CINEMÁTICA DE MECANISMOS

Ejercicios resueltos de autoevaluación

Itziar Martija López

Maider Loizaga Garmendia

Departamento de Ingeniería Mecánica

Mekanika Ingeniaritza Saila

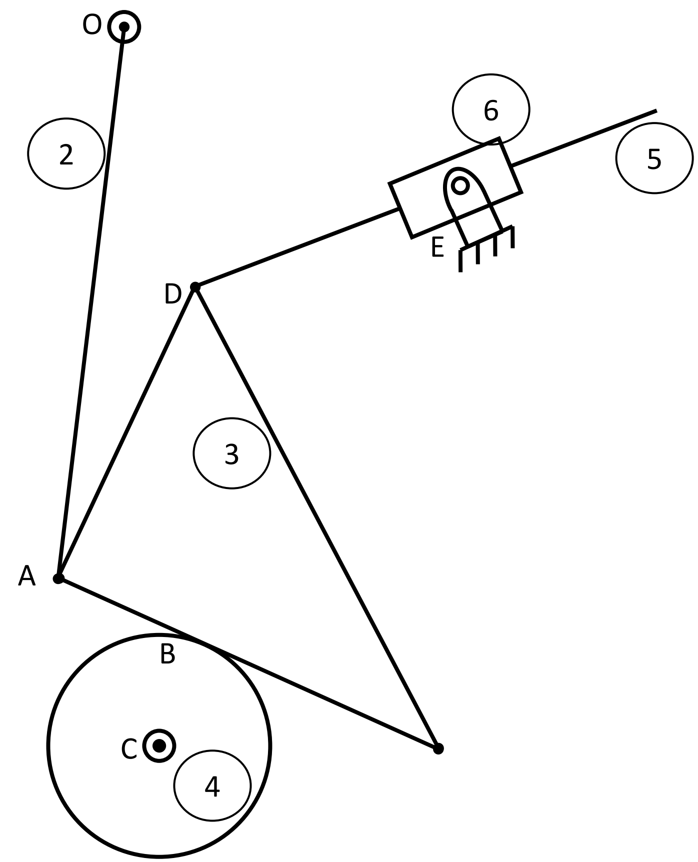
ÍNDICE

Ejercicio 1

En el mecanismo de la figura y para la posición indicada realiza un análisis estructural, indicando tipos de elementos, pares, y calcula los grados de libertad.

El mecanismo está accionado por la barra 2, que gira con velocidad angular constante, y en el punto B hay rodadura pura

$$\vec{\omega}_2 = 0{,}5\vec{k}\ rad/s \quad \overline{OA} = 7\ m$$



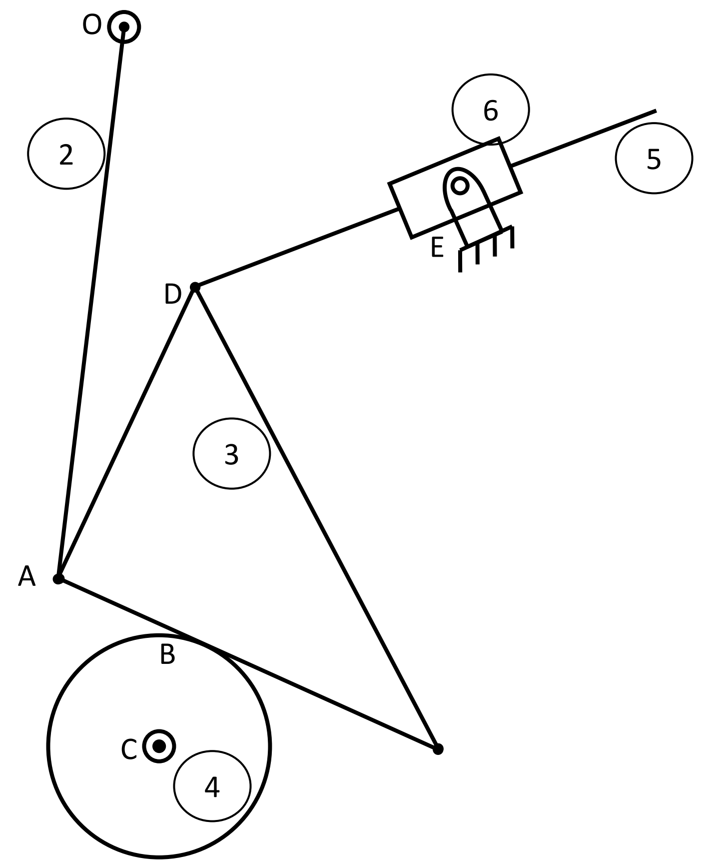
Se pide obtener:

- Los polos de todos los elementos respecto al fijo
- Las velocidades de todos los puntos y elementos indicados, empleando los CIR.

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

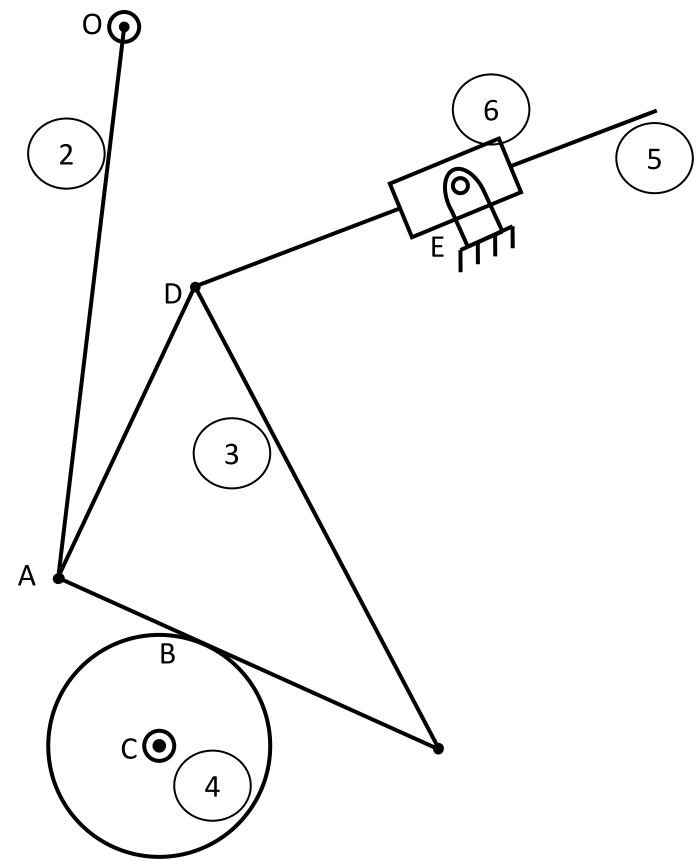
Ejercicio 1: tipos de elementos

Elto.	Nº pares	Movimiento
1	Ternario (Unido a 2, 4 y 6)	Elemento fijo
2	Binario (1 y 3)	Manivela
3	Ternario (2, 4 y 5)	Biela
4	Binario (1 y 3)	Manivela (o balancín)
5	Binario (3 y 6)	Biela
6	Binario (1 y 5)	Balancín



Ejercicio 1: tipos de pares

Par	Nº elementos	Clase	Movimiento
O	Binario (Une a 1 y 2)	I	Rotación
A	Binario (2 y 3)	I	Rotación
B	Binario (3 y 4)	II	Leva
C	Binario (1 y 4)	I	Rotación
D	Binario (3 y 5)	I	Rotación
E	Binario(5 y 6)	I	Prismático
E	Binario (1 y 6)	I	Rotación

