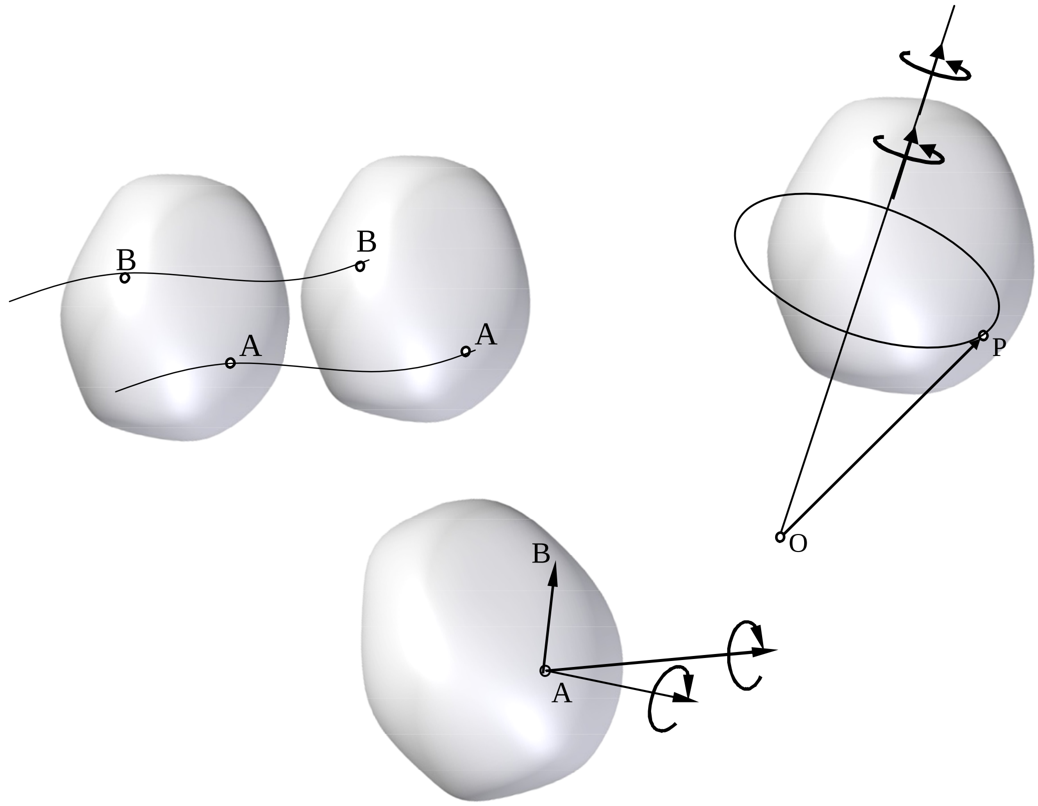
Solido zurrunaren zinematika

Kurtsorako oinarrizko teoria: IV ZATIA

Solido zurrunaren zinematika, ariketa azalduak



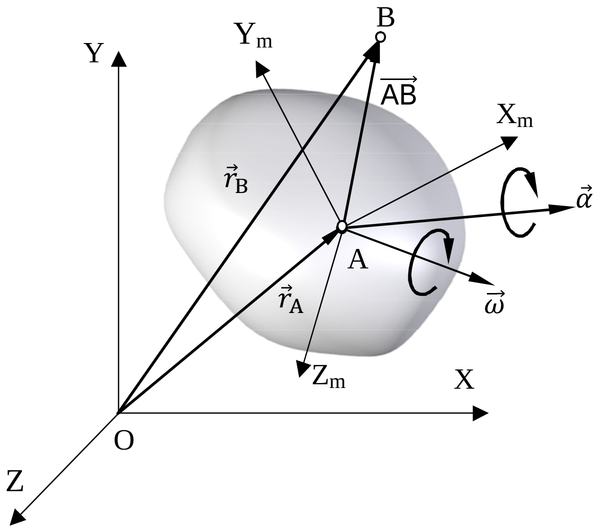
Ramírez López-Para, Pilar
Loizaga Garmendia, Maider
López Soto, Jaime

2016 OCW OpenCourseWare
BY NC SA

4. MUGIMENDU ERLATIBOA

4.1. Transladatzen den erreferentzi sistema batekiko puntu baten mugimendu erlatiboa

OXYZ erreferentzi sistema finkoa, transladatzen den O´X´Y´Z´ sistema eta sistema mugikorrean mugitzen den P puntua definitzen dira, ikusi 23. Irudia.



