ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MECANISMOS PLANOS

Cinemática de Mecanismos

Tema 4

Itziar Martija López

Maider Loizaga Garmendia

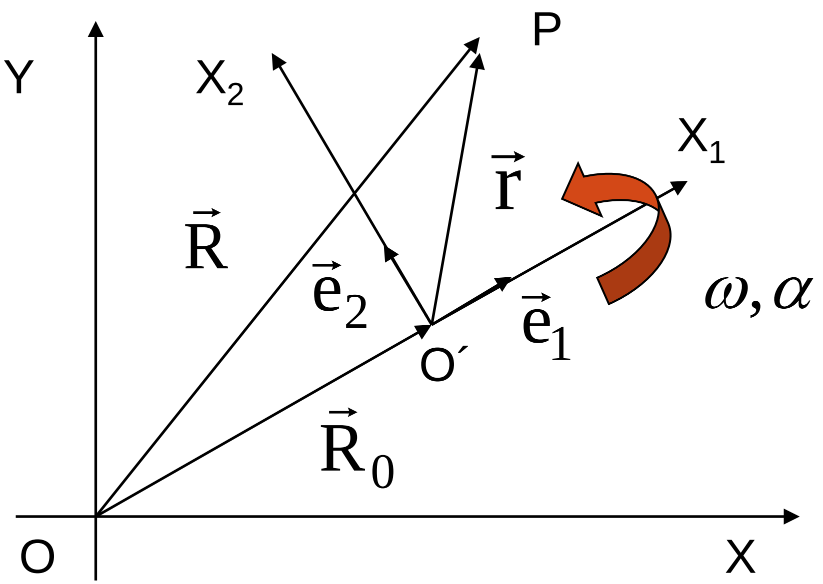
Departamento de Ingeniería Mecánica

Mekanika Ingeniaritza Saila

ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MECANISMOS PLANOS

4.1 Fundamento teórico

- Es un método que se puede aplicar de forma sencilla de forma gráfica y analítica. Se basa en la descomposición del movimiento de un punto en movimiento de arrastre y relativo.



- La descomposición depende de los ejes móviles y fijos elegidos. Escogeremos la descomposición que simplifique la resolución
- De la figura se deduce

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r}$$

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

4.1 Fundamento teórico

- Siendo $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ los vectores unitarios de la referencia móvil, podemos escribir:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \sum x_i \vec{e}_i$$

- Derivando respecto al tiempo:

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \sum \frac{dx_i}{dt}\vec{e}_i + \sum x_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} =$$

$$= \vec{v}_0 + \sum x_i \left(\vec{\omega} \times \vec{e}_i\right) + \sum \dot{x}_i \vec{e}_i =$$

$$= \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \left(\sum x_i \vec{e}_i\right) + \sum \dot{x}_i \vec{e}_i \qquad (*)$$

$$\boxed{\vec{v}_P = \left[\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}\right] + \vec{v}_r}$$

4.1 Fundamento teórico

- Derivando de nuevo la ecuación (*)

$$\vec{a}_P = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\sum \dot{x}_i \vec{e}_i + \sum x_i \left(\vec{\omega} \times \vec{e}_i \right) \right) +$$

$$+ \sum \ddot{x}_i \vec{e}_i + \sum \dot{x} \left(\vec{\omega} \times \vec{e}_i \right) =$$