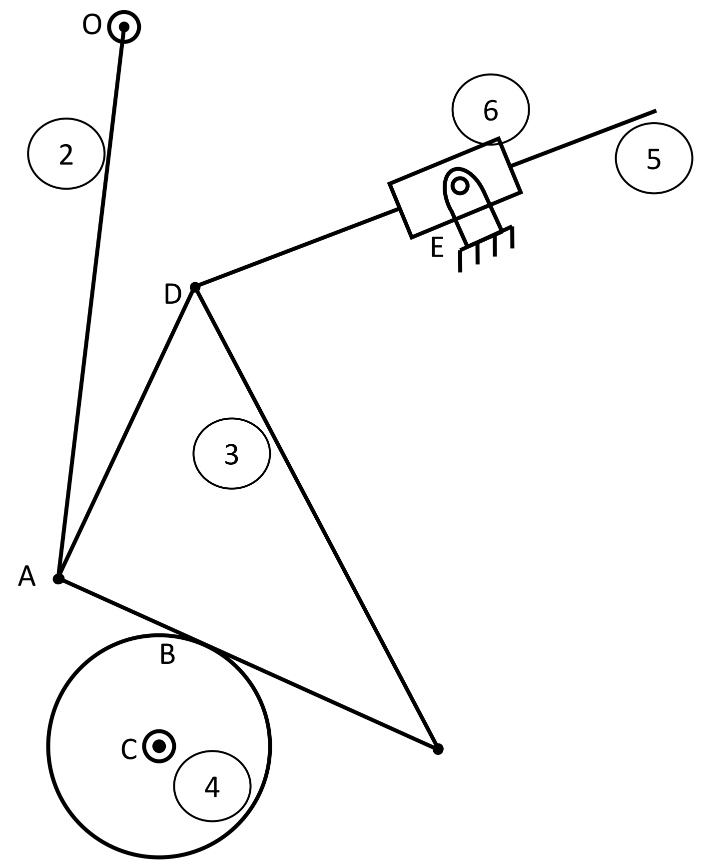


Ejercicio 1: Grados de libertad

Para determinar el número de grados de libertad aplicaremos el criterio de Grübler:

- Elementos N=6
- Pares P_I=6
  - ✓Pares de rotación: 1-2 (en O); 2-3 (en A); 1-4 (en C); 3-5 (en D); y 1-6 (en E) .
  - ✓Pares prismáticos: 5-6 (en E)
- Pares P_{II}=1
  - ✓Pares de leva: 3-4 (en B);
  - ✓Dos condiciones de rodadura pura (restringido el deslizamiento)

$$\mathbf{G}=3(N-1)-2*P_I-P_{II}-\mathbf{1rod}=3*5-2*6-1-1=$$
$$=15-12-1-1=\mathbf{1\ gdl}$$



Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

Ejercicio 1: Cálculo de los polos

Localizamos los polos primarios:

Los pares de rotación:

- ✓ P12 (O); P23 (A); P14 (C); P35 (D); P16(E);

Los puntos del infinito en los pares prismáticos:

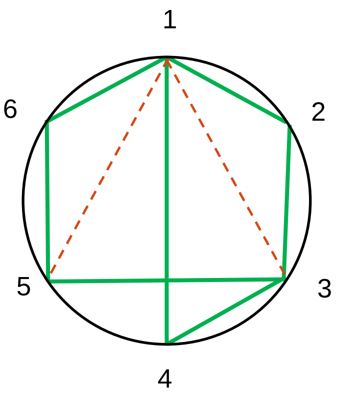
- ✓ $P^{\infty}56$

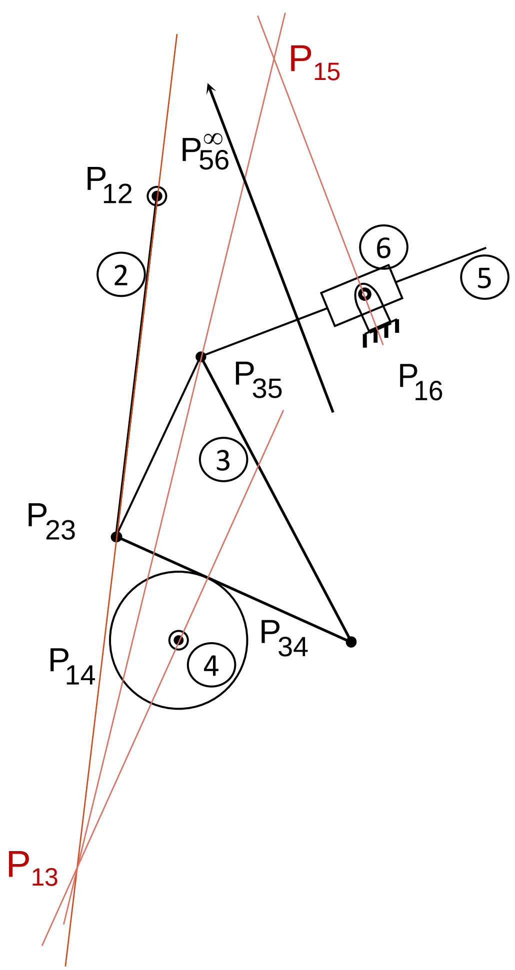
Los pares de leva, por haber rodadura pura :

- ✓ P34 (B)

$$P13 \begin{cases} P12, P23 \\ P14, P34 \end{cases}$$

$$P15 \begin{cases} P13, P35 \\ P16, P56 \end{cases}$$





Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

Ejercicio 1: Cálculo de velocidades

$\vec{\omega}_2 = 0{,}5\vec{k}\ rad/s \qquad \overline{OA} = 7\ m$

$\overrightarrow{\omega_5} = \overrightarrow{\omega_6}; \overrightarrow{v_{E5}} \neq \overrightarrow{v_{E6}}$

$v_A = \omega_2 \cdot \overline{OA} = 0{,}5 \cdot 7 = 3{,}5\, m/s$

$\omega_3 = v_A / \overline{P_{13}A} = 3{,}5/6{,}75 = 0{,}52\, rad/s;\ \vec{\omega}_3 = -0{,}52\vec{k}\ rad/s$

$v_{B3} = \omega_3 \cdot \overline{P_{13}B} = 0{,}52 \cdot 6{,}4 = 3{,}32\, m/s$

$\overrightarrow{v_{B3}} = \overrightarrow{v_{B4}}$

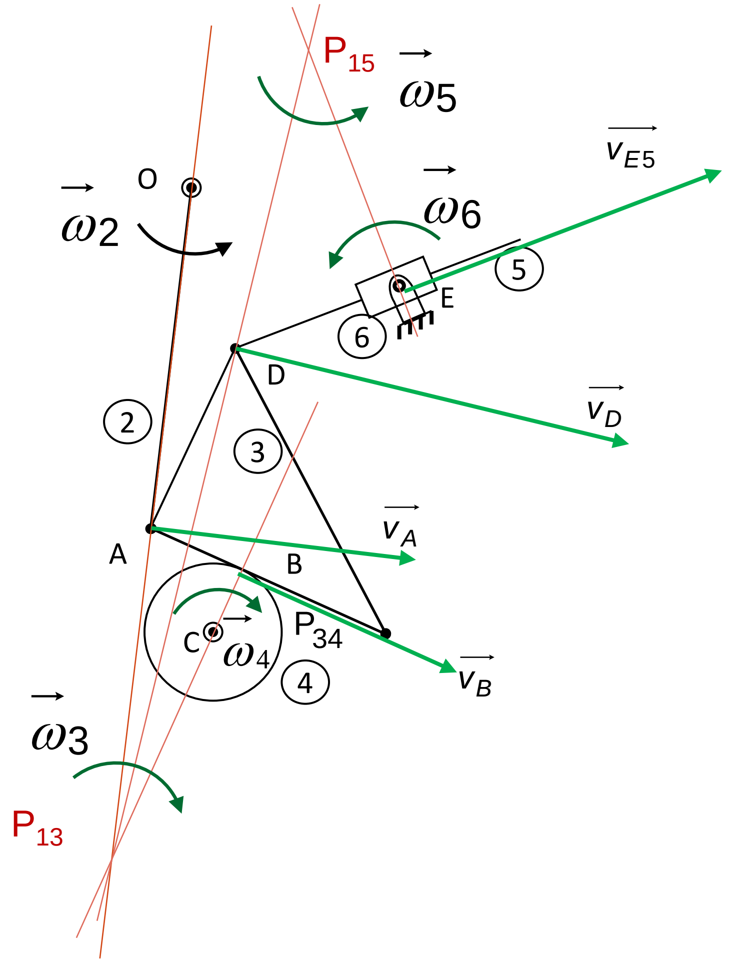
$\omega_4 = v_{B4} / \overline{CB} = 3{,}32/1{,}45 = 2{,}3\, rad/s;\ \vec{\omega}_4 = -2{,}3\vec{k}\ rad/s$

$v_D = \omega_3 \cdot \overline{P_{13}D} = 0{,}52 \cdot 10{,}7 = 5{,}54\, m/s$

$\omega_5 = v_D / \overline{P_{15}D} = 5{,}54/6{,}4 = 0{,}86\, rad/s;$

$\vec{\omega}_5 = \vec{\omega}_6 = 0.86\vec{k}\ rad/s$

$v_{E5} = \omega_5 \cdot \overline{P_{15}E} = 0{,}86 \cdot 5{,}2 = 4{,}5\, m/s$



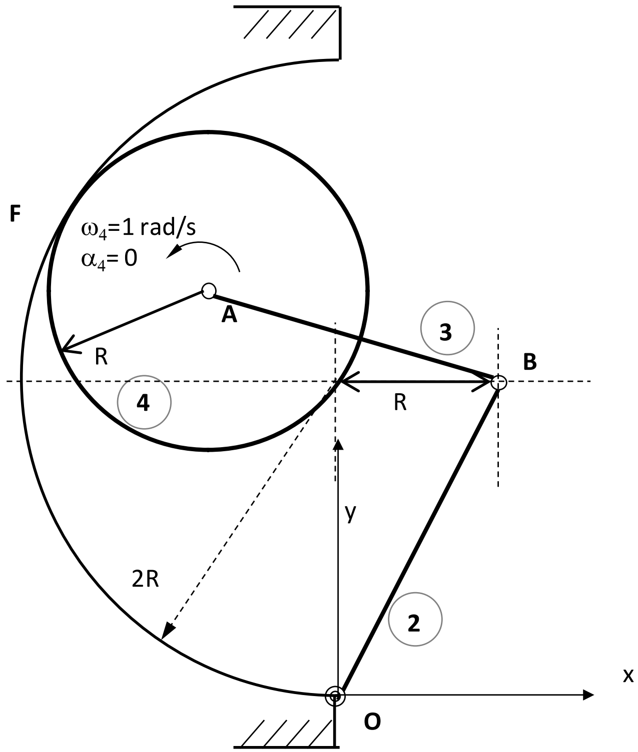
Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia

Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

Ejercicio 2

En el mecanismo de la figura, en el punto F hay rodadura pura. **Explicando en qué construcción o teorema te basas**, se pide obtener para la barra AB:

- El **polo, la velocidad de A y la velocidad de B.**
- El **centro de curvatura de la trayectoria de B** y la **tangente polar**
- La **velocidad de sucesión**, las **circunferencias de inflexiones y de Bresse,** y el **polo de aceleraciones**.
- Obtener las aceleraciones de los puntos A, B y F.



Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

Ejercicio 2 : obtención del polo P, de $\mathbf{v}_A$ y de $\mathbf{v}_B$

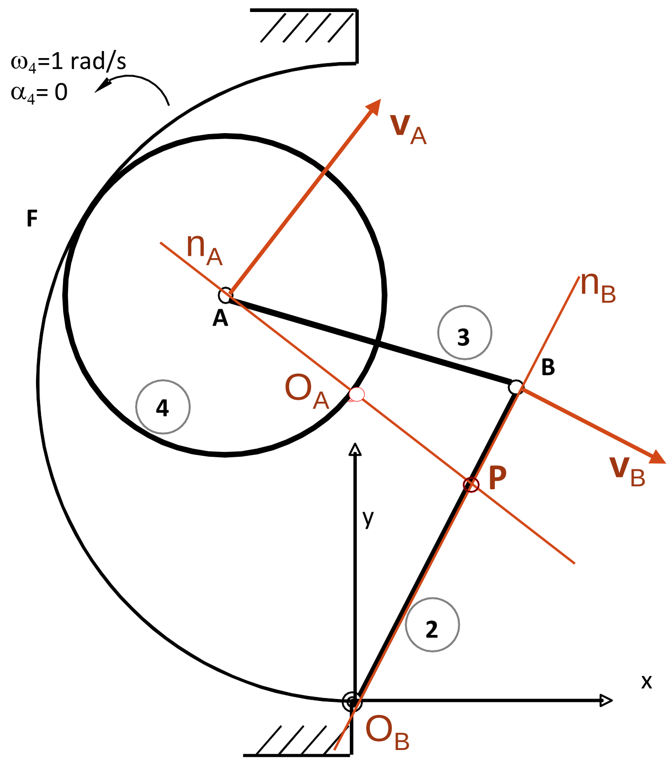
- Sabiendo que el punto A describe una trayectoria circular de centro conocido, conocemos el centro de curvatura de su trayectoria O_A, y la normal del punto, n_A.
- El centro de curvatura de la trayectoria de B es O, ya que B pertenece a la barra 2 y O es un punto fijo. Así tenemos la normal en B, n_B.
- En la intersección de n_A y n_B se encuentra el CIR (P) de la biela AB del mecanismo.

$$v_A = \omega_4 \cdot R = 1 \cdot R = R\, m/s$$

$$\omega_3 = R/2R = 0{,}5\, rad/s;\ \vec{\omega}_3 = 0{,}5\vec{k}\ rad/s$$

$$v_B = \omega_3 \cdot \overline{PB} = 0{,}5 \cdot 2R/3 = R/3\ m/s$$

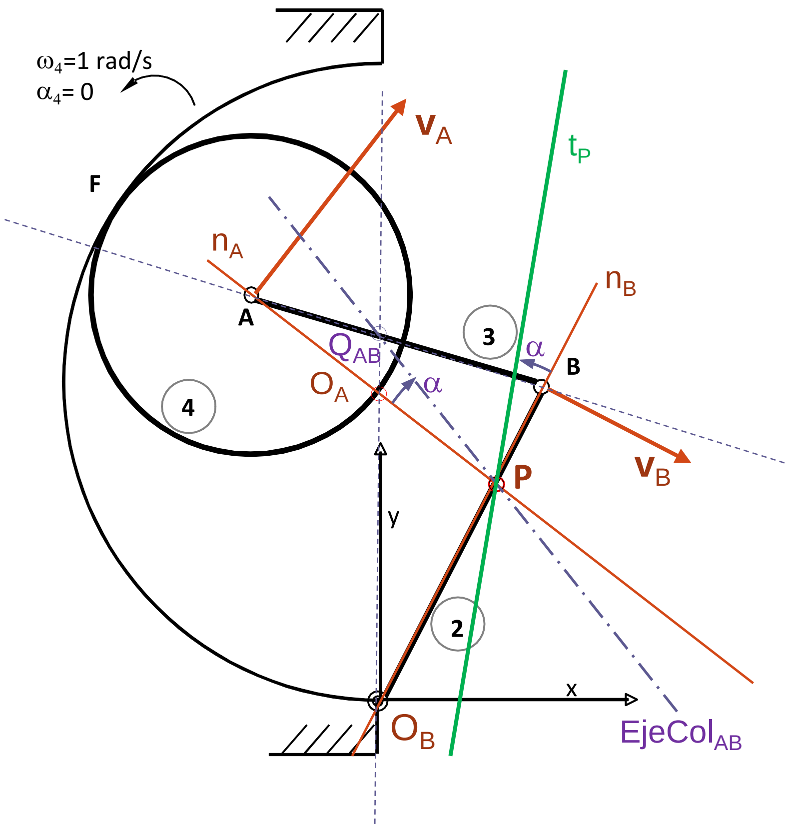
$$\omega_4 = \frac{R/3}{2R\sqrt{2}} = \sqrt{2}/12\ rad/s;\ \vec{\omega}_4 = -\sqrt{2}/12\,\vec{k}\ rad/s$$



Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

Ejercicio 2 : obtención de la tangente polar

- Mediante la construcción gráfica basada en el teorema de Hartmann obtenemos el punto Q_{AB}, que unido a P nos proporciona el eje de colineación.
- Basándonos en el teorema de Bobillier obtenemos la tangente polar.

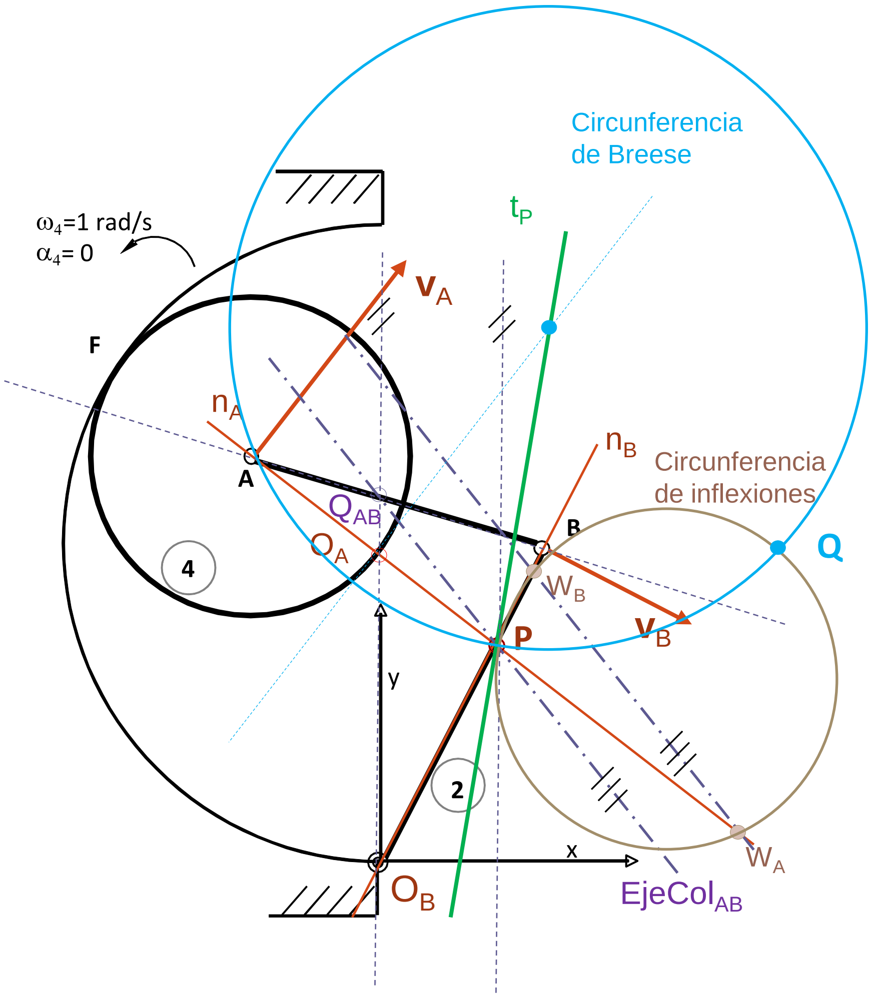


Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia

Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

Ejercicio 2 : obtención de las circunferencias

- Mediante la construcción gráfica basada en la fórmula de Euler-Savary obtenemos W_A y W_B, puntos de la circunferencia de inflexiones.
- Con P, W_A y W_B dibujamos la circunferencia de inflexiones
- Sabiendo que ω_4 es constante y, por tanto, que A es un punto de la circunferencia de Bresse, que P pertenece a dicha circunferencia y que su centro está en la tangente polar, podemos dibujar la circunferencia.
- En la intersección de ambas circunferencias se encuentra el Polo de Aceleraciones (Q).



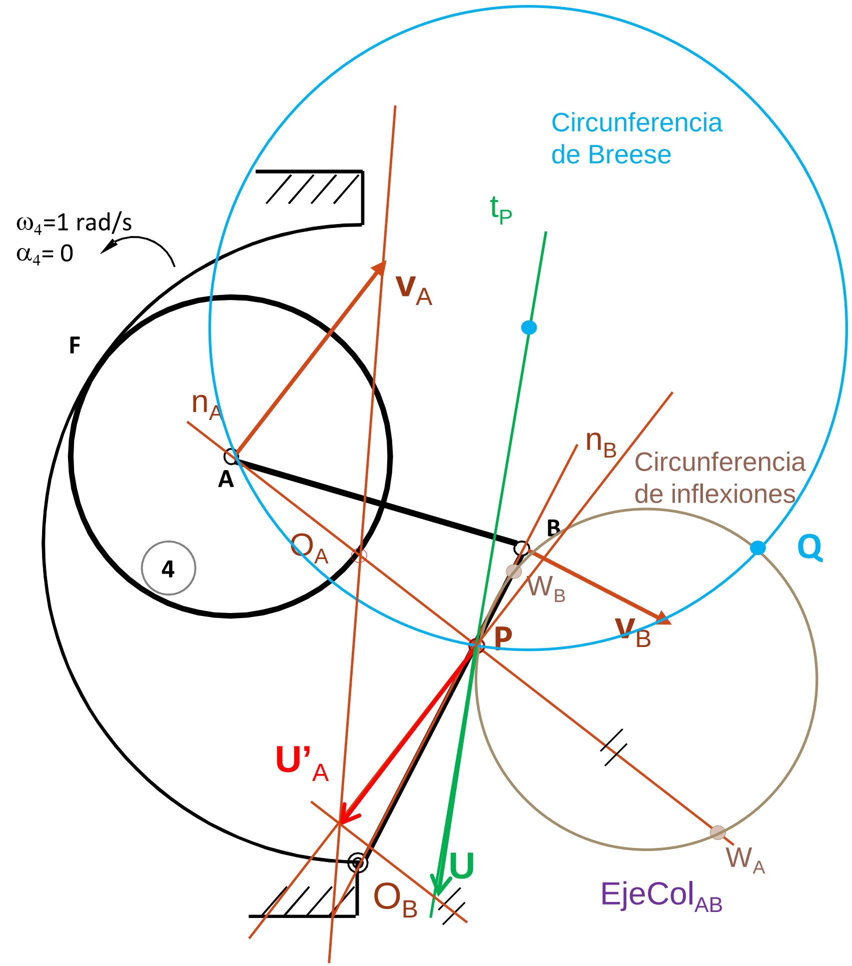
Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia

Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

Ejercicio 2 : obtención de la velocidad de sucesión

- Por el teorema de Hartmann sabemos que el extremo de la velocidad de A, el centro de curvatura de la trayectoria de A y el extremo de la componente paralela a la velocidad de A de la velocidad de sucesión, están alineados.
- Así hallamos $\vec{u}'_A$
- Desproyectando esta componente sobre la tangente polar, hallamos la velocidad de sucesión

$$\vec{u}$$



Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

Ejercicio 2 : obtención de las aceleraciones

- El punto A describe una trayectoria circular con velocidad angular constante por pertenecer al rodillo 4.

$$\underset{?}{\overset{?}{\vec{a}_A}} = \underset{//AF}{\overset{\omega_4^2 R}{\vec{a}_A^N}} + \underset{\perp AF}{\overset{0}{\vec{a}_A^T}}$$

$$a_A = R\ m/s^2$$

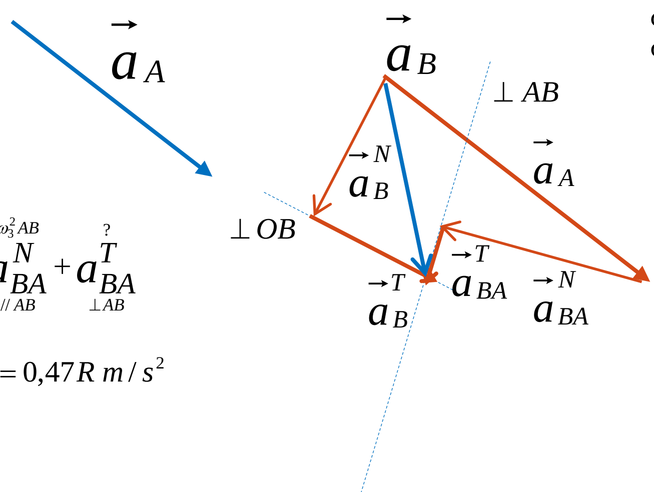
$$\underset{?}{\overset{?}{\vec{a}_B}} = \underset{//OB}{\overset{\omega_2^2 R}{\vec{a}_B^N}} + \underset{\perp OB}{\overset{?}{\vec{a}_B^T}} = \underset{D}{\overset{M}{\vec{a}_A^N}} + \underset{//AB}{\overset{\omega_3^2 AB}{\vec{a}_{BA}^N}} + \underset{\perp AB}{\overset{?}{\vec{a}_{BA}^T}}$$

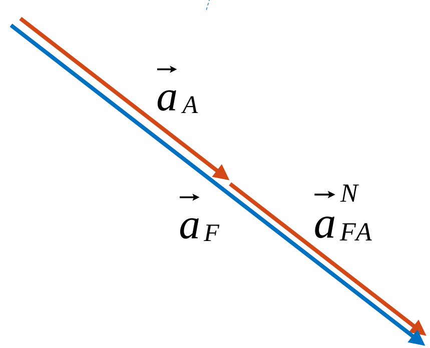
$$a_B^N = \left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2 2R\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}R = 0{,}47R\ m/s^2$$

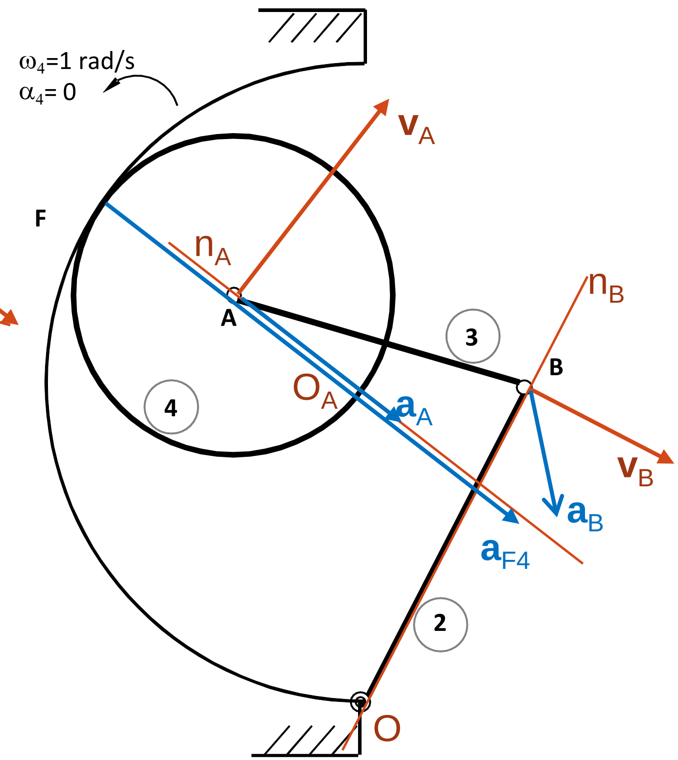
$$a_{BA}^N = 0{,}5^2\ 2R = 0{,}5R\ m/s^2$$

$$\alpha_3 = \frac{a_{BA}^T}{AB}\otimes;\ \alpha_2 = \frac{a_B^T}{OB}\otimes$$

$$\underset{?}{\overset{?}{\vec{a}_F}} == \underset{D}{\overset{M}{\vec{a}_A^N}} + \underset{//AB}{\overset{\omega_4^2 AF}{\vec{a}_{FA}^N}} + \underset{\perp AF}{\overset{0}{\vec{a}_{FA}^T}}$$