1. Irudia

Datuak:

$\vec{r}_P$: P puntuaren posizioa erreferentzi sistema finkoan.

$\vec{r}_A$: A puntuaren posizioa erreferentzi sistema finkoan.

$\vec{r}_P{}'$: P puntuaren posizioa sistema mugikorrean.

Alboko 23. Irudian ikus daitekeenez:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_P{}' \qquad (49)$$

Abiaduren eremua aurreko adierazpena (49) sistema finkoan deribatuz lortzen da:

$$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (50)$$

Aurreko adierazpeneko (50) gaiak aztertuz:

$\vec{r}_P$ eta $\vec{r}_A$ sistema finkoan definitutak daude eta bere deribatuak hurrengoak dira:

$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_P$ ⇨ P puntuaren abiadura absolutua. Abiadura absolutua beti sistema finkoarekiko definitzen da.

$\left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_A$ ⇨ sistema mugikorraren translazioa, P puntua O´X´Y´Z´ sistemari soldatuta egongo balitz edukiko zuen abiadura da. Gai honek P puntuaren arrastre abiadura adierazten du.

$\vec{r}_P{}'$ trasladatzen den sistema mugikorrean definituta dago, beraz hurrengoa betetzen da:

$$\left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'} = \vec{v}_P{}'$$

⇨ P puntuak sistema mugikorrarekiko daukan abiadura erlatiboa definitzen du. Behatzaile batek sistema mugikorretik ikusten duen P puntuaren abiadura da.

Eta emaitza hauek (50). adierazpenean ordezkatuz, hurrengoa lortzen da:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{v}_{\mathrm{P}}{}' \qquad (51)$$

Azelerazioen eremua aurreko adierazpena (51) deribatuz lortzen da:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \vec{a}_{\mathrm{A}} + \vec{a}_{\mathrm{P}}{}' \qquad (52)$$

Aurreko bi adierazpenak aztertzean (51) eta (52) transladatzen den sistema batetan mugitzen den puntu baten mugimendu absolutua, hurrengo bi mugimenduen gainezarpena bezala aztertu daiteke:

- **Arrastreko** mugimendu bat**:** puntua mugitzen den sistemari soldatuta egongo balitz edukiko zuen abiadura da. Logikoa denez, sistema mugikorrak finkoarekiko daukan abiadurarekin batera dator. Gai honek puntuak mugimenduan dagoen sistema batetan definituta egoteagatik daukan abiadura/azelerazioa adierazten du.
- Mugimendu **erlatibo** bat**:** sistema mugikorrean kokaturiko behatzaile batentzat puntuak duen mugimendua.

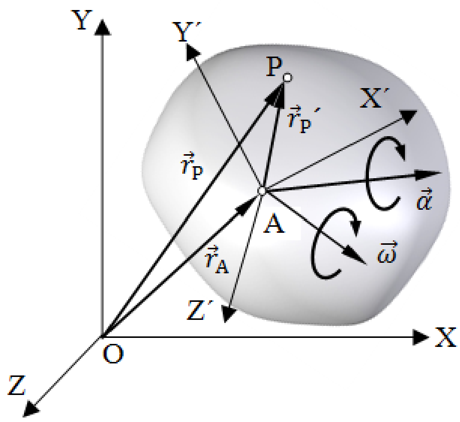
$$\boxed{\begin{matrix}\vec{v}_{\mathrm{P}}\\ \vec{a}_{\mathrm{P}}\end{matrix}} \begin{matrix}=\\=\end{matrix} \boxed{\begin{matrix}\vec{v}_{\mathrm{A}}\\ \vec{a}_{\mathrm{A}}\end{matrix}} \begin{matrix}+\\+\end{matrix} \boxed{\begin{matrix}\vec{v}_{\mathrm{P}}{}'\\ \vec{a}_{\mathrm{P}}{}'\end{matrix}}$$

⇩ Mugimendu **absolutua** ⇩ **Arrastre** mugimendua ⇩ Mugimendu **erlatiboa**

4.2. Errotatzen duen erreferentzi sistema batekiko puntu baten mugimendu erlatiboa. Coriolis-en azelerazioa

Aurreko atalean transladatzen den sistema batetan definituriko P puntuaren mugimendua aztertu da; oraingoan, sistema translazioa izateaz gain errotatzen egongo da, kasu orokorra izango da, beraz.

24. Irudian, hurrengoak definitzen dira, OXYZ sistema finkoa, eta $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ abiadura linealarekin eta $\vec{a}_{\mathrm{A}}$ azelerazio linealarekin transladatzen den eta errotatzen duen O´X´Y´Z´ erreferentzi sistema, bere abiadura eta azelerazio linealak $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ direlarik; azkenik sistema mugikorrean mugitzen den P puntua definitzen da.



2. Irudia

Hurrengo bektoreak definitzen dira:

$\vec{r}_P$: B puntuaren posizioa erreferentzi sistema finkoan.

$\vec{r}_A$: A puntuaren posizioa erreferentzi sistema finkoan.

$\vec{r}_P´$: B puntuaren posizioa sistema mugikorrean.

Aurreko atalean egin den bezala, alboko grafikoa (24. Irudia) aztertuz, hurrengo erlazioa idatzi daiteke:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_P´ \qquad (53)$$

<u>Abiaduren eremua</u> aurreko adierazpena (53) sistema finkoarekiko deribatuz lortzen da:

$$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{r}_P´}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (54)$$

Aurreko kasuan gertatzen zen bezala, $\vec{r}_P$ eta $\vec{r}_A$ bektoreak sistema finkoan definituak daude eta beraz zuzenean deribatu daitezke; $\vec{r}_P´$ ordea sistema mugikorrean definituta dago eta beraz bere deribatua lortzeko Boure-ren legea aplikatu beharko da.

$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_P$ ⇨ sistema finkoarekiko P puntuaren <u>abiadura absolutua</u>.

$\left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_A$ ⇨ sistema mugikorraren translazio abiadura.

$\left(\frac{d\vec{r}_P´}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_P´}{dt}\right)_{X´Y´Z´} + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_P´ = \vec{v}_P´ + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_P´$ ⇨ Non $\left(\frac{d\vec{r}_P´}{dt}\right)_{X´Y´Z´}$ gaiak P puntuak sistema mugikorrarekiko duen abiadura erlatiboa adierazten duela kontutan hartu den.

Bi emaitza hauek aurreko 54. adierazpenean ordezkatuz: (55)

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_P´ + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_P´$$

Eta gaiak berrordenatuz:

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_P´}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_P´}_{v_{erlatiboa}} \qquad (56)$$

Transladatzeaz gain errotatzen duen erreferentzi sistema batetan mugitzen den puntu batetako abiadura absolutua hurrengo bi abiadurak batuz aztertu daiteke:

- **Arrastre** abiadura: puntua sistema mugikorrari soldatuta balego edukiko lukeen abiadura da. Suposaketa honetan, sistema eta puntua batera mugitzen dira, mugimendu orokorra duen solido bat balitz bezala, bere mugimendua, sistema mugikorra definitzen duten magnitudeak definituko dutelarik: $\vec{v}_A$, $\vec{a}_A$, $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$. Solido zurrunaren mugimendu orokorra aztertzerakoan lortutako ondorioa gogoratuz (46), P puntuaren mugimendua bi mugimenduen gainezarpena bezala aztertu daiteke. Alde batetik, erreferentzi sistemaren jatorri bezala hartutako solido bereko puntu batetako translazioa, A puntua adibidez, eta bestetik, puntu horretatik pasatzen den ardatz baten inguruko P puntuaren errotazioa.
- Abiadura **erlatiboa**: sistema mugikorrean dagoen behatzaile batentzat P puntuak duen abiadura da. Bistakoa denez, gai hau sistema mugikorrean definituriko posizio bektorearen deribatua da, sistema mugikorrarekiko.

Azelerazioen eremua (55). adierazpena sistema finkoarekiko deribatuz lortzen da:

$$\left(\frac{d\vec{v}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{v}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} \wedge \vec{r}_P{}' + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (57)$$

Gai hauek aztertuz:

$\left(\frac{d\vec{v}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{a}_P$ ⇨ sistema finkoarekiko P puntuaren azelerazio absolutua.

$\left(\frac{d\vec{v}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{a}_A$ ⇨ sistema mugikorraren translazio azelerazioa.

$\left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}' = \vec{a}_P{}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P$ ⇨ Non $\left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'}$ gaiak, P puntuak sistema mugikorrarekiko duen azelerazio erlatiboa adierazten duela kontutan hartu den.

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} \wedge \vec{r}_P{}' = \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \overbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega}}^{=0}\right] \wedge \vec{r}_P{}' = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P{}'$$

$$\vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{\omega} \wedge \left[\left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}'\right] = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}')$$

Aurreko (55). adierazpenean ordezkatuz:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_P{}' + \vec{\omega}\wedge\vec{v}_P{}' + \vec{\alpha}\wedge\vec{r}_P{}' + \vec{\omega}\wedge\vec{v}_P{}' + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}_P{}') \tag{58}$$

Eta gaiak ordenatuz:

$$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_A + \vec{\alpha}\wedge\vec{r}_P{}' + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}_P{}')}_{a_{arrastre}} + \underbrace{\vec{a}_P{}'}_{a_{erlatiboa}} + \underbrace{2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_P{}'}_{a_{Coriolis}} \tag{59}$$

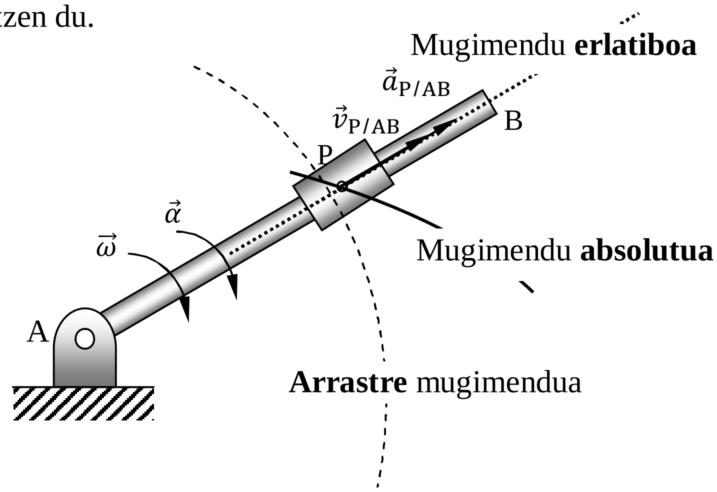
Transladatzeaz gain errotatzen duen erreferentzi sistema batetan mugitzen den puntu batetako azelerazio absolutua, hurrengo hiru azelerazioen batuketa bezala azteztu daiteke:

- **Arrastre** azelerazioa: puntua, $\vec{v}_A$, $\vec{a}_A$, $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ magnitude zinematikoen bidez definitua dagoen erreferentzi sistemari soldatuta dagoen solido zurrunekoa balitz bezala aztertzerakoan duen azelerazioa da.
- Azelerazio **erlatiboa:** sistema mugikorrean dagoen behatzaile batentzat, P puntuak duen azelerazioa da.
- **Coriolis-en** azelerazioa: Boure-ren legea magnitude bektorialei aplikatzean agertzen den gai bat da.