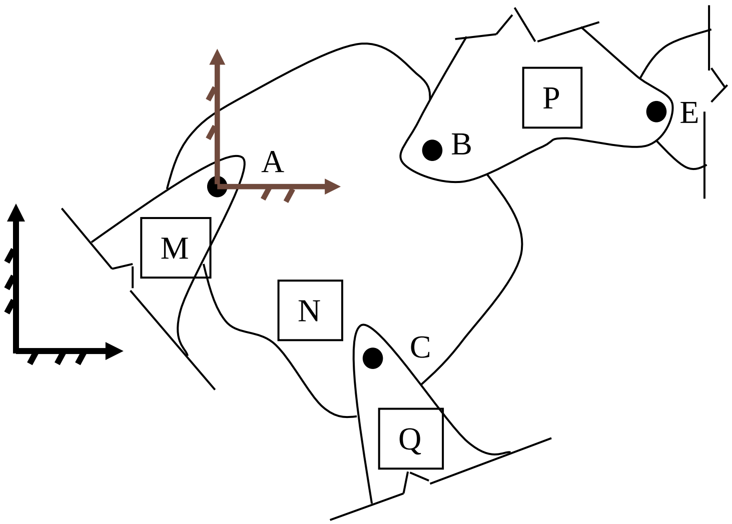
$$= \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right) + \sum \ddot{x}_i \vec{e}_i + \vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \left[\vec{a}_0 + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right) \right] + \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r}$$

4.2 Aplicación con uniones de rotación

MECANISMOS CON PARES R (de rotación)

Datos: v_A (mod. y dir.) y dirección de v_B.



Velocidades

a) Ejes en A que se desplazan || a sí mismos.

Por ser A y B del mismo elemento N:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{arr} + \vec{v}_{rel} \qquad \begin{cases} \vec{v}_{arr} = \vec{v}_A \\ \vec{v}_{rel} = \vec{v}_{BA} \end{cases}$$

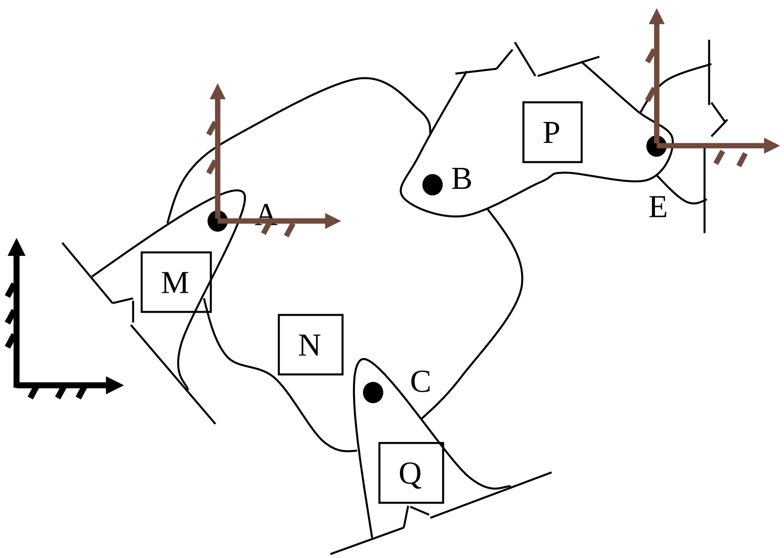
$$\underset{D}{\overset{?}{v_B}} = \underset{D}{\overset{M}{v_A}} + \underset{\perp AB}{\overset{?}{v_{BA}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \omega_N = \dfrac{v_{BA}}{AB} \\ \omega_P = \dfrac{v_B}{EB} \end{array}}$$

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

4.2 Aplicación con uniones de rotación

MECANISMOS CON PARES R (de rotación)

Datos: módulo y dirección de v_A y v_E.



Velocidades

a) Ejes en A y E que se desplazan || a sí mismos.

Por ser A y B del mismo elemento N:

$$\underset{?}{\overset{?}{v_B}} = \underset{D}{\overset{M}{v_A}} + \underset{\perp AB}{\overset{?}{v_{BA}}}$$

$$\underset{?}{\overset{?}{v_B}} = \underset{D}{\overset{M}{v_E}} + \underset{\perp EB}{\overset{?}{v_{BE}}}$$

$$\vec{v}_B,$$

$$\omega_N = \frac{v_{BA}}{AB}$$

$$\omega_P = \frac{v_{BE}}{EB}$$

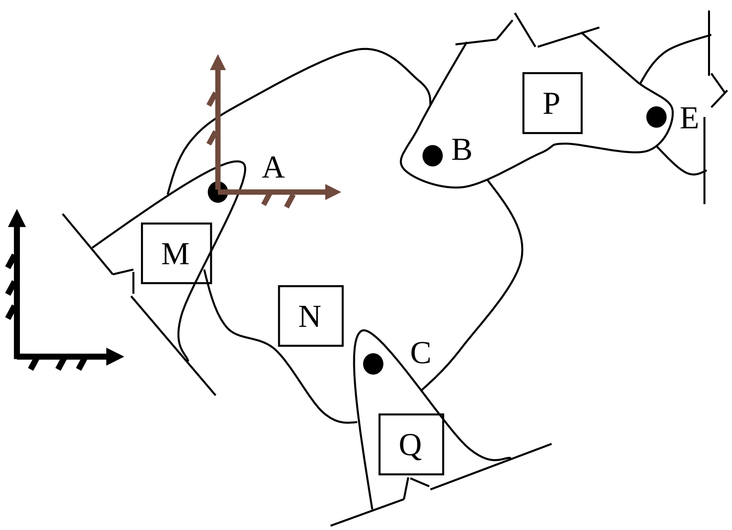
Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia

Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

4.2 Aplicación con uniones de rotación

MECANISMOS CON PARES R (de rotación)

Datos: a_A (mod. y dir.) y dirección de a_B.



Aceleraciones

a) Ejes en A que se desplazan || a sí mismos.

ω_{arr}=0 porque los ejes no giran.

Conocido todo el campo de velocidades.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cor}$$

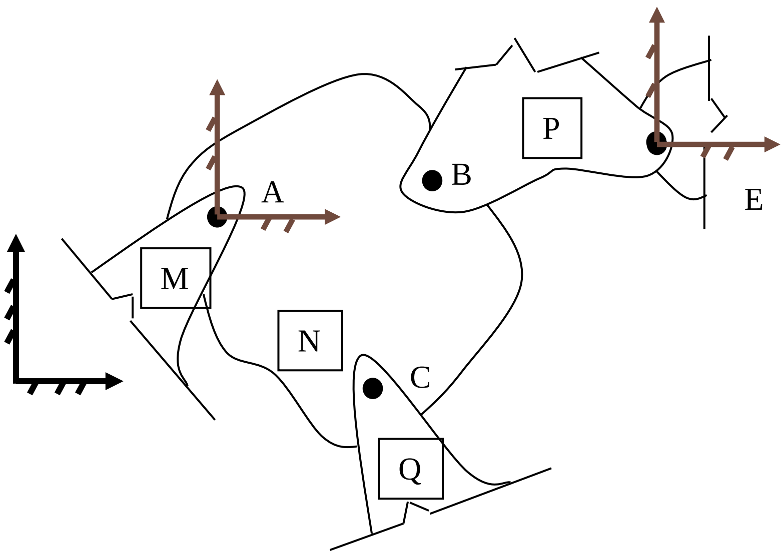
$$\overset{M}{\underset{D}{a_B^N}} + \overset{?}{\underset{D}{a_B^T}} = \overset{M}{\underset{D}{a_A}} + \overset{\omega_N^2 \cdot AB}{\underset{\parallel AB}{a_{BA}^N}} + \overset{?}{\underset{\perp AB}{a_{BA}^T}}$$

$$\alpha_N = \frac{a_{BA}^T}{\overline{AB}} \qquad \alpha_P = \frac{a_B^T}{\overline{EB}}$$

4.2 Aplicación con uniones de rotación

MECANISMOS CON PARES R (de rotación)

Datos: modulo y dirección de a_A y a_E



Aceleraciones

a) Ejes en A y E que se desplazan || a sí mismos.

$\omega_{arr}=0$, porque los ejes no giran.

Conocido todo el campo de velocidades.

$$\underset{?}{\overset{?}{a_B}} = \underset{D}{\overset{M}{a_A}} + \underset{\parallel AB}{\overset{\omega_N^2 \cdot AB}{a_{BA}^N}} + \underset{\perp AB}{\overset{?}{a_{BA}^T}}$$

$$\underset{?}{\overset{?}{a_B}} = \underset{D}{\overset{M}{a_E}} + \underset{\parallel BE}{\overset{\omega_P^2 \cdot EB}{a_{BE}^N}} + \underset{\perp BE}{\overset{?}{a_{BE}^T}}$$

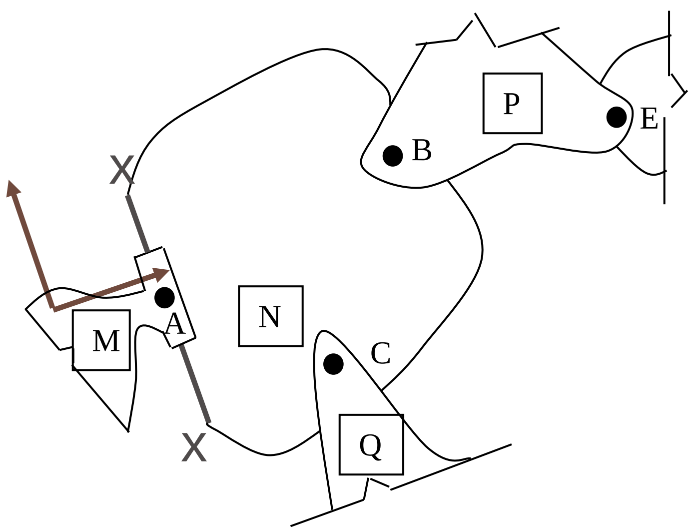
$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{a}_B, \\ \alpha_N = \dfrac{a_{BA}^T}{BA} \\ \alpha_P = \dfrac{a_{BE}^T}{BE} \end{array}}$$

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

4.3 Aplicación con pares prismáticos

MECANISMOS CON UN PAR P (prismático)

Datos: modulo y dirección de v_A



Velocidades

a) Ejes fijos al elemento M

$$\underset{D}{\overset{?}{v_B}} = v_{arr} + v_{rel} = \underset{D}{\overset{M}{v_A}} + \underset{\perp AB}{\overset{\omega_M \cdot AB}{v_{BA}}} + \underset{\parallel XX}{\overset{?}{v_{rel}}}$$

$\vec{v}_B \qquad \vec{v}_{rel}$

Dos elementos M y N unidos por un par prismático cumplirán que:

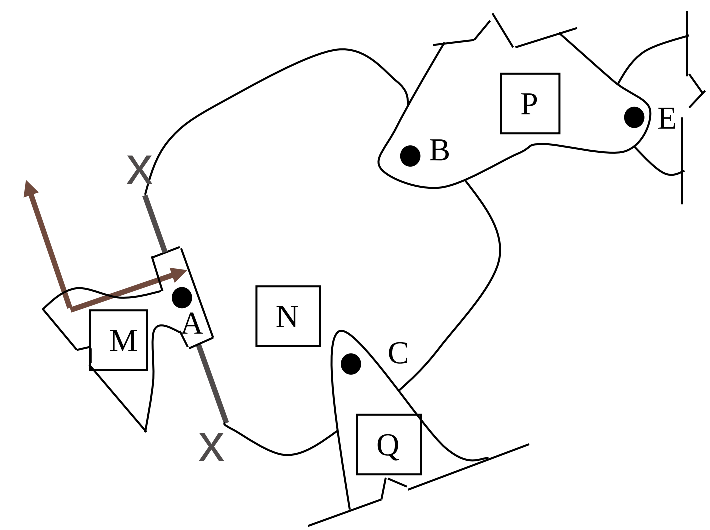
$\omega_M = \omega_N$

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

4.3 Aplicación con pares prismáticos

MECANISMOS CON UN PAR P (prismático)

Datos: modulo y dirección de a_A



Aceleraciones

a) Ejes fijos al elemento M

$$\underset{D}{\overset{M}{a_B^N}} + \underset{D}{\overset{?}{a_B^T}} = \underset{D}{\overset{M}{a_A}} + \underset{\parallel AB}{\overset{\omega_M^2 \cdot AB}{a_{BA}^N}} + \underset{\perp AB}{\overset{\alpha_M}{a_{BA}^T}} + \underset{\parallel XX}{\overset{?}{a_{rel}}} + \underset{\perp XX}{\overset{2\cdot\omega_M\cdot v_{rel}}{a}}$$

$\vec{a}_B$ $\quad$ $\vec{a}_{rel}$

Dos elementos M y N unidos por un par prismático cumplirán que:

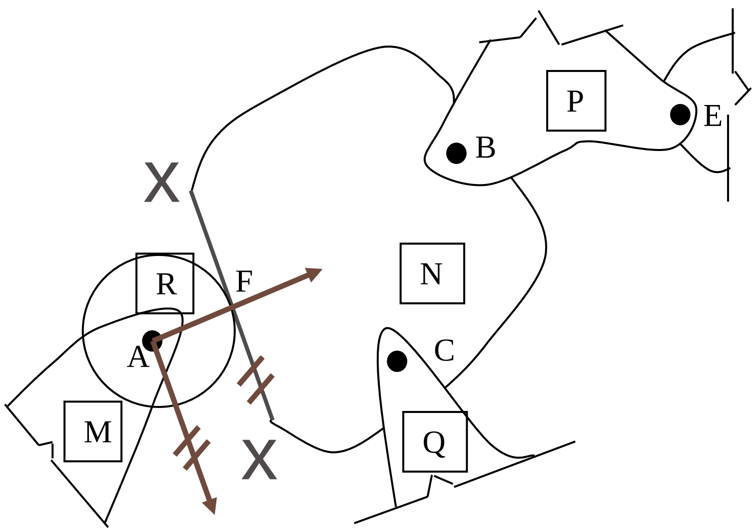
$\omega_M = \omega_N \qquad \alpha_M = \alpha_N$

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

4.4 Aplicación con par de rodadura pura

PAR DE RODADURA

Ejes en el centro del rodillo que giran con N $\rightarrow$ $\omega_S = \omega_N$ $\alpha_S = \alpha_N$



$$\underset{D}{\overset{?}{v_B}} = v_{arr} + v_{rel} = \underset{D}{\overset{M}{v_A}} + \underset{\perp AB}{\overset{?}{v_{BA}}} + \underset{\parallel XX}{\overset{?}{v_{rel}}}$$

Se necesitan datos de E para resolver el punto B.

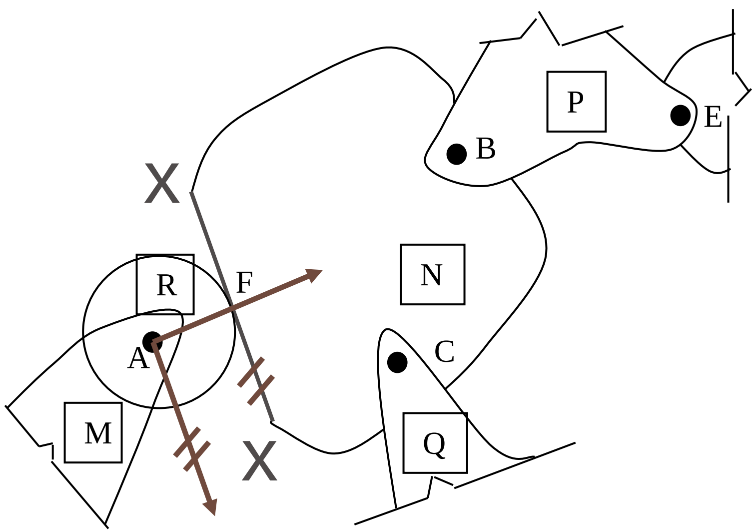
$$\underset{D}{\overset{M}{a_B^N}} + \underset{D}{\overset{?}{a_B^T}} = \underset{D}{\overset{M}{a_A}} + \underset{\parallel AB}{\overset{\omega_S^2 \cdot AB}{a_{BA}^N}} + \underset{\perp AB}{\overset{?}{a_{BA}^T}} + \underset{\parallel XX}{\overset{?}{a_{rel}}} + \underset{\perp XX}{\overset{2 \cdot \omega_S \cdot v_{rel}}{a}}$$

Que con la ecuación derivada del punto E se podrá resolver.

4.4 Aplicación con par de rodadura pura

PAR DE RODADURA

Cálculo de ω_R y α_R haciendo uso de las condiciones de rodadura.



Velocidades:

$$v_{F_R} = v_{F_N}$$

$$\underset{?}{\overset{?}{v_{F_N}}} = \underset{D}{\overset{M}{v_B}} + \underset{\perp FB}{\overset{\omega_N \cdot FB}{v_{F_N B}}}$$

$$\underset{D}{\overset{M}{v_{F_R}}} = \underset{D}{\overset{M}{v_A}} + \underset{\perp FA}{\overset{?}{v_{F_R A}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_R = \frac{v_{F_R A}}{\overline{AF}}}$$

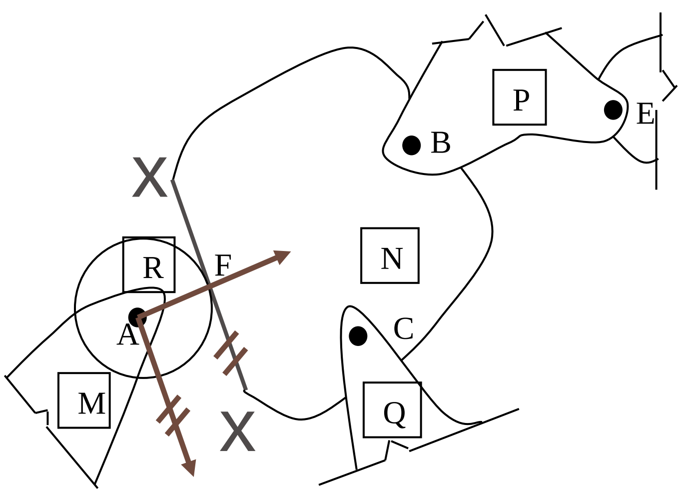
Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

4.4 Aplicación con par de rodadura pura

PAR DE RODADURA

Cálculo de ω_R y α_R haciendo uso de las condiciones de rodadura.

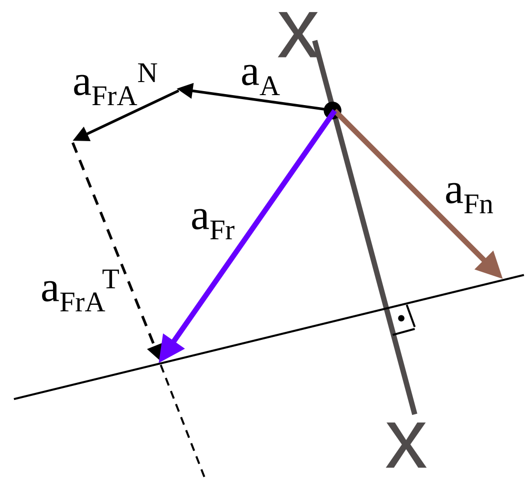
Aceleraciones:



$$a_{F_R}^{\parallel XX} = a_{F_N}^{\parallel XX}$$

$$\underset{?}{\overset{?}{a_{F_N}}} = \underset{D}{\overset{M}{a_B}} + \underset{\parallel BF}{\overset{\omega_N^2 \cdot FB}{a_{F_N B}^{N}}} + \underset{\parallel BF}{\overset{\alpha_N \cdot FB}{a_{F_N B}^{T}}}$$

$$\underset{?}{\overset{?}{a_{F_R}}} = \underset{D}{\overset{M}{a_A}} + \underset{\parallel AF}{\overset{\omega_R^2 \cdot AF}{a_{F_R A}^{N}}} + \underset{\parallel AF}{\overset{?}{a_{F_N B}^{T}}}$$



$$\boxed{\alpha_R = \frac{a_{F_N B}^{T}}{\overline{AF}}}$$

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila