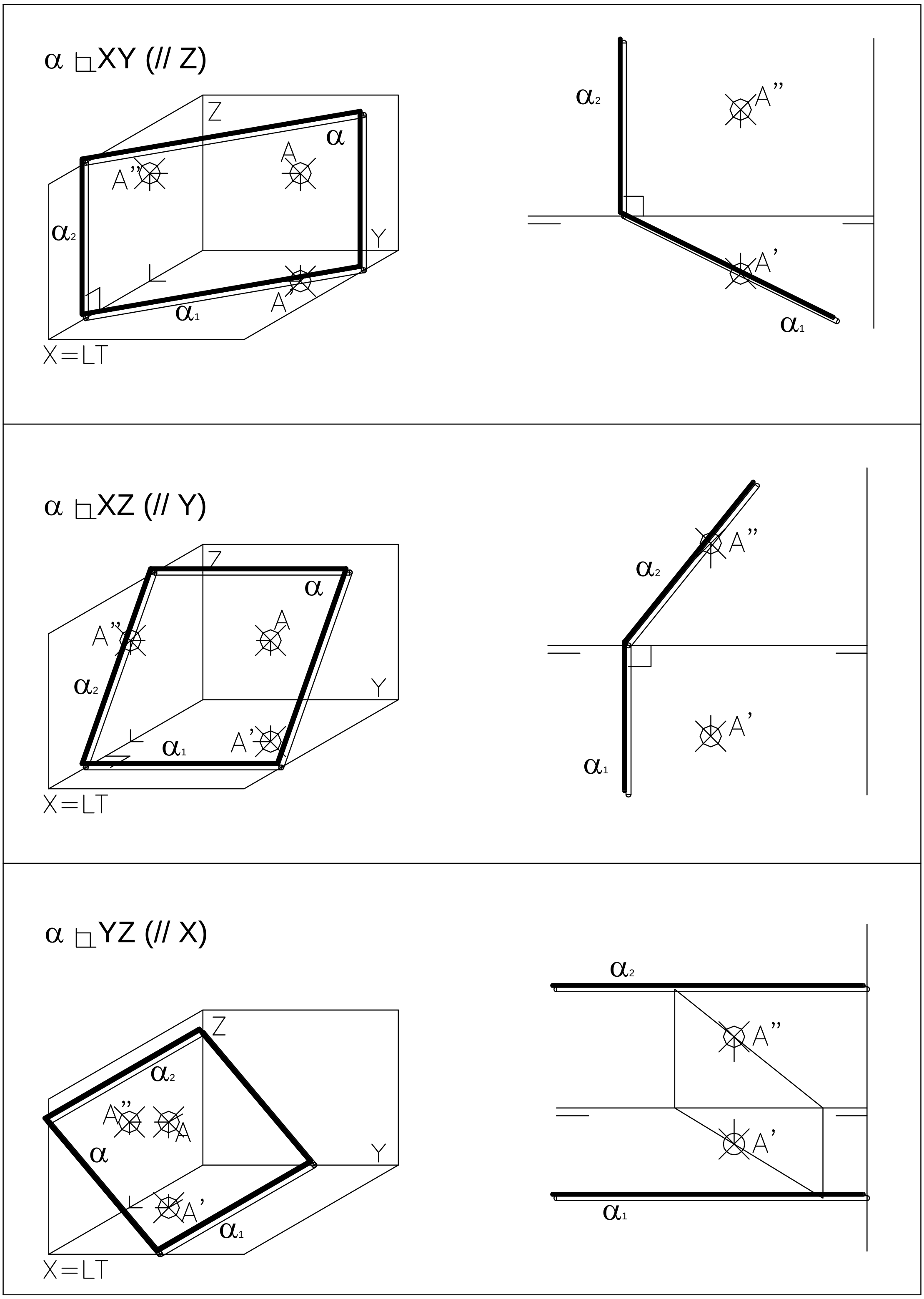
Proiekzio planoekiko paraleloak diren planoek hurrengo ezaugarria dute: planoan kokatutako puntu guztien koordenatu bat konstantea da. PH-arekiko paraleloa bada, puntu guztiek kota berbera dute, PB-arekiko paraleloa bada puntu guztiek urrunera berbera dute, eta PP-arekiko paraleloa bada, PP planora dagoen distantzia konstantea da.



Plano bat koordenatu-ardatz batekiko paraleloa bada, plano koordenatu batekiko (proiektatzaile) elkarzuta da.

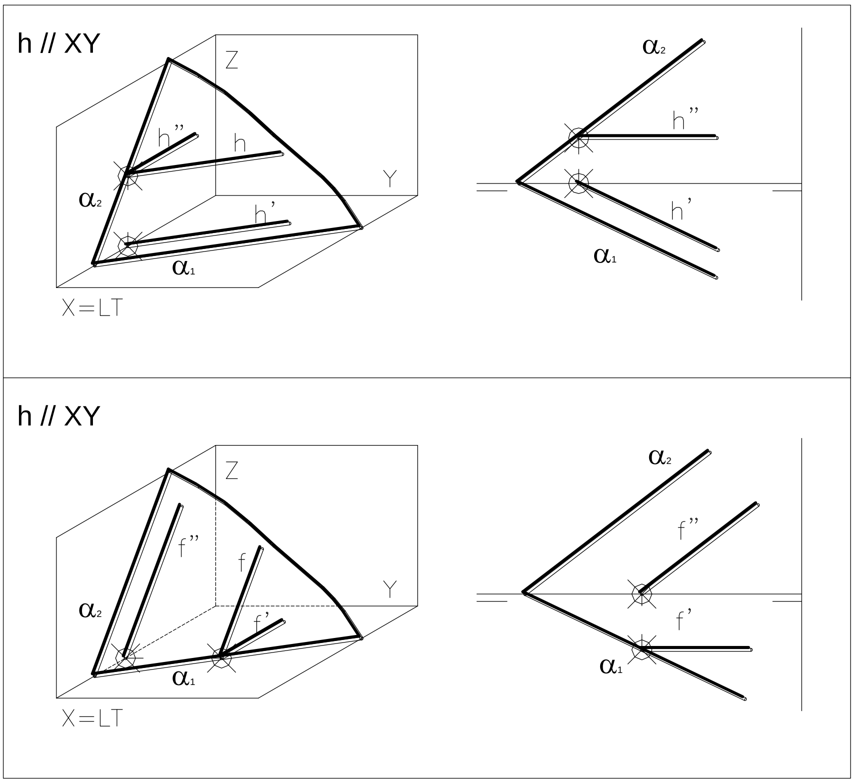
Ardatza Z bada, proiektatzaile horizontala da, ardatza Y bada, proiektatzaile bertikala da, eta azkenik, ardatza X bada profileko proiektatzailea da.

Hurrengo irudian hiru kasuak agertzen dira.



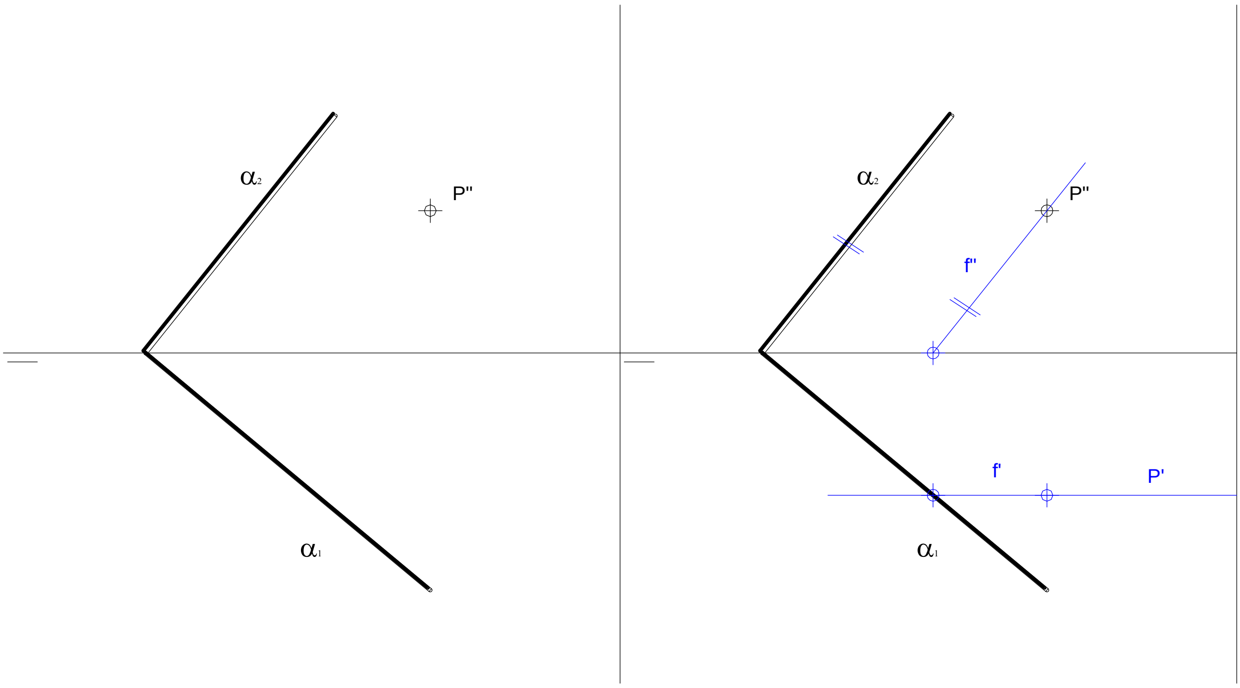
Planoak barnean dituen infinitu zuzenen artean batzuk planoa sistema diedrikoan definitzeko garrantzitsuak dira: zuzen frontalak (PB-arekiko paraleloak), eta zuzen horizontalak (PH-arekiko paraleloak), hain zuzen ere.

Zuzen hauen proiekzio bat planoaren traza batekiko paraleloa da (h’ horizontala a_1 –ekiko // da, eta f” frontala a_2 –rekiko paraleloa da)



► *2 Adibidea (M):*

Traza ezazu P puntutik planoko zuzen frontal bat. Falta den P puntuaren proiekzioa lortu.



1.5.A - Planoa

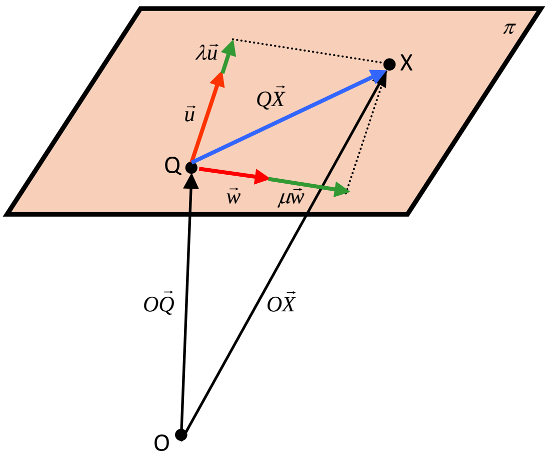
Espazioan plano bat definitzeko planoko puntu bat eta bi norabide behar dira. Norabide horiek planoak barnean dituen edozein bi bektore linealki independente izan daitezke, eta planoaren bektore zuzentzaileak deritze.

$R=\{O\ ;\ \vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ erreferentzia sisteman, $Q=(q_1,q_2,q_3)$ puntutik igaro eta $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ eta $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ bektore zuzentzaileak dituen π planoa zenbait era desberdinetan adieraz daiteke:

- Planoaren ekuazio bektoriala

  Irudian ageri den bezala, π planoko X edozein puntu emanda, $\overrightarrow{QX}$ bektorea $\vec{u}$ eta $\vec{w}$ bektoreen konbinazio lineala da, ondorioz, $\overrightarrow{QX}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{w}$ non $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ diren. Are gehiago, $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QX}$.

  $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$ eta $\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$ eginez gero, $\vec{x}=\vec{q}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{w}$ lortzen da, planoaren ekuazio bektoriala bezala ezagutzen den espresioa.



- Planoaren ekuazio parametrikoak

  Planoaren ekuazio bektorialean bektore bakoitza bere koordenatuengatik ordezkatuz gero, planoaren ekuazio parametrikoak lortzen dira:

$$\pi:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$$

- Planoaren ekuazio inplizitua

  Ekuazio parametrikoak bi ezezagun dituen ekuazio-sistema bat bezala kontsideratuz:

$$\begin{cases}x-q_1=u_1\lambda+w_1\mu\\y-q_2=u_2\lambda+w_2\mu\\z-q_3=u_3\lambda+w_3\mu\end{cases}$$

Sistema hau bateragarri determinatua izateko, hurrengoa bete behar da:

$$\begin{vmatrix} x-q_1 & y-q_2 & z-q_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{edo} \quad \begin{vmatrix} x-q_1 & u_1 & w_1 \\ y-q_2 & u_2 & w_2 \\ z-q_3 & u_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Aurreko edozein determinante garatuz ondorengo eran adieraz daitekeen π planoaren ekuazio inplizitua lortzen da:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

- <u>Puntu bat barne duen planoaren ekuazioa</u>

Planoren bektore normala edo bektore elkartua (planoarekiko elkarzuta den bektorea), $\vec{n} = (A, B, C)$, eta planoak barne duen puntu bat, $P = (x_0, y_0, z_0)$, ezagutzen badira, planoaren ekuazioa hurrengo eran kalkula daiteke:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Kasu berezi bezala, erreferentzi ardatzekiko eta plano koordenatuekiko plano batzuen ekuazioak zehazten dira:

<u>Plano koordenatuekiko paraleloak diren planoen ekuazioak</u>

XOY planoarekiko paraleloa den planoa $\Rightarrow z = kte$

XOZ planoarekiko paraleloa den planoa $\Rightarrow y = kte$

YOZ planoarekiko paraleloa den planoa $\Rightarrow x = kte$

<u>Koordenatu-ardatzekiko paraleloak diren planoen ekuazioak</u>

OX ardatzarekiko paraleloa den planoa $\Rightarrow By + Cz + D = 0$

OY ardatzarekiko paraleloa den planoa $\Rightarrow Ax + Cz + D = 0$

OZ ardatzarekiko paraleloa den planoa $\Rightarrow Ax + By + D = 0$

► ***3 Adibidea (A)***

$A = (5,4,2)$, $B = (1,6,4)$ eta $C = (4,2,5)$ puntuak barne dituen planoaren ekuazioa lortu.

Ebazpena: Planoaren bektore zuzentzaileak $\vec{u} = B - A = (-4,2,2)$ eta $\vec{w} = B - C = (3,-4,1)$ dira.

- Ekuazio bektoriala

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Ekuazio parametrikoak

$$\begin{cases} x = 5 - 4\lambda + 3\mu \\ y = 4 + 2\lambda - 4\mu \\ z = 2 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$

- Ekuazio inplizitua

$\begin{vmatrix} x-5 & y-4 & z-2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ berdintza ebatziz lortzen da.

Beraz, ekuazio inplizitua $x + y + z = 11$ da.

- Ekuazio normala

Planoren bektore normala, bi bektore zuzentzaileen biderkadura bektoriala eginez lortzen da $\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$, ondorioz $\vec{n} = (10,10,10)$ edo gauza bera dena $\vec{n} = (1,1,1)$ izango da planoaren bektore normala, bektore biek norabide bera baitute.

Planoko puntu bat ezagutzen denez, adibidez, $A = (5,4,2)$, ekuazio normala hurrengoa izango da:

$$1 \times (x-5) + 1(y-4) + 1(z-2) \Rightarrow x + y + z - 11 = 0$$