Aurreko (56) eta (59) adierazpenak aztertuz, hurrengo paralelismoa ikusi daiteke, (51) eta (52) adierazpenetarako lortu denaren antzekoa:

$\vec{v}_P$	=	$\vec{v}_A + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_P{}'$	+	$\vec{v}_P{}'$		
$\vec{a}_P$	=	$\vec{a}_A + \vec{\alpha}\wedge\vec{r}_P{}' + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}_P{}')$	+	$\vec{a}_P{}'$	+	$2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_P{}'$
⇩		⇩		⇩		⇩
Mugimendu **absolutua**		**Arrastre** mugimendua		Mugimendu **erlatiboa**		**Coriolis-en** azelerazioa

Ondoren, adibide erraz baten bidez, mugimendu absolutuaren, arrastre mugimenduaren eta mugimendu erlatiboaren kontzeptuak azalduko dira. 25. Irudian, mekanismo sinple bat irudikatu da; bertan AB barra jarraituz mugitzen den irristagailua ikusi daiteke, barrarekiko dituen abiadura eta azelerazioa $\vec{v}_{P/AB}$ eta $\vec{a}_{P/AB}$ direlarik. Aldi berean, AB barrak $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ abiadura eta azelerazio angeluarrekin biratzen du.



3. Irudia

P puntuaren **arrastre** mugimendua, erreferentzi sistema finkoarekiko mugitzen den sistema batetan definitua egoteagatik duen mugimendua da.

Adibidean irristagailukoa den P puntua, biratzen duen barratik mugitzera behartuta dago; arrastre mugimendua P puntua barrakoa balitz edukiko lukeena da, hau da ibilbide zirkularra jarraituko luke A puntuaren inguruko errotazioa hain zuzen ere.

P puntuaren mugimendu **erlatiboa**, sistema mugikorrean dagoen behatzaile batek ikusten duena da. Sistema mugikorra gelditzean geratzen den mugimendua da.

Adibidean, sistema mugikorra, AB barrak definitzen du, eta beraz mugimendu erlatiboa barratik aztertutakoa da, bere biraketa kontutan hartu gabe. Logikoa denez, irristagailuak barrarekiko duen mugimendua da, eta bistakoa denez, bere norabidea izango du.

Azkenik, P puntuaren **mugimendu absolutua** sistema finko batetik ikusten dena da**,** aurreko bi mugimenduen gainezarpena, hain zuzen.

Adibidean, sistema finkoan dagoen behatzaile batentzat, P puntuak, kurbatura erradio aldakorra duen ibilbide kurboa jarraitzen du.

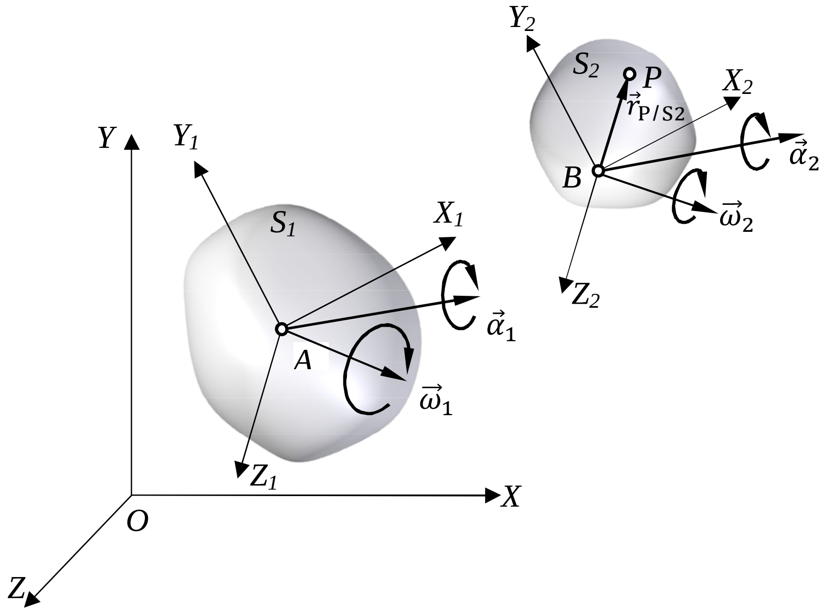
2016 OCW OpenCourseWare cc BY NC SA

4.3. <u>Bi solidoren arteko mugimendu erlatiboa</u>

Aurreko ataletan errotatzen edo transladatzen dauden sistemetan definitutako puntu baten mugimendua ikasi da; atal honetan transladatzen edota errotatzen duen erreferentzi sistema mugikor batekiko solido zurrun baten mugimendu orokorra aztertuko da.

Kasu honetan, *OXYZ* erreferentzi sistema finkoa, eta S_1 eta S_2 solidoak definitzen dira, mugimendu orokor eta independenteekin. Solidoetariko bakoitza erreferentzi sistema mugikor bati lotuta dago, $AX_1Y_1Z_1$, eta $BX_2Y_2Z_2$, haien mugimenduak definitzen dituzten magnitude bektorialak $\vec{v}_A$, $\vec{a}_A$ $\vec{\omega}_1$, $\vec{\alpha}_1$, $\vec{v}_B$, $\vec{a}_B$ $\vec{\omega}_2$ eta $\vec{\alpha}_2$ direlarik.

Ondoren, S_2 sistema mugikorrean, mugitzen den P puntuaren abiaduren eta azelerazioen eremuak definitzen dira.



4. Irudia

4.3.1. S$_1$ sistemarekiko abiadura erlatiboen eremua:

Mugimendu orokorra duen S$_2$ solidokoak diren B eta P puntuen arteko erlaziotik abiatuz, hurrengoa lortzen da:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \tag{60}$$

Bestalde, P eta B puntuetako abiadurak, S$_1$ sistematik planteatu daitezke, arrastreko eta erlatibozko gaietan deskonposatuz:

$$\underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AP}}_{v_{Parrastre}} + \underbrace{\vec{v}_{P/S1}}_{v_{Perlatiboa}} = \underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB}}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_{B/S1}}_{v_{erlatiboa}} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \tag{61}$$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$ erlazioa kontutan hartuz eta aurreko adierazpenean (61) ordezkatuz:

$$\vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{v}_{B/S1} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \tag{62}$$

Sinplifikatuz:

$$\vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_{B/S1} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \tag{63}$$

Eta azkenik hurrengoa lortzen da:

$$\vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_{B/S1} + (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) \wedge \overrightarrow{BP} \tag{64}$$

Aurreko adierazpenak, S$_2$ sistemaren mugimendu orokorraren abiaduren eremua, S$_1$ sistemarekiko definitzen duenez, logikoa da $(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1)$ gaia, S$_2$ sistemak, S$_1$ sistemarekiko duen abiadura adierazteak, hau da:

$$\vec{\omega}_{2/1} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1 \tag{65}$$

Eta beraz, S$_2$ sistemaren abiadura angeluar absolutua, arrastreko abiadura angeluarraren eta abiadura angeluar erlatiboaren gehiketa dela ondorioztatu daiteke.

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1} \tag{66}$$

Azkenik, hurrengoa ondorioztatu daiteke; **abiadura erlatiboen eremua** definitzen duen adierazpena, abiadura absolutuen eremua definitzen duen adierazpenaren antzekoa da, bertan agertzen diren gaiak S$_1$ sistema mugikorrarekiko definituz.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_{B/S1} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}} \tag{67}$$

4.3.2. S$_1$ sistemarekiko azelerazio erlatiboen eremua:

Azelerazioak aztertzeko, S$_1$ sistemarekiko lortutako abiaduren eremua (64) deribatzea beharrezko da. $\overrightarrow{BP}$ bektorea S$_1$ sistemarekiko ondo deribatzeko, Boureren legea aplikatu behar da, S$_1$ sisteman, bektore horren abiadura angeluarra $\vec{\omega}_{2/1}$ dela kontutan izanda.

$$\left(\frac{d\vec{v}_{P/S1}}{dt}\right)_{X_1Y_1Z_1} = \left(\frac{d\vec{v}_{B/S1}}{dt}\right)_{X_1Y_1Z_1} + \left(\frac{d\vec{\omega}_{2/1}}{dt}\right)_{X_1Y_1Z_1} \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \left[\overbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{BP}}{dt}\right)_{X_2Y_2Z_2}}^{=0} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP} \right]$$

(68)

Eta abiadura erlatiboen eremuaren kasuan ondorioztatutakoaren antzera, <u>**azelerazio erlatiboen eremua** definitzen duen adierazpena</u>, azelerazio absolutuen eremua definitzen duen adierazpenaren antzekoa da, bertan agertzen diren gaiak S_1 sistema mugikorrarekiko definituz.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P/S1} = \vec{a}_{B/S1} + \vec{\alpha}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}}$$

(69)

- ⇨ <u>Abiadura eta azelerazio erlatiboen eremua</u> S_1 sistematik ikusita, S_2 sistemak duen mugimendu orokorraren ondorio dira, eta beraz, <u>B puntuaren translazioa eta puntu horretatik pasatzen den ardatz baten inguruko errotazioa gehituz kalkulatu daitezke</u>.

$\vec{v}_{P/S1}$	=	$\vec{v}_{B/S1}$	+	$\vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}$
$\vec{a}_{P/S1}$	=	$\vec{a}_{B/S1}$	+	$\vec{\alpha}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}$
⇩		⇩		⇩
S_1-rekiko mugimendu erlatiboa		B puntuaren translazioa		B puntuaren inguruko errotazioa

4.3.3. <u>Solido zurrun baten azelerazio angeluar absolutuaren kalkulua</u>

Aurreko atalean frogatu denaren arabera, <u>bi solidoen arteko mugimendu erlatibotik abiatuz, abiadura angeluar absolutuen arteko hurrengo erlazioa</u> topatu daiteke:

$$\boxed{\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1}}$$

(70)

Adierazpen hori deribatuz:

$$\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\omega}_{2/1}}{dt}\right)_{XYZ}$$

(71)

Aurreko deribatua (71) kalkulatzeko, $\vec{\omega}_1$ eta $\vec{\omega}_2$ bektoreak sistema finkoarekiko abiadura angeluarrak definitzen dutela kontutan hartu behar da eta beraz haien deribadak zuzenean kalkulatu daitezke. Dena den, $\vec{\omega}_{2/1}$ gaiak, S_1 solidoak S_2 solidoarekiko daukan abiadura angeluar erlatiboa adierazten du eta $\vec{\omega}_1$ abiadura angeluarra duen S_1 sisteman definituta dago eta beraz deribatzeko Boureren legea aplikatu behar da:

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \left(\frac{d\vec{\omega}_{2/1}}{dt}\right)_{X_2Y_2Z_2} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1}$$

(72)

Orain, $\vec{\omega}_{2/1}$ askatuz eta aurreko adierazpenean ordezkatuz, hurrengo ondorioa lortzen da, bertan $\vec{\alpha}_{2/1}$ gaiak, S_2 solidoak S_1 solidoarekiko daukan azelerazio erlatiboa adierazten duelarik.

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1)$$

(73)

Eta eragiketak burututz, solidoen azelerazio absolutuak erlazionatzen duen adierazpena lortzen da. Azkenengo gaia, $\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2$, Resal-en azelerazio osagarria da.

$$\boxed{\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2}$$

(74)

2016 OpenCourseWare
cc BY NC SA