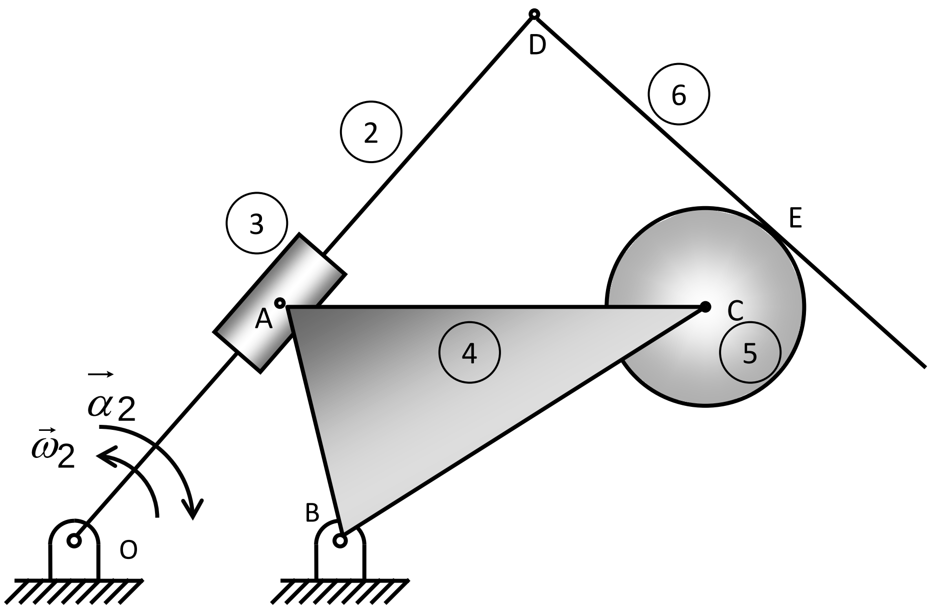




Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

Ejercicio 3

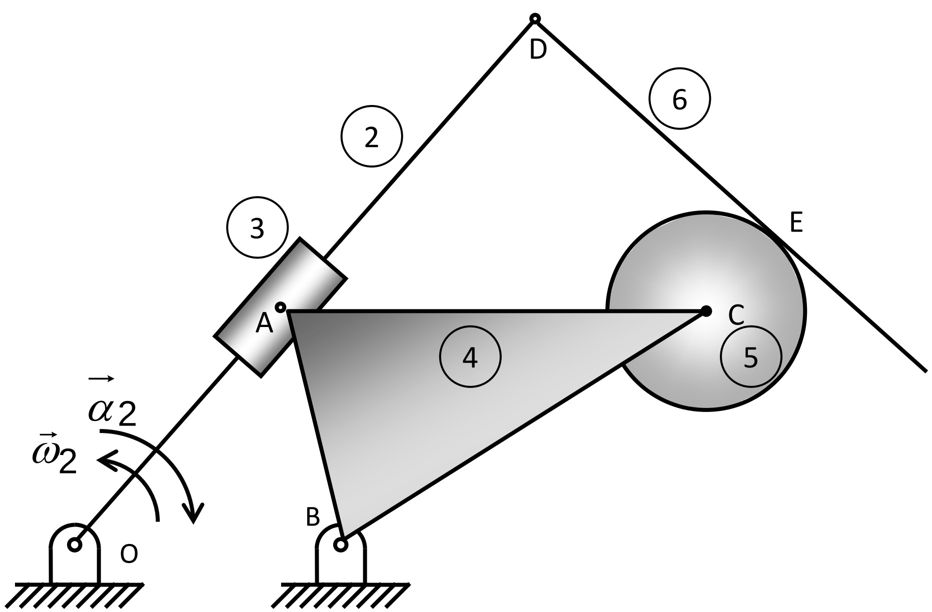
- En el mecanismo de la figura calcula los grados de libertad.
- Calcula las **velocidades y aceleraciones** de los puntos A, C, D y E, así como las **velocidades y aceleraciones angulares** de los elementos, sabiendo que hay rodadura pura en el contacto entre el rodillo 5 y la barra 6, en el punto E.



Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

Ejercicio 3: Grados de libertad

- Grados de libertad: **G**=3(N-1)-2P_I-P_{II}= 3(6-1)-2.6-1-1(rod)=15-12-1-1=**1** grado de libertad
- N=6
- P_I=5r+1p=6. Pares r: O, A (3-4), B, C, D; par p: A (2-3)
- P_{II}=1 en E; y 1 condición de rodadura pura



- En A tenemos A_3 y A_4 con la misma velocidad y aceleración, A_2 tendrá diferente velocidad y diferente aceleración que A_3 y A_4 . Las barras 2 y 3 giran con las mismas velocidad y aceleración angulares. $\boldsymbol{\omega_2 = \omega_3}$, $\boldsymbol{\alpha_2 = \alpha_3}$.
- Para analizar el movimiento del casquillo 3 utilizaremos un sistema de referencia con el origen en O y girando con 2 : SR_O (ω_2, α_2). Con él planteamos el movimiento de A_4.
- Para el análisis de la barra 6 emplearemos SR_D (ω_6, α_6) y plantearemos el movimiento del centro del rodillo C.

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

Ejercicio 3: velocidades

$$\underset{\perp OA}{\overset{\omega_2 OA}{v_{A_2}}} \; ; \; \underset{\perp OD}{\overset{\omega_2 OD}{v_D}}$$

SR$_O$ (ω_2, α_2)

$$\underset{\perp AB}{\overset{?}{v_{A_4} = v_{A_3}}} = \underset{D}{\overset{M}{v_{A_2}}} + \underset{//OA}{\overset{?}{v_r^2}}$$

$$\omega_4 = \frac{v_{A_3}}{AB} \bullet$$

SR$_D$ (ω_6, α_6)

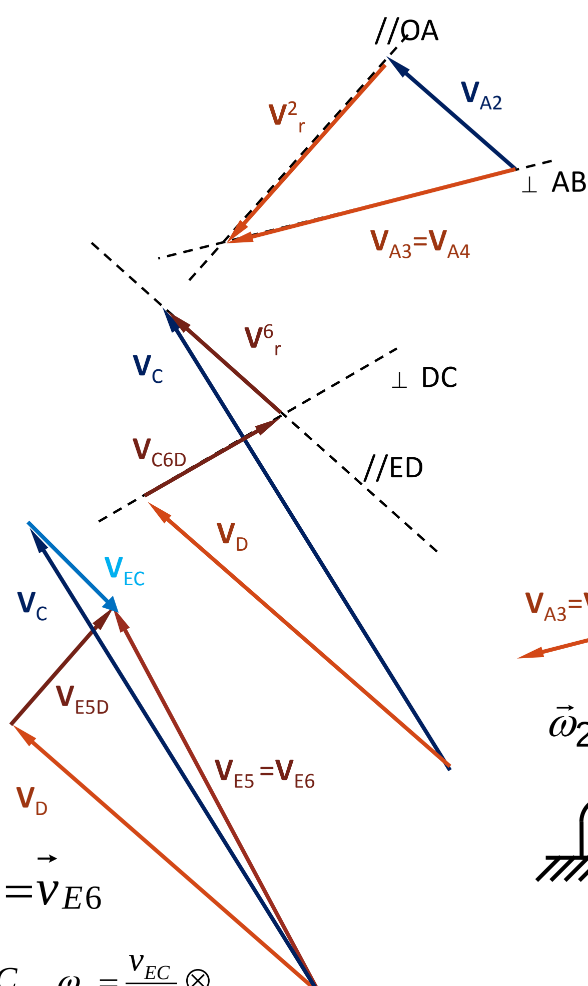
$$\underset{\perp BC}{\overset{\omega_4 BC}{v_C}} = \underset{D}{\overset{M}{v_D}} + \underset{\perp DC}{\overset{?}{v_{C6D}}} + \underset{//DE}{\overset{?}{v_r^6}}$$

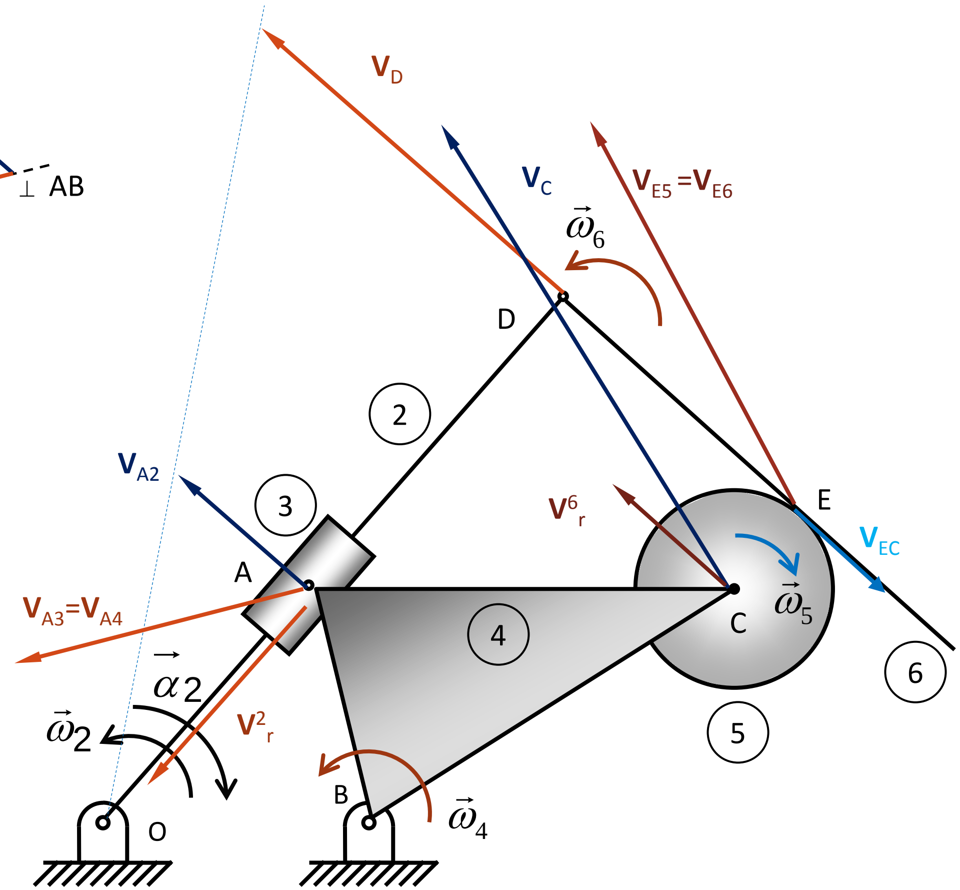
$$\omega_6 = \frac{v_{C6D}}{DC} \bullet$$

$$\underset{?}{\overset{?}{v_{E5}}} = \underset{D}{\overset{M}{v_D}} + \underset{\perp DE}{\overset{\omega 6_2 DE}{v_{E5D}}}$$

