GEOMETRÍA DEL MOVIMIENTO PLANO

Cinemática de Mecanismos

Tema 2

Itziar Martija López

Maider Loizaga Garmendia

Departamento de Ingeniería Mecánica

Mekanika Ingeniaritza Saila

GEOMETRÍA DEL MOVIMIENTO PLANO

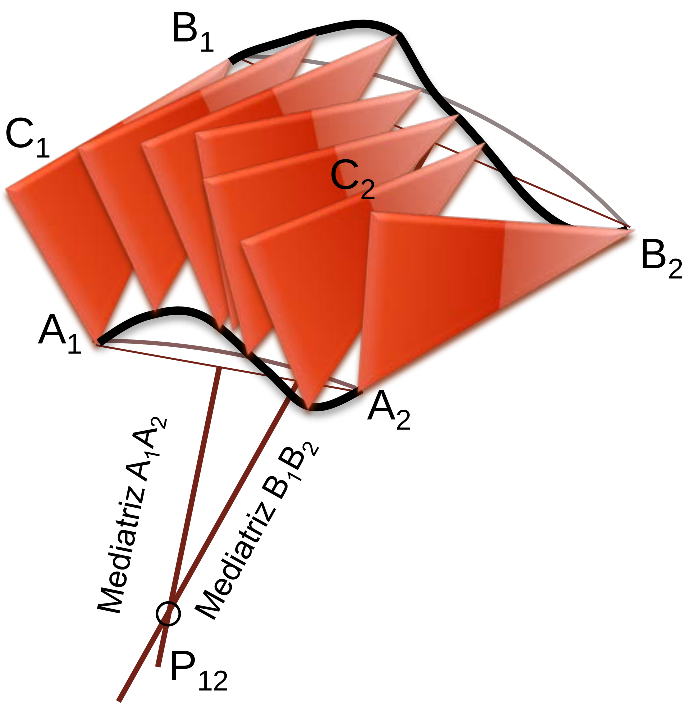
2.1 Importancia de los mecanismos con movimiento plano

- DEFINICIÓN
  - Un mecanismo tiene movimiento plano cuando las velocidades de todos sus puntos son paralelas a un plano fijo. No es necesario que el mecanismo esté contenido en el plano, pero se considera así para el cálculo de desplazamientos, velocidades y aceleraciones. No es válido para los esfuerzos (ya que se pueden originar momentos en el plano del mecanismo).
- SU IMPORTANCIA
  - La gran mayoría de mecanismos utilizados tienen movimiento plano.
  - Muchas de las propiedades del movimiento plano tienen su correspondiente propiedad en el movimiento tridimensional.
  - Hay muchos mecanismos espaciales que se originan a partir de un mecanismo plano al que se añade un g.d.l. de giro.

2.2 Estudio del movimiento continuo de una figura plana en su plano

- El movimiento de cada uno de los elementos de un mecanismo está definido por las restricciones geométricas impuestas por los pares cinemáticos que le conectan al resto del mecanismo.
- Estudiar el movimiento del mecanismo implica estudiar el movimiento de todos y cada uno de los elementos que lo forman.
- La geometría del movimiento de un elemento genérico será idealizada mediante el plano móvil asociado al mismo.
- A partir del concepto de Polo de Rotación vamos a recordar el concepto de Centro Instantáneo de Rotación (CIR)

2.2 Estudio del movimiento continuo de una figura plana en su plano



Polo de Rotación

- El punto P_{12}, considerado rígidamente unido al segmento AB, tiene la misma posición inicial y final. El movimiento entre las posiciones 1 y 2 se puede considerar como un giro alrededor de dicho punto.
- Cuando la posición 2 se acerca a la 1, el segmento A_1A_2 tiende a ser tangente a la trayectoria del punto A. Lo mismo ocurre con el resto de puntos del plano móvil.

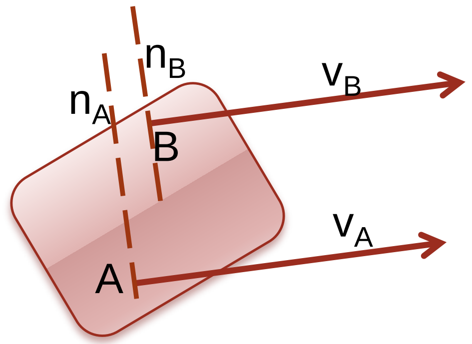
Centro Instantáneo de Rotación (CIR)

- En un movimiento infinitesimal el Polo se denomina Centro Instantáneo de Rotación y se obtiene en la intersección de las normales a las trayectorias de dos puntos cualesquiera del sólido; es decir, las normales a las velocidades de dos puntos.

2.2 Estudio del movimiento continuo de una figura plana en su plano

PROPIEDADES DEL C.I.R.

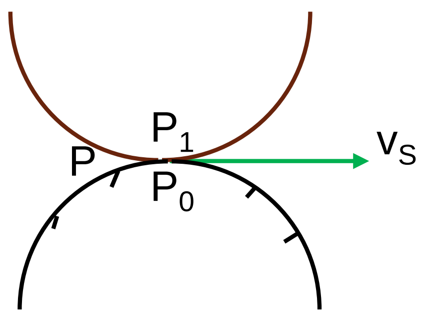
- Al no variar su posición en un dt, su velocidad es nula.
- Las velocidades de los demás puntos del sólido son perpendiculares al segmento que los une al CIR y su magnitud es proporcional a dicho segmento.
- La velocidad angular del sólido es la relación entre la velocidad de un punto y su distancia al CIR.
- Si dos puntos del sólido tienen la misma velocidad el sólido se encuentra en posición de traslación y en ese instante el CIR es un punto del infinito.



2.2 Estudio del movimiento continuo de una figura plana en su plano

BASE Y RULETA

- BASE: Lugar geométrico de los puntos del plano fijo que han coincidido en un determinado instante con el CIR.
- RULETA: Lugar geométrico de los puntos del plano móvil que han sido en un determinado instante CIR.



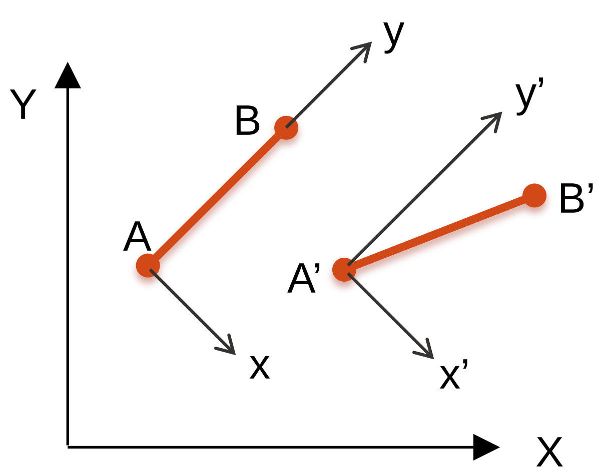
- P_0: punto del plano fijo que coincide instantáneamente con el CIR.
- P_1: punto del plano móvil que coincide instantáneamente con el CIR.
- P: punto matemático que se mueve sobre base y ruleta.

- Base y Ruleta tienen entre sí movimiento de rodadura pura y determinan totalmente el movimiento de una figura plana en su plano.
- Se denomina VELOCIDAD DE SUCESIÓN a la velocidad con la que el punto matemático P se mueve sobre la base (o sobre la ruleta).

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.3 Campo de velocidades

CAMPO DE VELOCIDADES EN EL MOVIMIENTO PLANO



Sean A y B dos puntos de una figura plana que se mueve con velocidad angular ω

- Situamos unos ejes móviles con origen en A que se mantienen paralelos a sí mismos y se mueven con A (Los ejes se trasladan con el punto A).

Se verificará que: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$

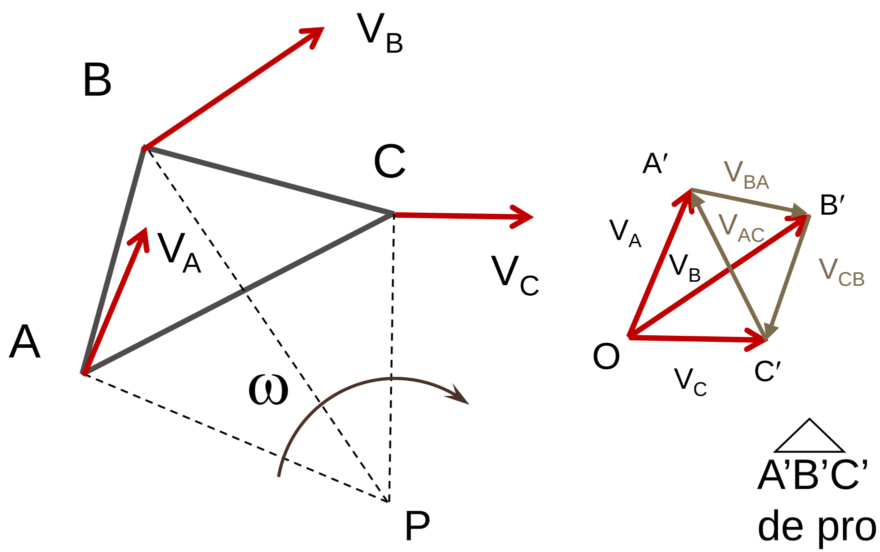
- Podemos escribir: $\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}}$

- Siendo $|\vec{v}_{BA}|$ = ω.AB
- Y siendo dir ($\vec{v}_{BA}$) = perpendicular a AB

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.3 Campo de velocidades

IMAGEN DE VELOCIDADES



Llevando las velocidades de los puntos A, B y C a un origen común obtenemos la figura A', B', C'.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{AC}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$$

$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ y con razón de proporcionalidad ω:

$|v_{BA}| = \omega \,.\, AB, \ A'B' \perp AB$

$|v_{CB}| = \omega \,.\, CB, \ B'C' \perp BC$

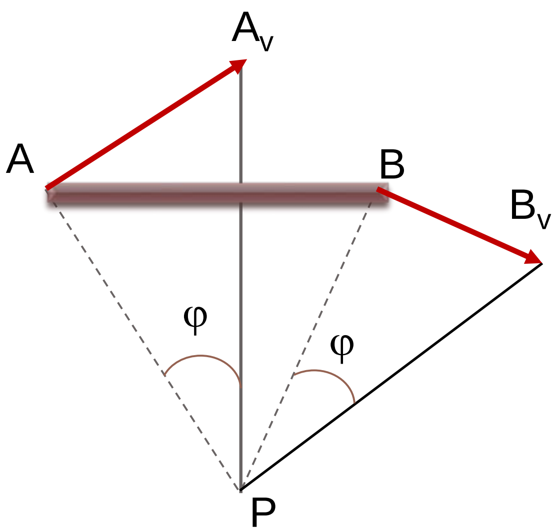
$|v_{AC}| = \omega \,.\, AC, \ A'C' \perp AC$

Punto O: homólogo del CIR (P), único punto de velocidad nula del sólido rígido.

Esta construcción permite obtener a partir de las velocidades de dos puntos, la de cualquier otro sin más que construir una figura semejante a la original.

2.4 Teorema de Burmester

Dados P (CIR), el segmento AB y conocida la velocidad de A, cuyo extremo es A_v , calcular la velocidad de B.



- Por las propiedades del CIR:

$$\overline{AA_V} = \omega\,\overline{AP} \Rightarrow \begin{cases} \overline{BB_V} = \omega\,\overline{BP} \\ \omega = \operatorname{tg}\varphi \end{cases}$$

- Para determinar Bv:

$$\overset{\Delta}{P}AA_V \cong \overset{\Delta}{P}BB_V$$

Son triángulos rectángulos.

Tienen dos lados proporcionales

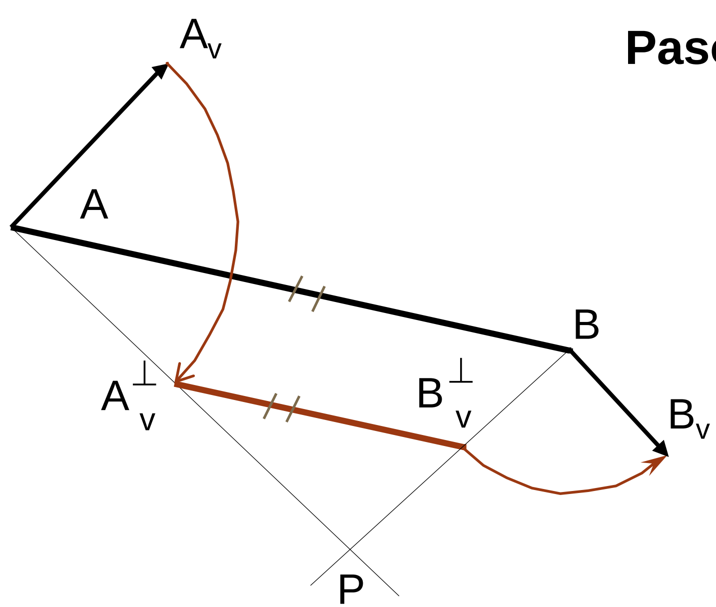
- Trazando por P una recta que forme φ grados con la línea PB obtenemos B_V

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.4 Teorema de Burmester

Construcción de las velocidades perpendiculares:

conocidos A, B, P y v_A



Pasos
- Abatir la v_A sobre la dirección AP $\rightarrow A_v^{\perp}$
- Por $A_v^{\perp}$ trazar paralela a AB $\rightarrow B_v^{\perp}$
- Desabatiendo $B_v^{\perp} \rightarrow B_V$

Se puede demostrar

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AA_V^{\perp}}}{\overline{BB_V^{\perp}}} \Longrightarrow \frac{\overline{AA_V^{\perp}}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{BB_V^{\perp}}}{\overline{PB}} = \omega$$

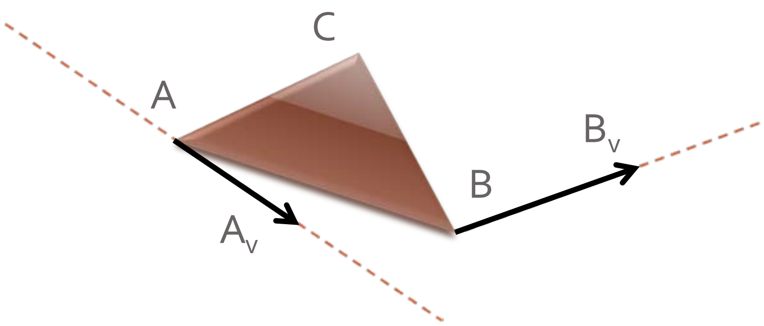
Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.4 Teorema de Burmester

A partir de esta construcción, conocidas las velocidades de 2 puntos de un plano móvil y con el CIR fuera del dibujo se puede calcular la velocidad de un tercer punto del elemento o plano móvil.

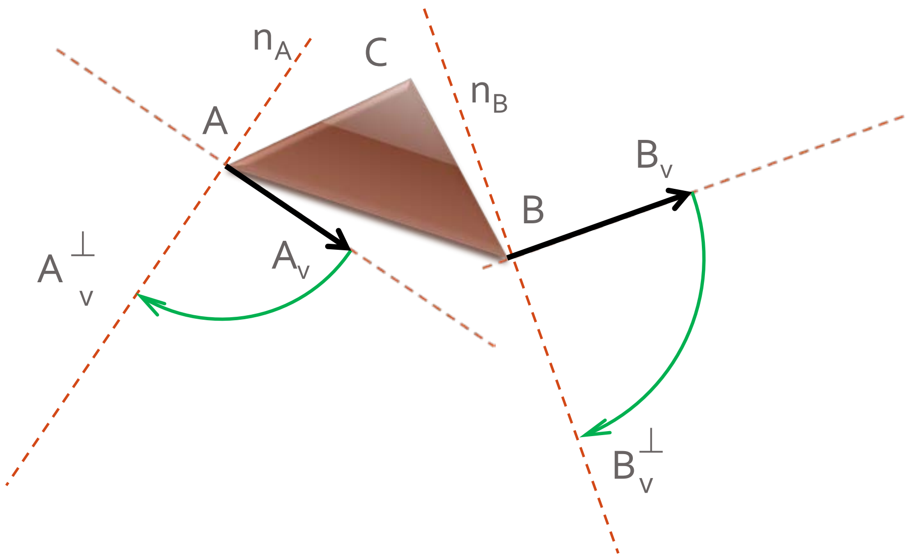
1. Se trazan por A y por B perpendiculares a v_A y v_B y se obtienen $A_v^{\perp}$ y $B_v^{\perp}$ (trazando una paralela a AB)
2. Por $Av^{\perp}$ → || AC
3. Por $Bv^{\perp}$ → || BC → En el punto de corte $C_v^{\perp}$
4. Uniendo con C y desabatiendo sobre la perpendicular a C $C_v^{\perp}$ obtendremos C_v , y por tanto la velocidad de C (módulo, dirección y sentido)

2.4 Teorema de Burmester



Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

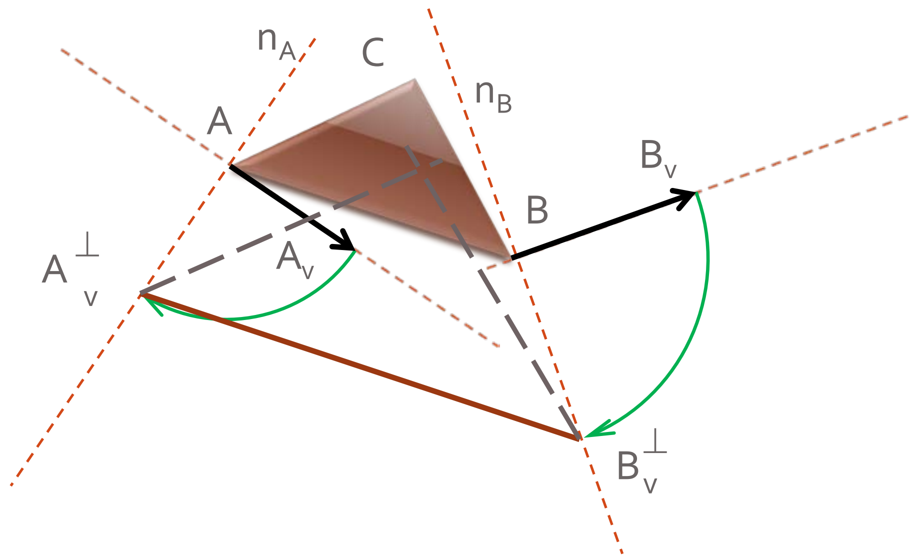
2.4 Teorema de Burmester



Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia

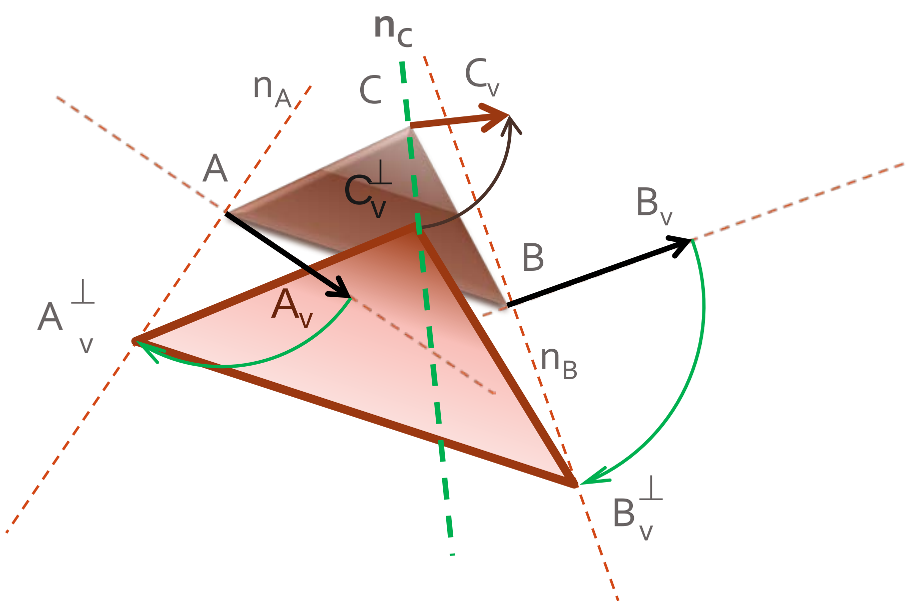
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.4 Teorema de Burmester



Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.4 Teorema de Burmester



2.4 Teorema de Burmester

TEOREMA DE BURMESTER

La figura formada por los extremos de las velocidades de un elemento rígido es semejante a la figura original. La razón de semejanza de sus lados es $\sqrt{1+\omega^2}$, y se encuentra girada φ grados respecto a la figura original

Se cumple que: $$\frac{\overline{AA_V^{\perp}}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{BB_V^{\perp}}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CC_V^{\perp}}}{\overline{PC}}$$

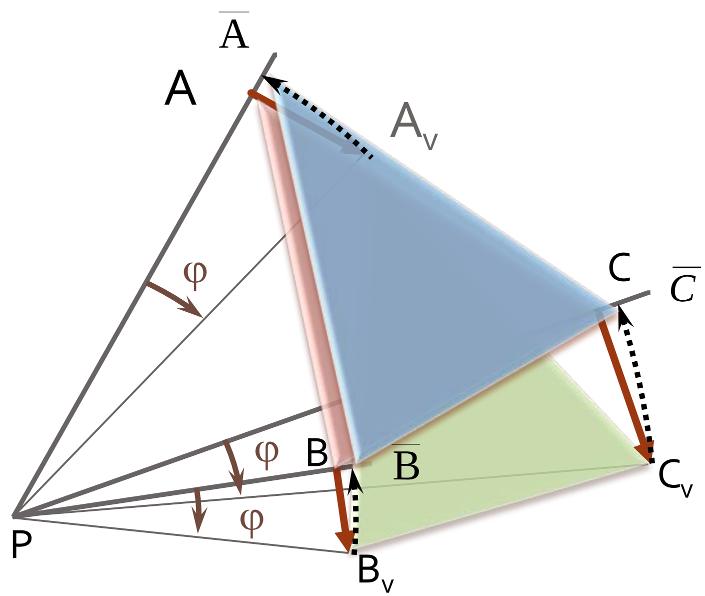
$$\overline{AA_V^{\perp}} = \overline{AA_V} \Rightarrow \frac{\overline{AA_V}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{BB_V}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CC_V}}{\overline{PC}} = \omega$$

Como APAv ≅BPBv ≅ CPCv : $$\frac{\overline{PA_V}}{\overline{PA}} = \frac{\sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AA_V}^2}}{\overline{PA}} = \frac{\sqrt{\overline{PA}^2 + (\omega\,\overline{PA})^2}}{\overline{PA}} = \sqrt{1+\omega^2}$$

$$\frac{\overline{PA_V}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB_V}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PC_V}}{\overline{PC}} = \sqrt{1+\omega^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} \propto \widehat{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} \\ \widehat{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} \propto \widehat{A_V B_V C_V} \end{array}\right\} \boxed{\Rightarrow \widehat{ABC} \propto \widehat{A_V B_V C_V}}$$

2.4 Teorema de Burmester



Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia

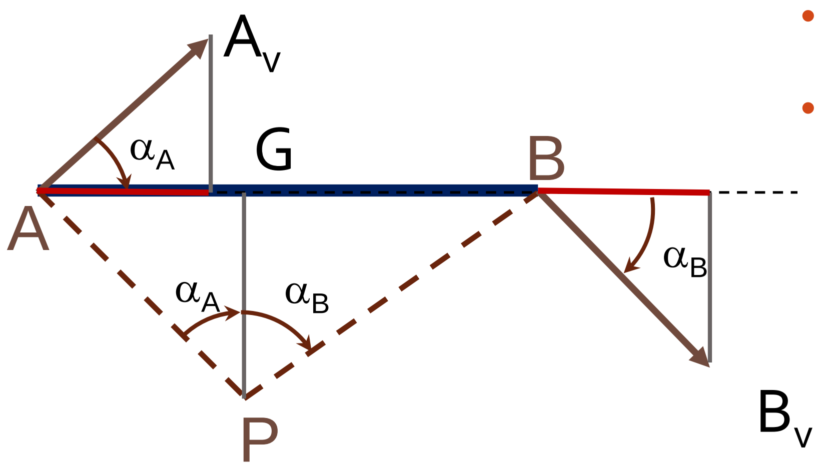
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.4 Teorema de Burmester

1ª CONSECUENCIA DEL TEOREMA DE BURMESTER

Si los puntos ABC están alineados también lo estarán los extremos de sus velocidades.

2ª CONSECUENCIA DEL TEOREMA DE BURMESTER



Datos: el polo P y las velocidades de A y B.

- G es el pie de la perpendicular a AB trazada desde P.
- Proyectando las velocidades de A y de B sobre AB:

$$\overline{AA_V}\cos(\overline{AA_V},\overline{AB}) = \omega\,\overline{PA}\cos(\overline{PA},\overline{PG}) = \omega\,\overline{PG}$$

$$\overline{BB_V}\cos(\overline{BB_V},\overline{AB}) = \omega\,\overline{PB}\cos(\overline{PB},\overline{PG}) = \omega\,\overline{PG}$$

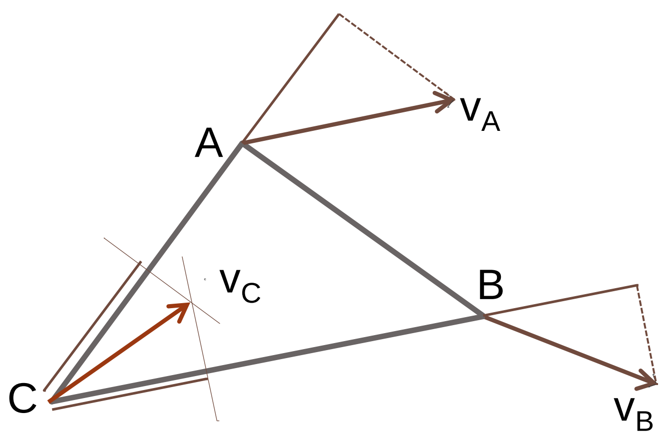
Podemos establecer que en una línea recta cualquiera del plano móvil todos sus puntos como sólido rígido tienen la misma componente de la velocidad según dicha recta.

Concuerda con el hecho de que todos los puntos de un S.R. deben conservar distancia cte. entre ellos, por lo que no puede haber velocidad relativa mas que en dirección perpendicular al segmento que los une.

2.4 Teorema de Burmester

CONSTRUCCIÓN GRÁFICA BASADA EN LA 2ª CONSECUENCIA DEL TEOREMA DE BURMESTER

Calcular la velocidad de un tercer punto C, conocidas las velocidades de otros dos, A y B, sin recurrir al CIR:



- Proyectando v_A sobre AC tendremos una componente de v_C.
- Proyectando v_B sobre BC tendremos otra componente de v_C.

Nota: no hay que sumar las componentes sino desproyectarlas, para obtener la velocidad v_C.

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

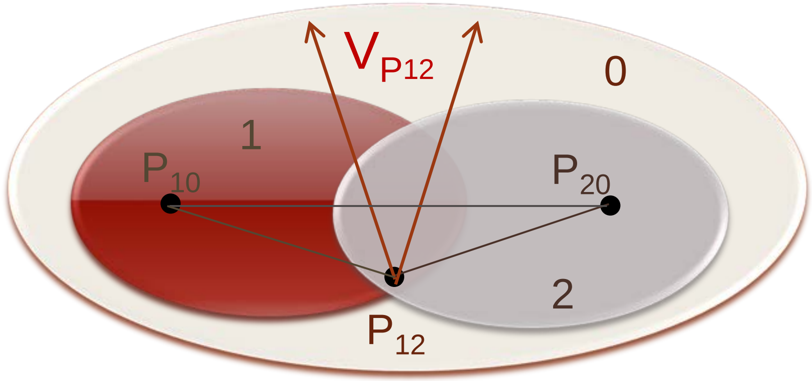
2.5 Teorema de Aronhold-Kennedy

Generalización del concepto de *Centro Instantáneo de Rotación* para el movimiento relativo entre planos móviles

- CIR del movimiento relativo entre 2 planos es el punto que tiene la misma velocidad como perteneciente a cualquiera de los dos planos o punto en el que es cero la velocidad relativa entre ambos planos
- El **Teorema de Aronhold-Kennedy** establece que el polo P_{12} está alineado con los otros dos polos, es decir, que está sobre la recta $P_{10}P_{20}$.

2.5 Teorema de Aronhold-Kennedy

- Supongamos tres planos con movimiento relativo. Consideraremos que uno de ellos es fijo. Sea éste el 0 y sean el 1 y el 2 los planos móviles. sean $P_{01}=P_{10}$ y $P_{02}=P_{20}$ los polos del movimiento de los planos 1 y 2 respecto del plano 0.
- Si P_{12} no estuviera sobre dicha recta su velocidad sería por una parte $\perp$ a $P_{10}P_{12}$ y por otra $\perp$ a $P_{20}P_{12}$, no coincidiendo ambas direcciones. Como por hipótesis P_{12} debe tener la misma velocidad como perteneciente a 1 que a 2, el punto deberá estar en la línea de unión $P_{10}P_{20}$.



Para que el módulo de la velocidad sea el correcto se deberá verificar que:

$$\omega_{10}\,\overline{P_{10}P_{12}} = \omega_{20}\,\overline{P_{20}P_{12}} \Rightarrow \frac{\overline{P_{10}P_{12}}}{\overline{P_{20}P_{12}}} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

2.5 Teorema de Aronhold-Kennedy

DIAGRAMA DEL CÍRCULO

Procedimiento que permite obtener todos los polos de velocidad de un mecanismo sin tener que resolverlo para velocidades.

Se dibuja una circunferencia y se divide en tantas partes como elementos tiene el mecanismo.

Se llaman **polos primarios** a aquellos que pueden determinarse por simple inspección. Son polos primarios:

- Todos los pares de rotación que existan en el mecanismo.
- El punto del infinito para los puntos que se trasladan.
- El punto de contacto en un par de rodadura.
- En un par de leva L, la intersección de la línea de centros con la normal en el punto de contacto.

2.5 Teorema de Aronhold-Kennedy

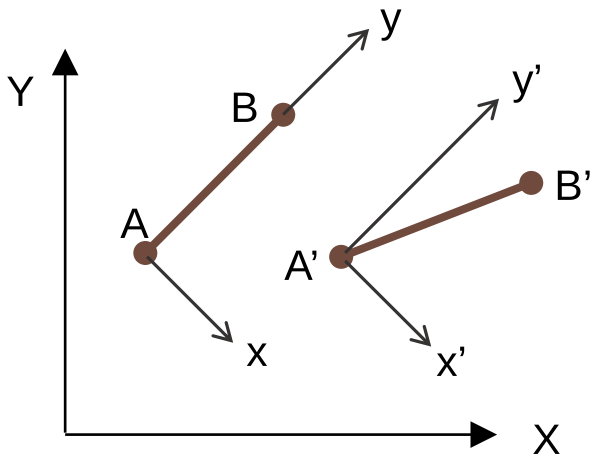
DIAGRAMA DEL CÍRCULO

Para aplicar el diagrama del círculo se procede del siguiente modo:

- Se numeran de 1 a n los puntos en que está dividida la circunferencia. Todas las posibles cuerdas entre estos puntos representan los polos del mecanismo.
- Se dibujan con líneas continuas las cuerdas correspondientes a los polos primarios y a trazos las correspondientes a los polos desconocidos.
- Para buscar los polos desconocidos se localizan los triángulos que tengan en común un lado dibujado a trazos y todos los demás lados sean continuos. Ahora el polo se obtiene como intersección de las dos rectas que pasan (cada una de ellas) por dos polos conocidos. De este modo se va prosperando hasta que se conozcan todos los polos.

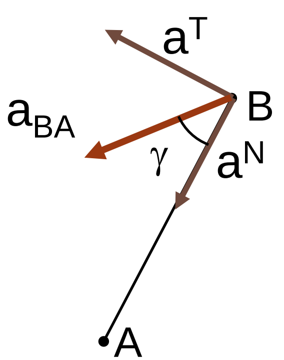
2.6 Campo de aceleraciones

- Sean A y B dos puntos de un sólido rígido con movimiento plano y unos ejes situados en el punto A que se desplazan paralelamente a sí mismos.



- La aceleración de arrastre será la del punto A, no existirá aceleración de Coriolis por no girar el sistema de referencia móvil y la aceleración relativa corresponde a un giro de B alrededor de A.

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}\\ \vec{a}_{BA} &= \vec{a}^{\,N}_{BA} + \vec{a}^{\,T}_{BA}\end{aligned}}$$



- En el movimiento de rotación el ángulo γ que forma la aceleración de un punto con su radio vector (normal del movimiento del punto) es constante e igual a:

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{a^T}{a^N} = \frac{\alpha.\overline{AB}}{\omega^2.\overline{AB}} = \frac{\alpha}{\omega^2}$$

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.6 Campo de aceleraciones

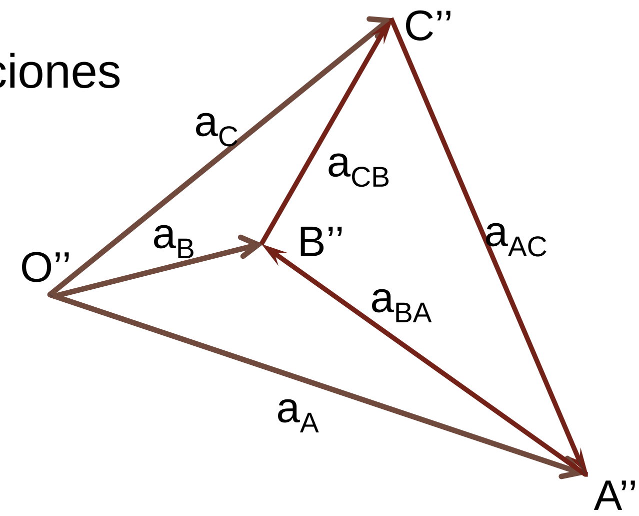
- Para tres puntos del sólido, se puede escribir:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$
$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}$$
$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{a_{BA}\ AB} \\ \widehat{a_{CB}\ BC} \\ \widehat{a_{AC}\ CA} \end{array}\right\} \text{ángulo } \gamma \text{ cte.} \Rightarrow \text{imagen de aceleraciones}$$

$\widehat{A''B''C''} \approx \widehat{ABC}$

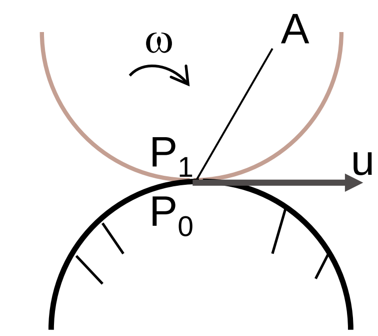
Por formar los lados homólogos un ángulo constante



Punto O'': POLO DE ACELERACIONES, o punto del plano móvil con aceleración nula (homólogo del punto O en la figura original).

2.6 Campo de aceleraciones

ACELERACIÓN DEL PTO DEL PLANO MÓVIL QUE COINCIDE CON EL CIR



Para cualquier instante se cumplirá:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overline{PA}$$

La aceleración de A será:

$$\vec{a}_A = \frac{d\,\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\,\vec{\omega}}{dt} \times \overline{PA} + \vec{\omega} \times \frac{d\,\overline{PA}}{dt} \qquad \text{donde: } \frac{d\,\overline{PA}}{dt} = \vec{v}_A - \vec{v}_P$$

Si A tiende a ser P_1, de la ruleta:

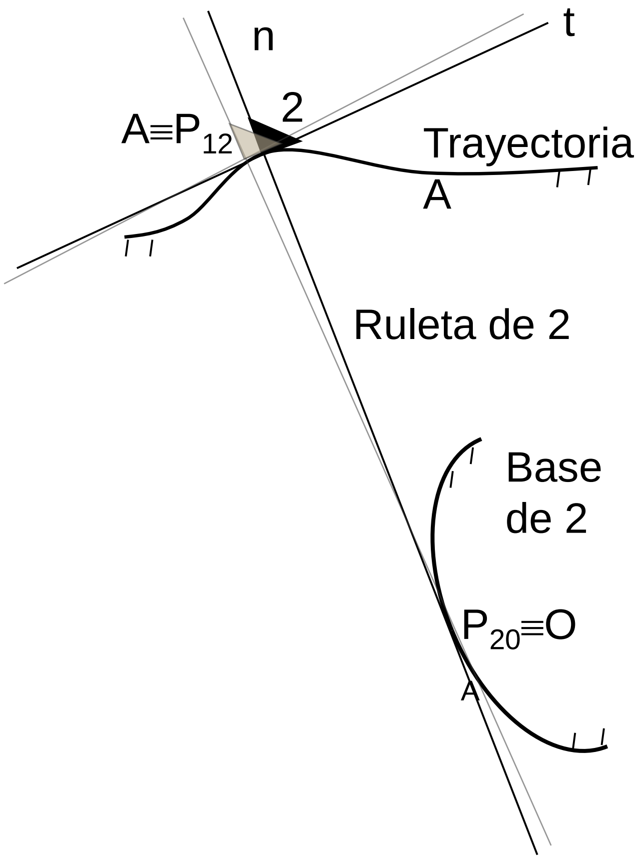
$$\vec{a}_{P_1} = \frac{d\,\vec{\omega}}{dt} \times \overline{0} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{0} - \vec{v}_P) = -\vec{\omega} \times \vec{v}_P$$

A la velocidad de sucesión se le llama u: $a_{P_1} = -\omega\, u$ $\begin{cases} \text{dirección: } \perp u \\ \text{sentido: que haga separarse a base y ruleta} \end{cases}$

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia

Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.7 Teorema de Hartmann
Conceptos preliminares



Sean un plano fijo 0 y un plano móvil 1, y A un punto del plano móvil que se mueve según una determinada trayectoria.

Sea n la normal a la trayectoria del punto A y t la tangente. n y t se mueven con A y determinan un tercer plano que está en movimiento, plano 2.

El polo P10 respecto al que se mueve el punto A estará en la normal a la trayectoria de A (Necesitaríamos un segundo punto del plano 1 para determinar su posición)

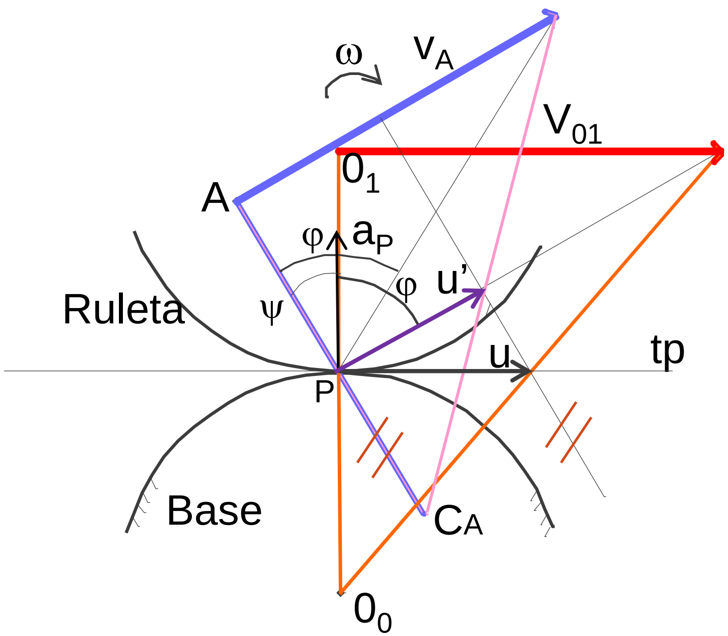
El polo P12 coincide con el punto A, ya que su velocidad es la misma como perteneciente a 1 como a 2

2.7 Teorema de Hartmann
Conceptos preliminares

- Si P_{10} está en n y P_{12} también, por Aronhold-Kennedy sabemos que P_{20} está en n. El plano 2 tiene siempre su CIR sobre la normal, por tanto n es la ruleta de 2 y obtendremos P_{20} como intersección de dos normales infinitamente próximas.
- Si t se mueve con A y tangente a su trayectoria el paso de una posición (t) a otra (t+dt) se hace girando alrededor del Centro de Rotación o Centro de Curvatura de la Trayectoria de A (OA). Por tanto $P_{20} \equiv$ OA.
- Por tanto la base de 2 es el lugar geométrico de los centros de curvatura de la trayectoria de A, que es lo mismo que decir que la base de 2 es la evoluta de la trayectoria de A, o la envolvente de las normales a la trayectoria de A.
- En resumen, el centro de curvatura de la trayectoria de un punto es el polo del plano asociado a la normal a la trayectoria, que se mueve con el punto A.

2.7 Teorema de Hartmann

- “El extremo del vector velocidad de un punto, el centro de curvatura de su trayectoria y el extremo de la componente paralela a la velocidad del punto de la velocidad de sucesión, están alineados”.
- Mediante este teorema podemos calcular el centro de curvatura de la trayectoria de un punto conociendo su velocidad, el polo o CIR y la velocidad de sucesión o de cambio de polo.



Con la base, la ruleta y la velocidad de A, v_A, podemos conocer la v_{O1} y, con ella, la velocidad de cambio de polo, al girar P y O_1 alrededor de O_0 con la misma velocidad angular.

NOTA:

La línea que une P con el extremo de la velocidad de O1 no tiene por qué ser paralela a la velocidad de A, en esta figura coinciden, sin más.

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia

Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.7 Teorema de Hartmann

$$\vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{a}_{AP}^{N} + \vec{a}_{AP}^{T}$$

Proyectando esta ecuación sobre la línea AP: $a_A^{II\,PA} = -J_P \cos\psi + \omega^2\,\overline{PA}$

Como $\overline{PA} \perp \vec{v}_A \;\rightarrow\; a_A^{II\,PA} = a_A^{N} = \dfrac{v_A^2}{\rho}$ ➔ $\dfrac{v_A^2}{\rho} = -J_P \cos\psi + \omega^2\,\overline{PA}$

Como $v_A = \omega\,\overline{PA}$ y $J_P = \omega\,u$ ➔ $\dfrac{\omega^2\,\overline{PA}^2}{\rho} = -\omega\,u\cos\psi + \omega^2\,\overline{PA}$ (1)

Llamando u' a $u\cos\psi$ y observando la figura: $\dfrac{u'}{v_A} = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CA}} \;\Rightarrow\; u' = \omega\,\overline{PA}\,\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CA}}$ (2)

Sustituimos (2) en (1) y operando:

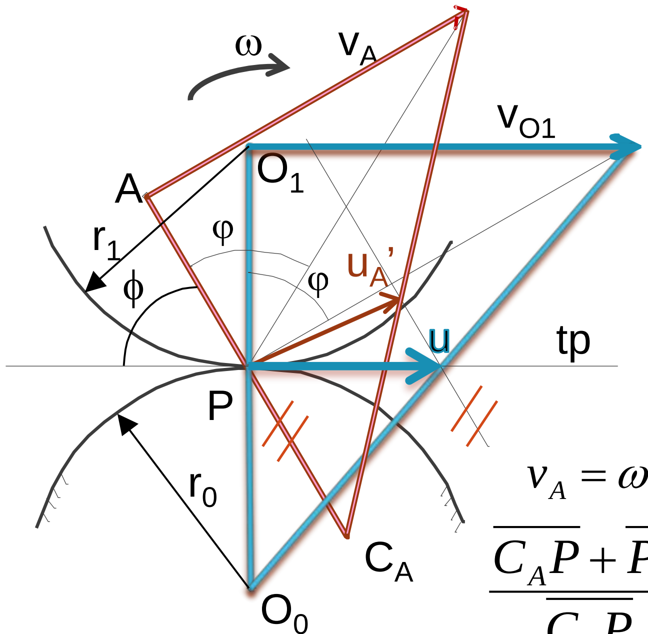
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\omega\,\overline{PA}^2}{\rho} = -\omega\,\overline{PA}\,\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} + \omega\,\overline{PA}\\
&\frac{\overline{PA}}{\rho} = -\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} + 1\\
&\frac{\overline{PA}}{\rho} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CA}} - \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CA}-\overline{CP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{CA}}
\end{aligned}\right\}\quad \boxed{\rho = \overline{CA}}$$

“Uniendo el extremo de v_A con el extremo de la componente de u paralela a v_A y prolongando esa línea hasta encontrar la normal, obtenemos el centro de curvatura de la trayectoria de A”.

2.8 Fórmula de Euler-Savary: circunferencia de inflexiones

La fórmula de Euler-Savary es la expresión analítica del Teorema de Hartmann.

Planteamos las semejanzas de triángulos:



$$\left.\begin{array}{l} v_{O1} = \omega\, r_1 \\ \dfrac{u}{r_0} = \dfrac{v_{01}}{r_0 + r_1} \end{array}\right\} u = \omega \frac{r_1\, r_0}{r_0 + r_1} \rightarrow \frac{\omega}{u} = \frac{r_0 + r_1}{r_o\, r_1} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}$$

Relación constante, no depende del punto en estudio.

Considerando el punto A y por semejanza:

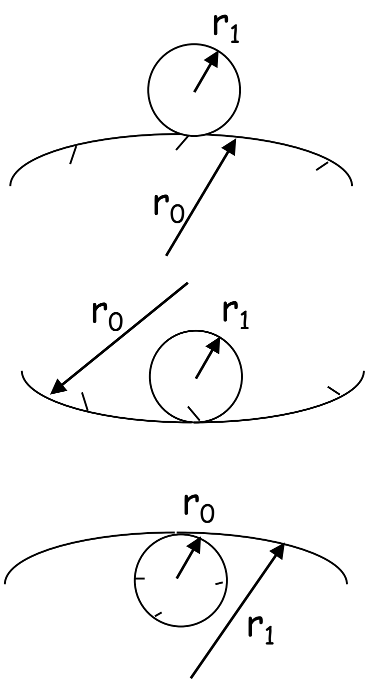
$$\left.\begin{array}{l} v_A = \omega\, \overline{PA} \qquad u' = u\, sen\, \phi \\ \dfrac{\overline{C_A P} + \overline{PA}}{\overline{C_A P}} = \dfrac{v_A}{u'} = \dfrac{\omega\, \overline{PA}}{u\, sen\, \phi} \end{array}\right\} \frac{\omega}{u} = \frac{\overline{C_A P} + \overline{PA}}{\overline{\overline{C_A P}}\; \overline{\overline{PA}}}\, sen\, \phi = \left(\frac{1}{\overline{\overline{C_A P}}} + \frac{1}{\overline{\overline{PA}}} \right) sen\, \phi$$

Comparando esta última expresión con la obtenida para O_1:

$$\boxed{\left(\frac{1}{\overline{\overline{CP}}} + \frac{1}{\overline{\overline{PA}}} \right) sen\, \phi = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}}$$

FÓRMULA DE EULER-SAVARY

2.8 Fórmula de Euler-Savary: circunferencia de inflexiones



SIGNOS

- Si el exterior de 1 rueda sobre el exterior de 0

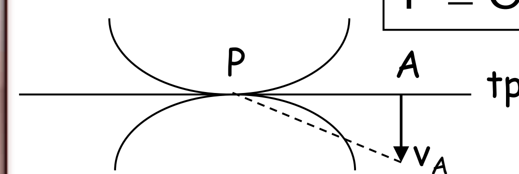
  r_1 y r_0 son POSITIVOS
- Si el exterior de 1 rueda sobre el interior de 0

  r_0 NEGATIVO, r_1 POSITIVO
- Si el interior de 1 rueda sobre el exterior de 0

  r_0 POSITIVO, r_1 NEGATIVO

Aplicando Euler-Savary a los puntos de la t_p, observamos que todos tienen en P el centro de curvatura de su trayectoria, al ser u' nula.

$P \equiv C_A$

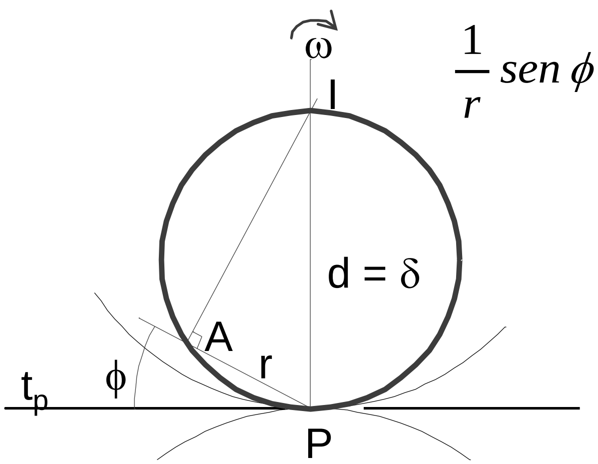


Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.8 Fórmula de Euler-Savary: circunferencia de inflexiones

CIRCUNFERENCIA DE INFLEXIONES

- "Lugar geométrico de puntos del plano móvil que no tienen an por estar en un punto de inflexión de su trayectoria, es decir, un punto de radio de curvatura infinito."
- Haciendo CP= ∞ en la fórmula de Euler-Savary, y llamando $\overline{PA} = r$



$$\frac{1}{r} sen\,\phi = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{\partial}$$

⇨ r = δ sen ϕ $\begin{cases} \text{Circunferencia de } \delta = \dfrac{u}{\omega} \\ \text{Tangente a tp} \end{cases}$

Los puntos de esta circunferencia sólo tienen $a_t \rightarrow$ la ***v*** y ***a*** de todos sus puntos pasan por I, POLO DE INFLEXIONES. La velocidad de este punto es:

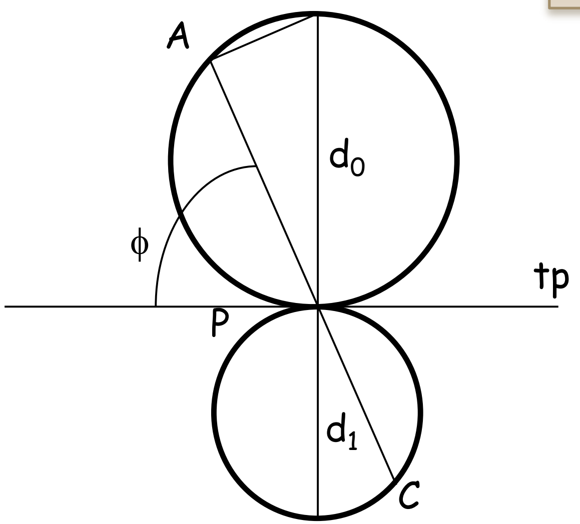
$$v_I = \omega\,.\delta = u \qquad (\delta = u/\omega)$$

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.8 Fórmula de Euler-Savary

$$\left(\frac{1}{\overline{CP}}+\frac{1}{\overline{PA}}\right)\operatorname{sen}\phi=\frac{\omega}{u}=\frac{1}{\delta}$$

- Con la fórmula de Euler-Savary, vemos que C y A están relacionados y se les denomina CONJUGADOS.
- C y A son el centro de curvatura de la trayectoria del otro punto en el correspondiente movimiento relativo.



PUNTOS CONJUGADOS DE UNA CIRCUNFERENCIA TANGENTE A LAS POLODIAS

- La ec. de la circunferencia es $\overline{PA}=d_0\operatorname{sen}\phi=\frac{1}{\delta}$
- Sustituyendo en Euler-Savary:

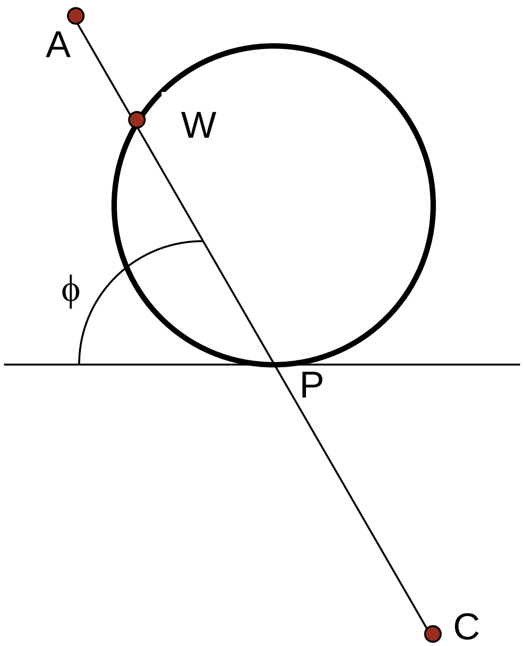
$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{1}{\overline{CP}}+\dfrac{1}{d_0\,sen\,\phi}\right)sen\,\phi=\dfrac{1}{\delta}\\[2ex] \dfrac{1}{\overline{CP}}\,sen\,\phi=\dfrac{1}{\delta}-\dfrac{1}{d_0}=\dfrac{1}{d_1}\end{array}\right\}\quad \overline{CP}=d_1\operatorname{sen}\phi$$

Por tanto, los puntos conjugados forman una circunferencia tangente a las polodias y los diámetros se relacionan mediante la fórmula

$$\boxed{\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_1}=\frac{1}{\delta}}$$

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.8 Fórmula de Euler-Savary



EXPRESIÓN GRÁFICA DE EULER-SAVARY

- Aplicando a A y W la fórmula de Euler-Savary:

$$\left(\frac{1}{\overline{PA}}+\frac{1}{\overline{CP}}\right)\operatorname{sen}\phi=\left(\frac{1}{\overline{PW}}+\frac{1}{\infty}\right)\operatorname{sen}\phi$$

$$\frac{1}{\overline{PA}}+\frac{1}{\overline{CP}}=\frac{1}{\overline{PW}}$$

- Teniendo en cuenta que:

$$\left.\begin{aligned}\overline{CP}&=\overline{CA}-\overline{PA}\\ \overline{PW}&=\overline{PA}-\overline{WA}\end{aligned}\right\}\qquad \frac{1}{\overline{PA}}+\frac{1}{\overline{CA}-\overline{PA}}=\frac{1}{\overline{PA}-\overline{WA}}$$

- Operando:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\overline{CA}-\overline{PA}\right)\left(\overline{PA}-\overline{WA}\right)+\overline{PA}\left(\overline{PA}-\overline{WA}\right)=\overline{PA}\left(\overline{CA}-\overline{PA}\right)\\ &\overline{CA}\,\overline{PA}-\overline{CA}\,\overline{WA}-\overline{PA}^2+\overline{PA}\,\overline{WA}+\overline{PA}^2-\overline{PA}\,\overline{WA}=\overline{PA}\,\overline{CA}-\overline{PA}^2\end{aligned}\right\}\ \boxed{\overline{PA}^2=\overline{CA}\,\overline{WA}}$$

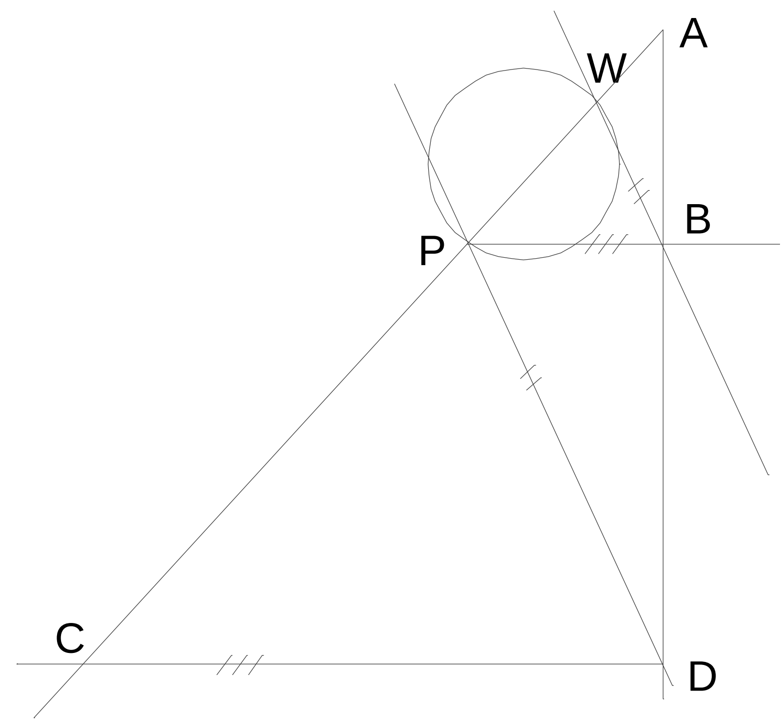
- Como $\overline{PA}^2$ es siempre positivo, C y W deben estar siempre al mismo lado del punto A.

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia

Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.9 Construcciones gráficas

- Dada la circunferencia de inflexiones, calcular el centro de curvatura C de la trayectoria de un punto A (o viceversa).
- Datos: P, A, circunferencia de inflexiones
  - Por A y P rectas arbitrarias $\Rightarrow$ B
  - Unir W y B. Por P paralela hasta cortar a AB $\Rightarrow$ D
  - Por D paralela a PB que corta a la normal AP $\Rightarrow$ C



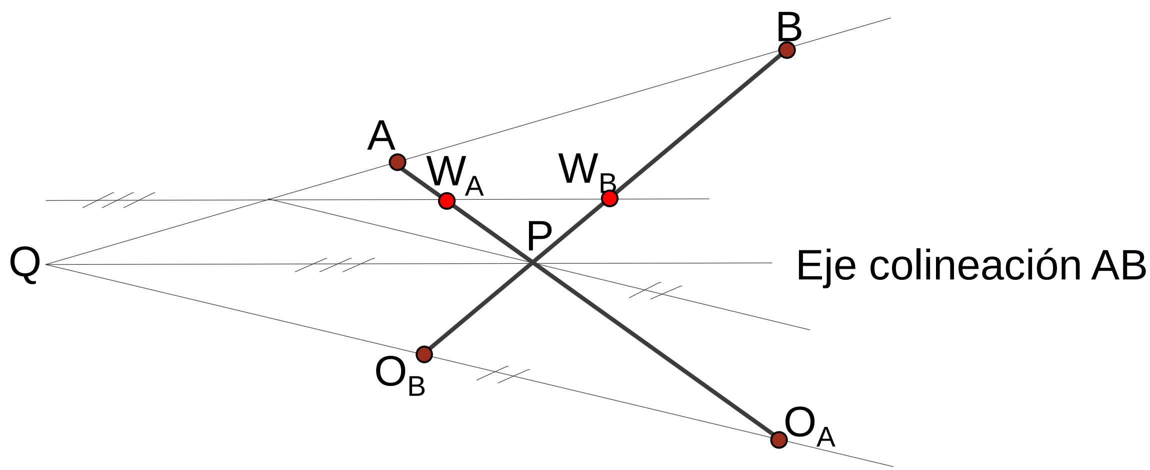
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overline{PA}}{\overline{WA}} = \dfrac{\overline{DA}}{\overline{BA}} \\[2ex] \dfrac{\overline{CA}}{\overline{PA}} = \dfrac{\overline{DA}}{\overline{BA}} \end{array}\right\} \dfrac{\overline{PA}}{\overline{WA}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{PA}} \Rightarrow \quad \overline{PA}^2 = \overline{CA}\,\overline{WA}$$

- Datos: P, A, C
  - Rectas CD y AD arbitrarias $\Rightarrow$ D
  - Por P paralela a CD hasta cortar a AD $\Rightarrow$ B
  - Por B paralela a PD hasta cortar a AC $\Rightarrow$ W
- (Se determina un punto de la circunferencia de inflexiones, no la propia circunferencia).

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.9 Construcciones gráficas

- Dados dos puntos y sus centros de curvatura calcular 3 puntos de la circunferencia de inflexiones.

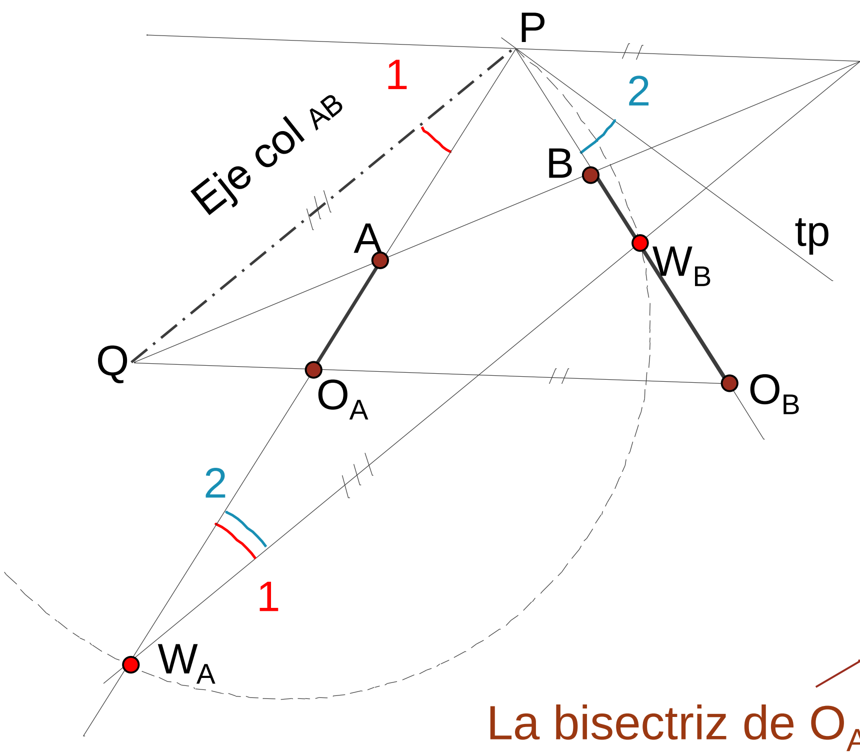


- Intersección normales O_AA, $O_BB \Rightarrow$ P
- Intersección rectas AB y $O_AO_B \Rightarrow$ Q
- Recta QP $\Rightarrow$ Eje de colineación AB
- Por P paralela a $O_AQ \Rightarrow$ intersección con AQ
- Por ese punto de intersección se traza la paralela a PQ $\Rightarrow$ intersección con O_AA y $O_BB \Rightarrow W_A$ y W_B

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.10 Teorema de Bobillier

- “La bisectriz del ángulo que forman las normales a las trayectorias de dos puntos coincide con la bisectriz del ángulo que forman la dirección de la velocidad de sucesión (tangente polar) y el eje de colineación”.



- Conocida la C. I., conocemos la tp.
- Se verificará por ser ángulos alternos internos que:

(1) $$\widehat{P W_A W_B} = \widehat{QPW_A}$$

- por abarcar el mismo arco PW_B

(2) $$\widehat{tp\,P\,O_B} = \widehat{QP\,W_A}$$

- Y por tanto $\widehat{tp\,P\,O_B} = \widehat{P\,W_A W_B}$

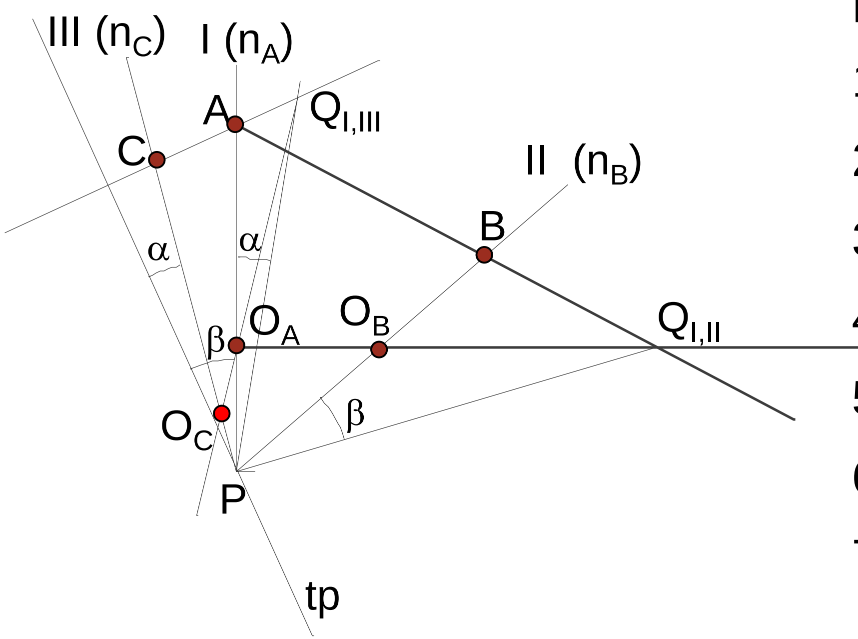
La bisectriz de $\widehat{O_APO_B}$ es la misma que la de $\widehat{QPtp}$

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila

2.10 Teorema de Bobillier

CONSTRUCCIÓN DE ARONHOLD

Dados dos pares de puntos conjugados A, OA y B, OB, permite hallar el conjugado de un tercer punto C perteneciente al mismo plano móvil.

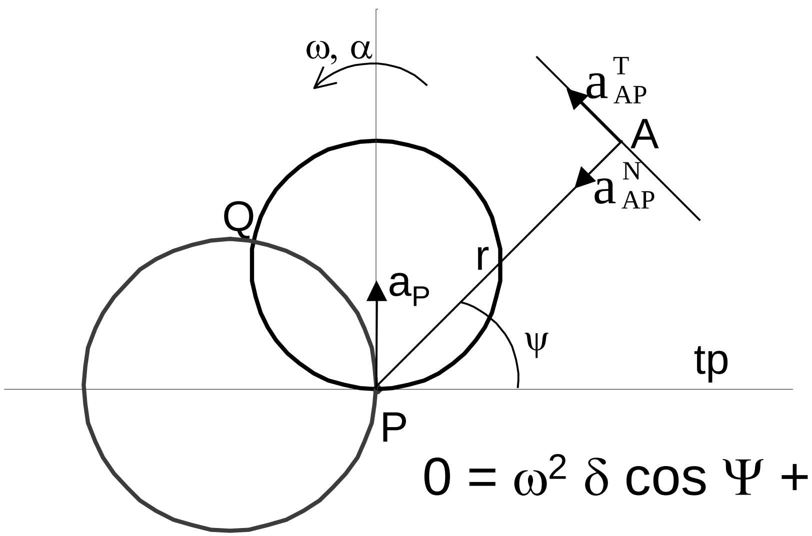


Pasos:

1. Intersección I, II $\Rightarrow$ P (CIR)
2. $\overline{AB}, \overline{O_A O_B} \Rightarrow Q_{I\,II}$
3. $\overline{PQ_{I\,II}} \equiv$ Eje de colineación I, II.
4. β (eje col $_{I\,II}$, II) = Áng. (I, tp) $\Rightarrow$ tp
5. α (tp, III) = Ang. (I, eje col $_{I\,III}$) $\Rightarrow$ eje col I, III.
6. $\overline{CA}$, eje colineación $_{I\,III} \Rightarrow Q_{I\,III}$
7. $\overline{Q_{I\,III}\,O_A}$, III $\Rightarrow$ $\mathbf{O_C}$ Punto buscado

2.11 Circunferencia de Bresse. Polo de aceleraciones

- CIRCUNFERENCIA DE INFLEXIONES
  - Lugar geométrico de puntos del plano móvil que tienen aceleración normal nula.
- CIRCUNFERENCIA DE BRESSE
  - Lugar geométrico de puntos del plano móvil que tienen aceleración tangencial nula.



$$\vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{a}^N_{AP} + \vec{a}^T_{AP}$$

Proyectando en dirección perpendicular a AP:

$$a^T_A = a_P \cos\psi + \alpha\, r$$

$$\left.\begin{array}{l} a_P = \omega\, u \\ u = \omega\, \delta \end{array}\right\} a_P = \omega^2\, \delta$$

Sustituyendo y haciendo $a^T_A = 0$:

$$0 = \omega^2\, \delta \cos\Psi + \alpha\, r \rightarrow r = -\frac{\omega^2}{\alpha}\,\delta\cos\psi \left\{\begin{array}{l} \text{Cfcia. de } \Phi = \dfrac{\omega^2}{\alpha}\,\delta \\ \text{Sobre tp y pasa por P.} \end{array}\right.$$

Las circunferencias de Bresse e Inflexiones se cortan en **Q**, punto sin aceleración:

El polo de aceleraciones

Itziar Martija López
Maider Loizaga Garmendia
Departamento de Ingeniería Mecánica
Mekanika Ingeniaritza Saila