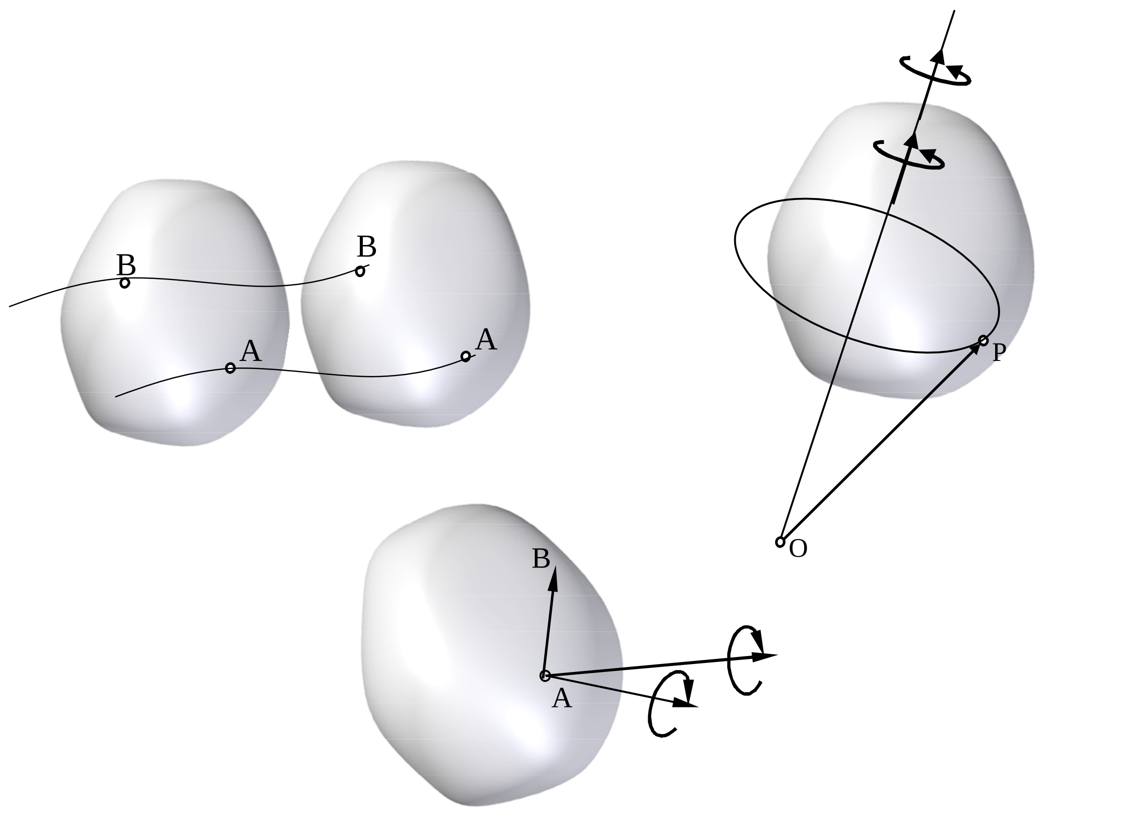
Solido zurrunaren zinematika

Kurtsorako oinarrizko teoria: III ZATIA

Solido zurrunaren zinematika, ariketa azalduak



Ramírez López-Para, Pilar
Loizaga Garmendia, Maider
López Soto, Jaime

2016 OCW OpenCourseWare

3.4. Bektore baten deribatua sistema mugikorretan. Boureren legea.

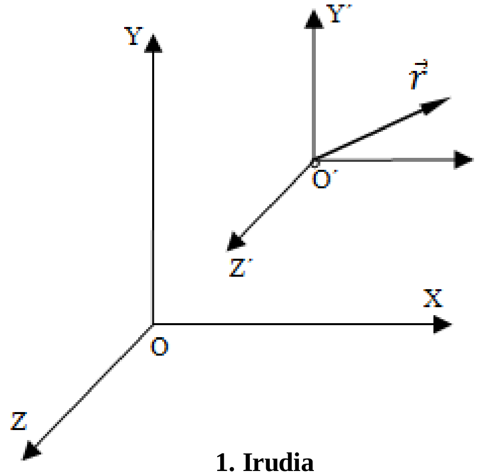
Edozein $\vec{r}$ bektore deribatzerako orduan, nahitaezkoa da, zein erreferentzi sisteman definituta dagoen aztertzea. Bektore horren aldaketak ez dira era berdinean ikusiko, bektorea erreferentzi sistema finko batetan edo erreferentzi sistema mugikor batetan definituta badago. Bektore baten bi erreferentzi sistemekiko deribatuak Boureren legearen bidez erlazionatu daitezke.

Abiapuntua, **transladatzen den sistema batetan definitua dagoen bektore baten deribatua** garatzea da.

Bi erreferentzi sistema definitzen dira, finkoa (OXYZ) eta transladatzen den (O´X´Y´Z´) sistema mugikorra. Helburua bi sistematan garaturiko bi deribatuen arteko erlazioa definitzea da.

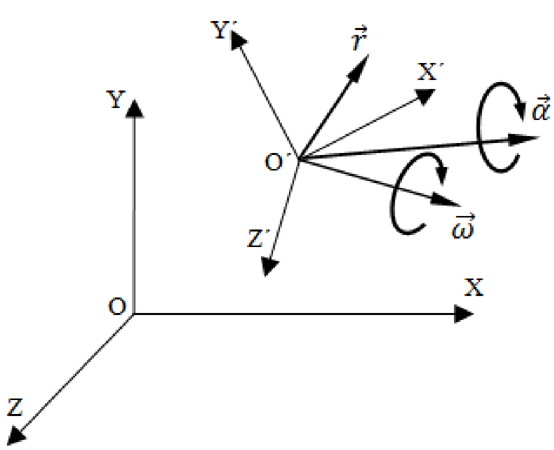
$\vec{r}$ bektorearen deribatua, berdina izango da, bektorea transladatzen den sistema batetan eta erreferentzi sistema finko batetan definituta egonda.

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} \qquad (39)$$



1. Irudia

Orain kasu orokorra aztertuko da, **errotatzen duen erreferentzi sistema batetan definitua dagoen bektore baten deribatua** definituz.



2. Irudia

Bi erreferentzi sistema definitzen dira, bata finkoa (OXYZ) eta beste bat mugikorra (O´X´Y´Z´) bere abiadura eta azelerazio angeluarrak $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ izanik. Berriro, $\vec{r}$ bektorea, erreferentzi sistema mugikorrean definituko da.

$\vec{r}$ bektorearen deribatua, ez da berdina izango, bektorea errotatzen duen sistema batetan eta erreferentzi sistema finko batetan definituta egonda. Bektorearen deribatua kalkulatzeko, ondoren definitzen den Boureren legea aplikatu behar da.

Errotatzen duen erreferentzi sisteman definituriko $\vec{r}$ bektorearen deribatua lortzeko, bektorea sistema mugikorrean deribatu behar da, ondoren sistemaren abiadura angeluarra eta deribaturiko bektorea bektorialki biderkatuz, eta bi gaiak batuz.

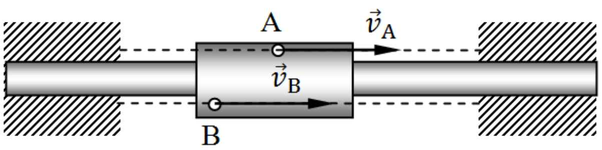
$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (40)$$

3.5. Solido zurrun baten mugimendu orokorra espazioan

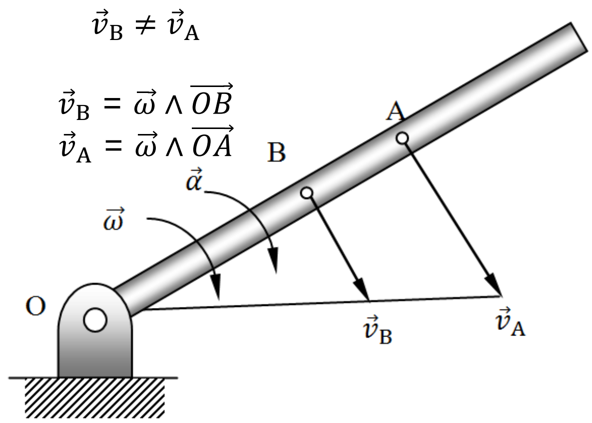
Orain arte translazio eta errotazio hutsak, solido zurrunaren oinarrizko mugimenduak bezala definitu dira. Translazio hutsaren kasuan (16. Irudia) puntu guztiek abiadura eta azelerazio berdinak dituzte eta beraz solidoarentzat abiadura eta azelerazio linealak $\vec{v}$ eta $\vec{a}$ definitu daitezke.

Errotazioaren kasuan (17. Irudia), espazioan solidoaren norabidea aldatzen duten abiadura eta azelerazio angeluarrak, $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$, definitu daitezke.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A$$

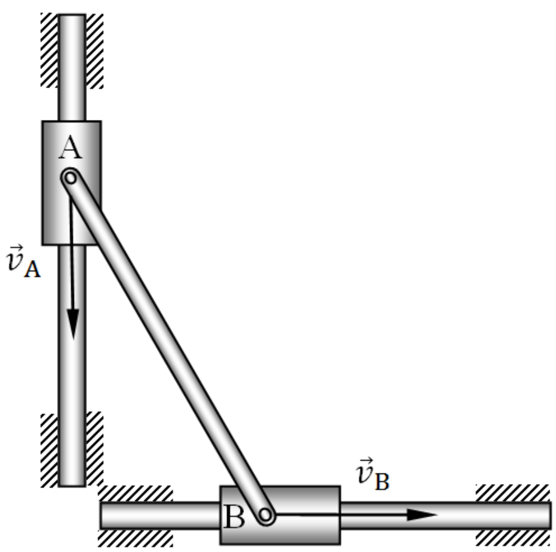


3. Irudia



4. Irudia

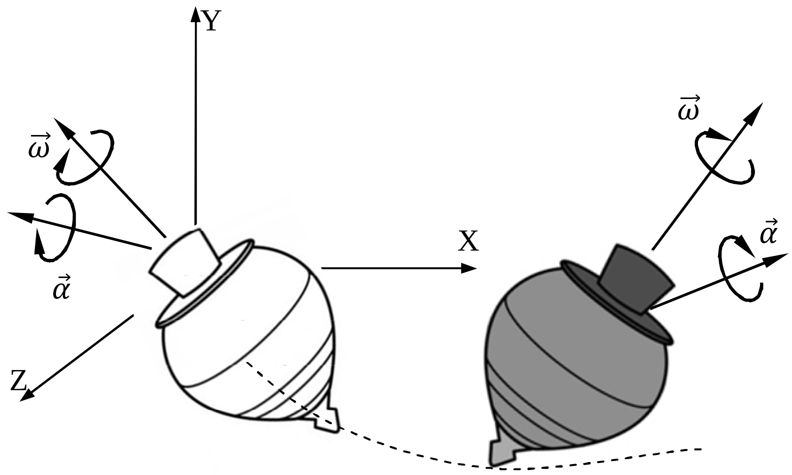
Solidoaren mugimendua, aurreko bi kasuetariko bat ez izatekotan (traslazio hutsa edo errotazio hutsa), solidoak mugimendu orokorra izango du.



5. Irudia

Alboko 18. Irudian, AB barraren mugimendua aztertuz, A eta B puntuetako abiadurak ezberdinak direla eta AB barraren orientazioa aldatzen dela bistakoa da. Beraz AB barrak ez du translazio hutsezko mugimendua izango. Bestalde A eta B puntuek ez dute ardatz berdinaren inguruan ibilbide zirkularra jarraitzen eta beraz, solidoak ez du errotazio hutsa izango. Guzti hori kontutan izanda, solidoaren mugimendua orokorra dela ondorioztatu daiteke.

Mugimendu orokorraren beste adibide bat, oraingoa hiru dimentsiotan, puntu baten inguruan biratu dezakeen ziba baten kasua da. Kasu honetan errotazio ardatzaren orientazioa aldatzen da, edo ziba desplazatu daiteke, ardatza transladatzen delarik. Kasu horietan, $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ ez dute norabide berdina, mugimendu orokorra daukan solido bat izango delarik.



6. Irudia

Kasu honetan $\boldsymbol{\vec{\omega}}$ denboran aldakorra den, aldiuneko biraketa ardatzaren norabidea dauka. Azelerazio angeluarraren eraginez, abiadura angeluarraren modulua eta bere norabidea aldatzen dira; logikoa denez, $\boldsymbol{\vec{\alpha}}$ eta $\boldsymbol{\vec{\omega}}$ norabide ezberdinak dituzte, horrela $\boldsymbol{\vec{\alpha}}$-ren eraginez $\boldsymbol{\vec{\omega}}$ -ren norabidea aldatu ahal izateko. Abiadura eta azelerazio linealen kasuarekin konparaketa bat burutu daiteke, $\boldsymbol{\vec{v}}$ eta $\boldsymbol{\vec{a}}$ orokorrean ez baitaukate norabide berdina; azelerazio tangentzialak a_t, abiaduraren modulua aldatzen du eta a_n abiaduraren norabidea aldatzen du.

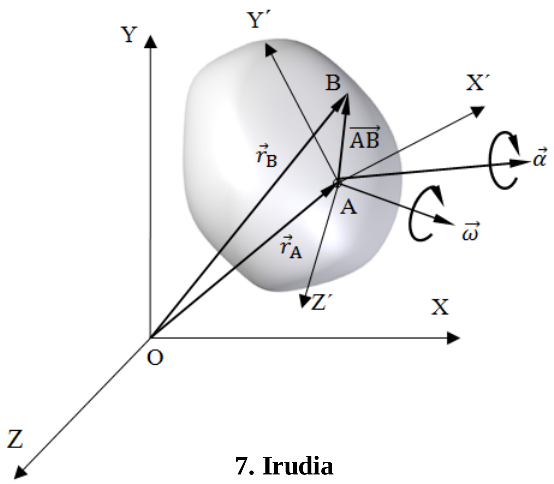
$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{41}$$

3.6. Abiaduren eta azelerazioen eremua mugimendu orokorrean:

Orain, solido zurrun berdinekoak diren bi puntuetako abiaduren arteko erlazioa aztertuko da, ondoren bi puntu horien azelerazioen arteko erlazioa lortzeko.

Hurrengo irudian (20), OXYZ erreferentzi sistema finkoa erabiliz definitu den espazio tridimentsionalean solido zurrun bat aske mugitzen da. Bestalde, solidoari soldatuta O´X´Y´Z´ erreferentzi sistema mugikorra definitzen da.

Aztertutako solidoak, solido batek espazioan eduki dezakeen mugimendurik orokorrena dauka, hau da, transladatzen da, eta errotatzen du, $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ abiadura eta azelerazio angeluarrekin. Mugimendu orokorrean, $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ ez dute norabide berdina, iadanik azaldu denez, errotazio ardatza ez baita finkoa izango.



7. Irudia

Solido zurrunaren mugimendu orokorra aztertzeko abiapuntua, puntu bateko posizio bektorea definitzea da, ondoren denborarekiko birritan deribatzeko:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \tag{42}$$

Abiaduren eremua aurreko (42). adierazpena behin deribatuz lortzen da:

$$\left(\frac{d\vec{r}_B}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} \rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} \tag{43}$$

$\overrightarrow{AB}$ bektorea sistema mugikorrean definituta dagoenez, hau da errotatzen duen sistema batetan, bere deribatua lortzeko Bourearen legea aplikatu behar da:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \tag{44}$$

$\overrightarrow{AB}$ bektorea solido zurruneko bi puntu lotzen dituenez, modulu konstantea dauka eta bere norabidea sistema mugikorretik begiratuta aldatzen ez denez, bektore horren deribatua sistema mugikorrean nulua da, hau da, $\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} = 0$, beraz:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \tag{45}$$

Eta beraz hurrengoa ondorioztatzen da:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}} \tag{46}$$

Emaitza aztertuz, solidoko B puntuaren abiadura, A puntuaren abiadurari, B puntuak A punturen inguruan biratzerakoan daukan abiadura gehituz kalkulatu daiteke.

Solidoaren azelerazioen eremua, aurreko (42). adierazpenaren bigarren deribatua garatuz lortzen da:

$$\left(\frac{d\vec{v}_B}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{v}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (47)$$

Eta hurrengoa ondorioztatzen da:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)} \qquad (48)$$

Solido zurruneko B puntuaren azelerazioa, erreferentzi bezala hartutako A puntuaren azelerazioa eta puntu horren inguruko errotazioaren ondorioz B puntuak daukan azelerazioa gehituz lor daiteke.

Beraz, aurreko (46) eta (48) adierazpenak aztertuz, hurrengoa ondorioztatzen da: edozein B puntuaren abiadura/azelerazioa, erreferentzi bezala hartutako A puntuaren abiadura/azelerazioa eta B puntuak A puntutik pasatzen den ardatz baten inguruko errotazioaren ondorioz daukan abiadura/azelerazioa gehituz kalkulatu daiteke.

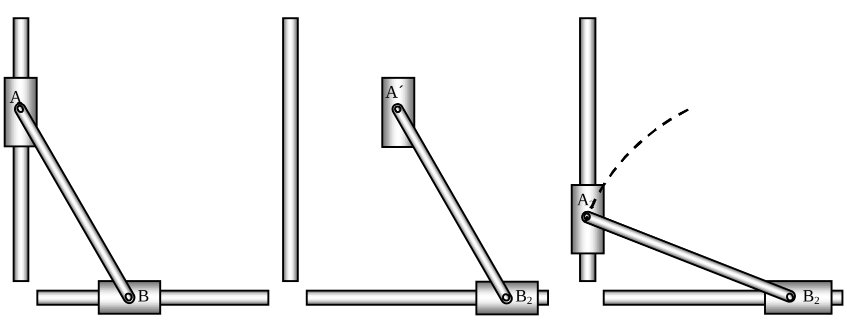
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \underbrace{\vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB}}_{a_{tangentziala}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)}_{a_{normala}}$$

A puntuaren translazioa — A puntuaren inguruko B puntuaren errotazioa

B puntuarentzat garatutako kalkulua solido zurruneko edozein puntura hedatu daiteke, hurrengo ondorioa lortuz:

- ⇨ Solido baten mugimendu orokorra, aldiberean gertatzen diren translazio bat eta errotazio bat batera aztertuz ikasi daiteke. Beraz, solidoaren mugimendua, aldiune bakoitzean, erreferentzia bezala hartutako puntu baten translazioa eta puntu horretatik pasatzen den ardatz baten inguruko errotazioa gainezarriz adierazi daiteke.

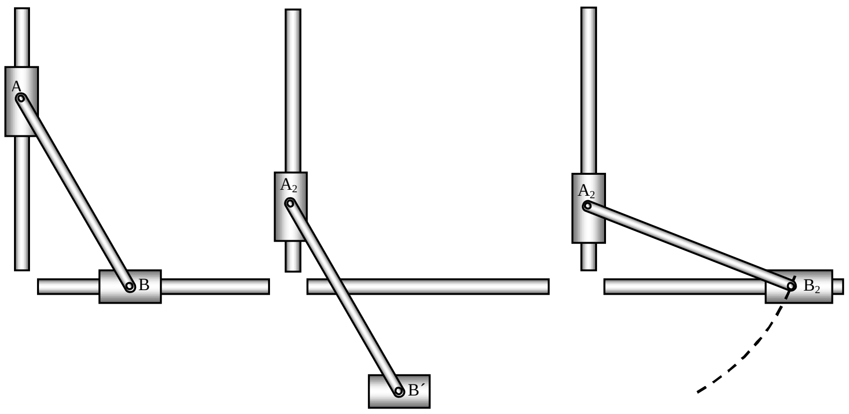


AB barraren mugimendu orokorra, erreferentzi bezala B puntua hartuz

1. Hasierako posizioa
2. AB barra B puntua bezala transladatzen da
3. AB barrak B puntuaren inguruan errotatzen du

8. Irudia

21. eta 22. Irudietan AB barraren mugimendu orokorra ikasi da, translazio eta errotazio bat gainezarriz. Lehenengo kasuan erreferentzia bezala B puntua hartzen da eta bigarren kasuan erreferentzia puntua A izango da. Barrak bi mugimendu hauek bata bestearen ondoren ez dituela burutzen begi-bistakoa da, baina mugimendua horrela gertatuko balitz bezala aztertu daiteke.



AB barraren mugimendu orokorra, erreferentzi bezala A puntua hartuz

1. Hasierako posizioa
2. AB barra A puntua bezala trasladatzen da
3. AB barrak A puntuaren inguruan errotatzen du

9. Irudia

3.7. Mugimendu orokorraren kasuan abiadurak eta azelerazioak kalkulatzeko prozedura

Mugimendu orokorra duen solido zurrun batetako puntuen abiadurak eta azelerazioak kalkulatzeko hurrengo pausuak jarraitu daitezke.

1. Mugimendu orokorra duen solido zurrunaren aukeraketa

   Orokorrean helburua solidoko puntu batetako abiadura eta azelerazioa kalkulatzea izango da. Puntu horrek eta erreferentzi puntuak aukeratutako solidokoak izan behar dute.

2. Erreferentzi puntuaren aukeraketa

   Kalkuluak ahalik eta gehien sinplifikatzen dituen puntu bat aukeratzean datza. Solidoak puntu finko bat badauka, errazena erreferentzi puntu bezala puntu hori aukeratzea izaten da. Solidoak puntu finkorik ez badauka, abiadura eta azelerazio ezagunak dituen puntu bat aukeratu behar da.

3. Mugimendua translazio bat eta errotazio bat gainezarriz aztertu

   Aurrerago ondorioztatu denez, berrikusi (46) eta (48) adierazpenak, edozein punturen abiadura eta azelerazioa erreferentzia puntuaren translazioa eta puntu horren inguruko errotazioa gainezarriz kalkulatu daiteke. Solidoak puntu finko bat badauka, puntu hori erreferentzi bezala hartuz gero, mugimendua errotazio huts bat izango da, translazioa anulatzen baita.