Rodadura pura ⇨ $\vec{v}_{E5} = \vec{v}_{E6}$

$$\underset{D}{\overset{M}{v_{E5}}} = \underset{D}{\overset{M}{v_C}} + \underset{D}{\overset{?}{v_{EC}}} \qquad \omega_5 = \frac{v_{EC}}{EC} \otimes$$

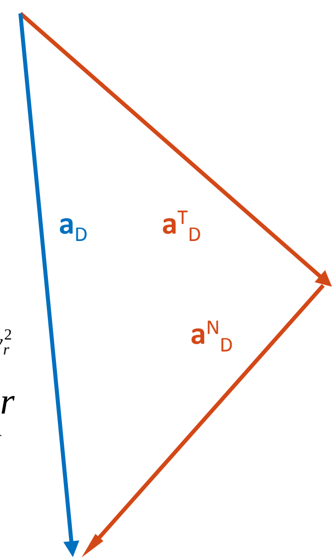


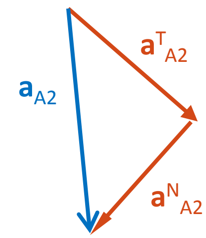


Ejercicio 3: aceleraciones

$$\underset{?}{\overset{?}{a_{A_2}}} = \underset{//OA}{\overset{\omega_2^2 OA}{a_{A2}^N}} + \underset{\perp OA}{\overset{\alpha_2 OA}{a_{A2}^T}} \quad ; \underset{?}{\overset{?}{a_D}} = \underset{//OD}{\overset{\omega_2^2 OD}{a_D^N}} + \underset{\perp OD}{\overset{\alpha_2 OD}{a_D^T}}$$

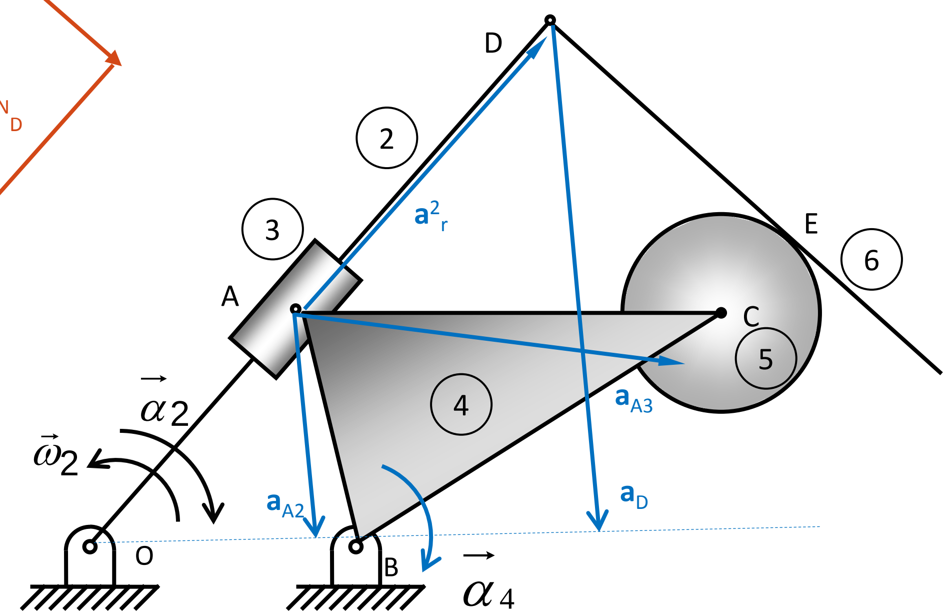
SR_O (ω_2, α_2)

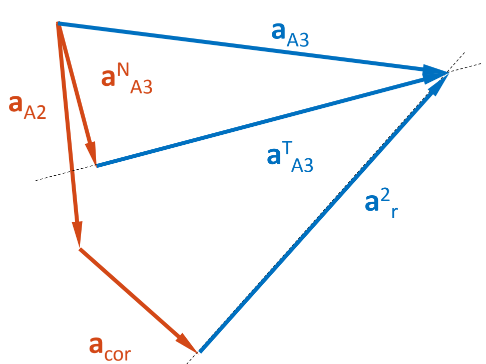




$$a_{A4} = a_{A3} = \underset{//AB}{\overset{\omega_4^2 AB}{a_{A3}^N}} + \underset{\perp AB}{\overset{?}{a_{A3}^T}} = \underset{D}{\overset{M}{a_{A2}}} + \underset{//OA}{\overset{?}{a_r^2}} + \underset{\perp OA}{\overset{2\omega_2 \times v_r^2}{a_{cor}}}$$

$$\alpha_4 = \frac{a_{A3}^T}{AB} \otimes$$





Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

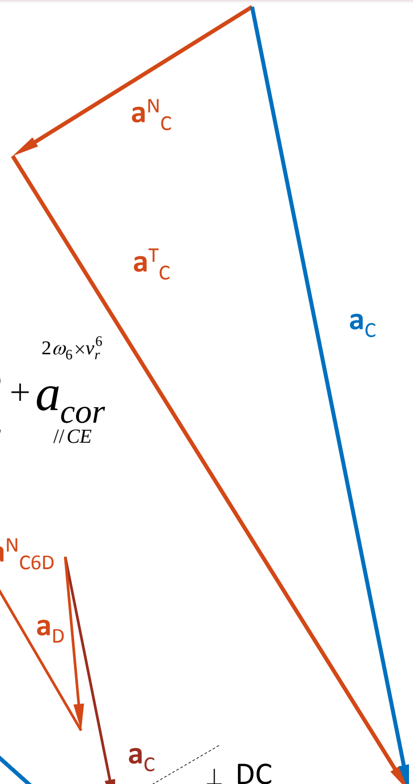
Ejercicio 3: aceleraciones

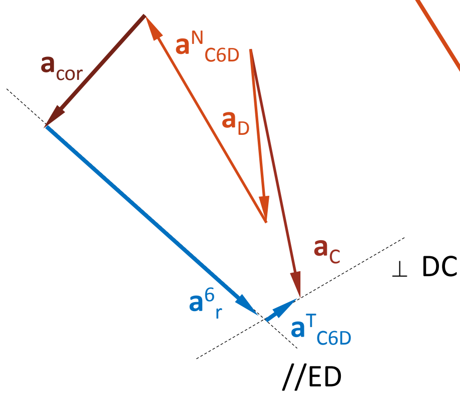
$$\underset{?}{\overset{?}{a_C}} = \underset{//BA}{\overset{\omega_4^2 BC}{a_C^N}} + \underset{\perp BA}{\overset{\alpha_4 BC}{a_C^T}}$$

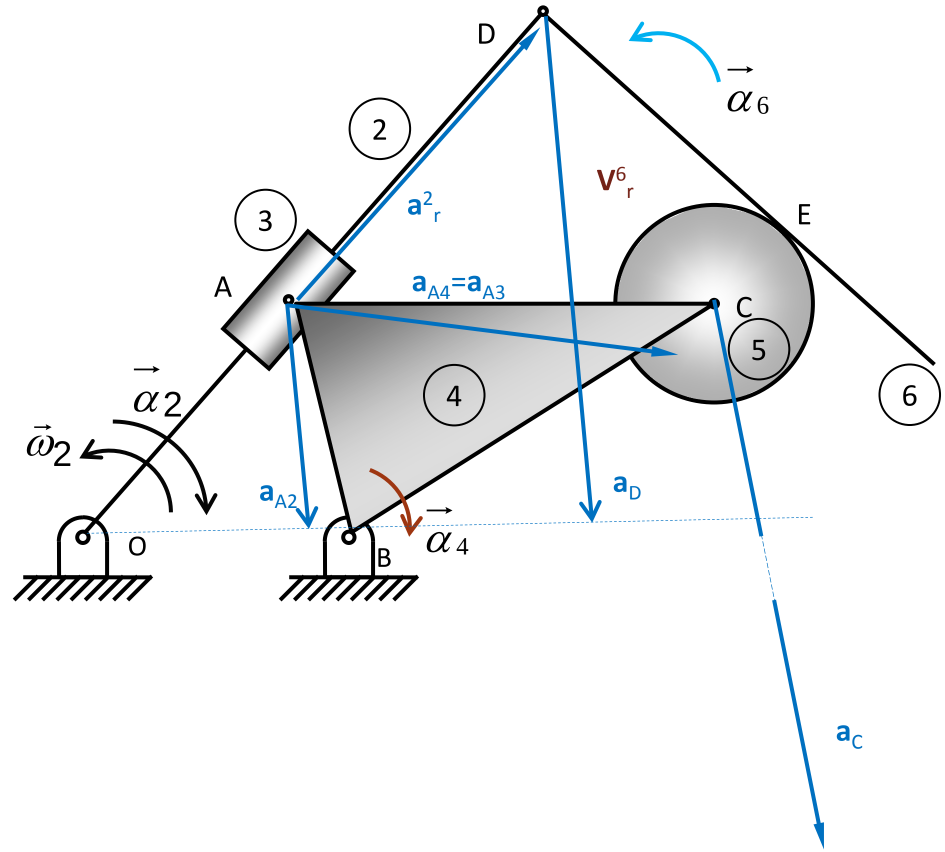
SR$_D$ (ω_6, α_6)

$$\underset{D}{\overset{M}{a_C}} = \underset{D}{\overset{M}{a_D}} + \underset{//DC}{\overset{\omega_6^2 CD}{a_{C6D}^N}} + \underset{\perp DC}{\overset{?}{a_{C6D}^T}} + \underset{//DE}{\overset{?}{a_r^6}} + \underset{//CE}{\overset{2\omega_6 \times v_r^6}{a_{cor}}}$$

$$\alpha_6 = \frac{a_{C6D}^T}{DC} \quad \bullet$$







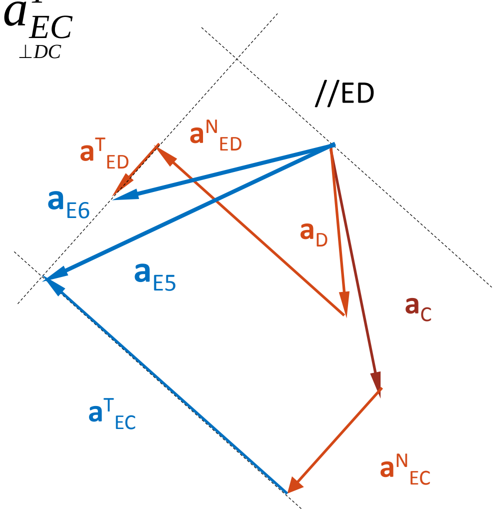
NOTA: Cambio de escala si es necesario

Ejercicio 3: aceleraciones

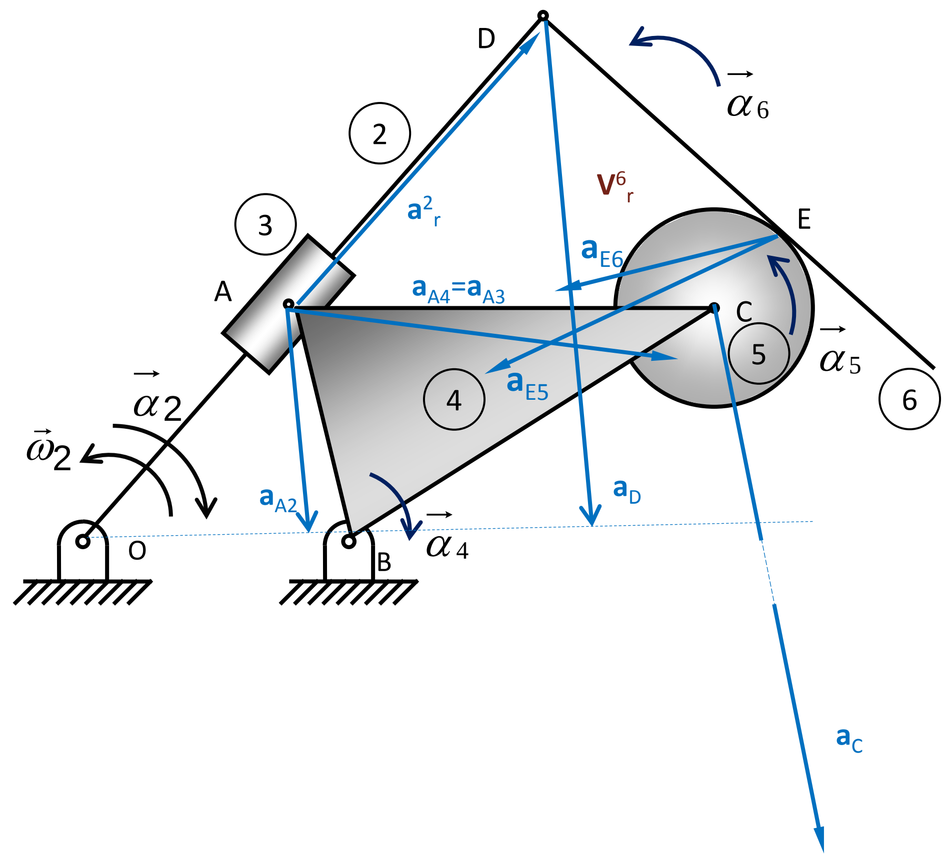
Rodadura pura ⇨ $\left(\vec{a}_{E5}\right)^{//DE} = \left(\vec{a}_{E6}\right)^{//DE}$

$$\underset{D}{\overset{M}{a_{E6}}} = \underset{D}{\overset{M}{a_{D}}} + \underset{//DC}{\overset{\omega_6^2 ED}{a^N_{ED}}} + \underset{\perp DC}{\overset{\alpha_6 ED}{a^T_{ED}}}$$

$$\underset{D}{\overset{M}{a_{E5}}} = \underset{D}{\overset{M}{a_{C}}} + \underset{//DC}{\overset{\omega_6^2 CE}{a^N_{EC}}} + \underset{\perp DC}{\overset{?}{a^T_{EC}}}$$



$$\alpha_5 = \frac{a^T_{EC}}{EC} \bullet$$



Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia

Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila