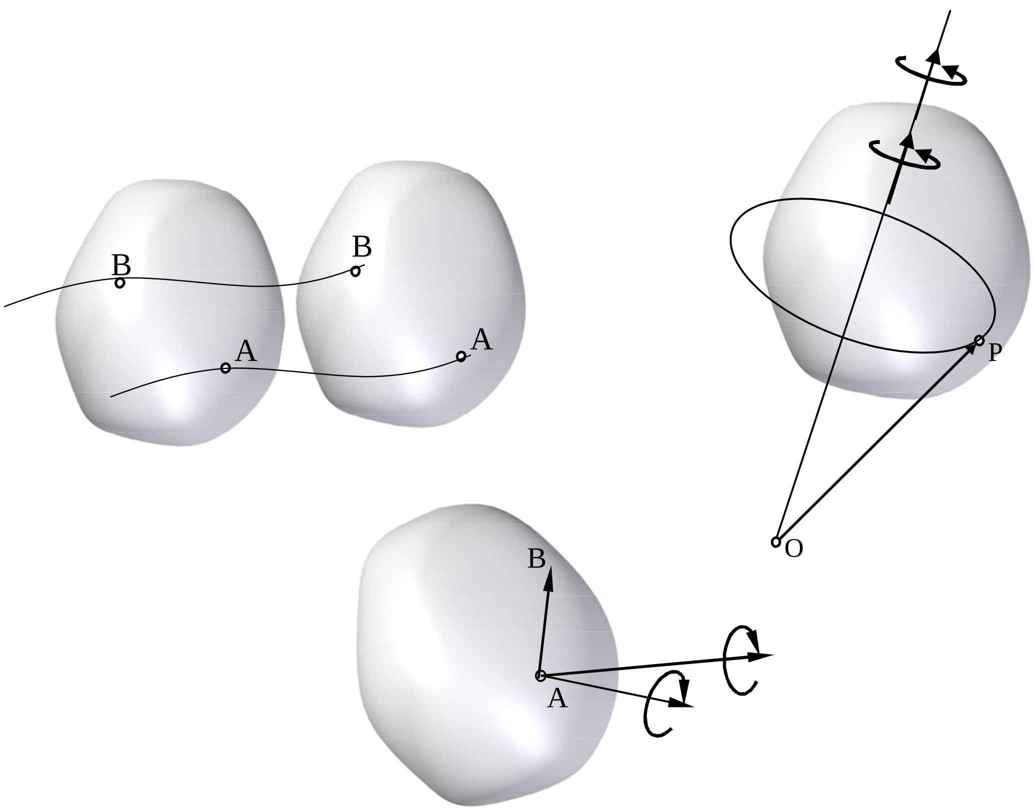
Solido zurrunaren zinematika

Kurtsorako oinarrizko teoria: II ZATIA

Solido zurrunaren zinematika, ariketa azalduak



Ramírez López-Para, Pilar
Loizaga Garmendia, Maider
López Soto, Jaime

3.3. Ardatz finko baten inguruko errotazio hutsa

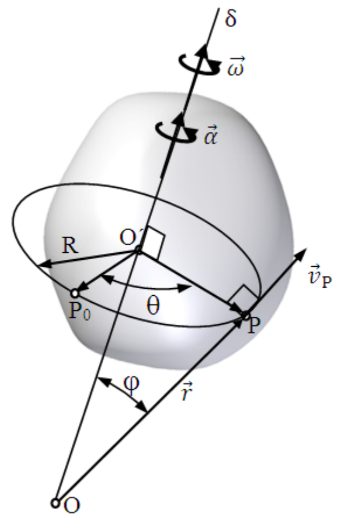
Solido batek errotazio hutsa dauka, ardatz finko baten inguruan biratzen duenean.

⇨ Solidoko puntu guztietako ibilbideak zirkunferentziak dira, eta haien zentroak errotazio ardatza izeneko zuzena definitzen dute. Ibilbide zirkular guztiek, zuzen horri elkarzutak diren planoak definitzen dituzte. Ardatzeko puntuen abiadura nulua da.

Mugimendu hau aztertzeko, δ ardatz finkoaren inguruan biratzen duen solido bat definitzea da abiapuntua, bidebatez, solidoaren abiadura angeluarra eta azelerazio angeluarrak diren $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ magnitude bektorialak definituz.

Solidoak biratzen duenez, bere orientazioa aldatzen du eta beraz zeinen arinen biratzen duen adierazteko parametroren bat definitzea beharrezkoa izango da. Hau da, denbora unitate batetan biratutako angelua adieraziko duen parametro bat definitzea ezinbestekoa da.

θ solidoak bere ardatzaren inguruan biraturiko angelua izanda, bere abiadura angeluarra, $\vec{\omega}$, eta bere azelerazio angeluarra, $\vec{\alpha}$ definitu daitezke, biak magnitude bektorialak izanda:



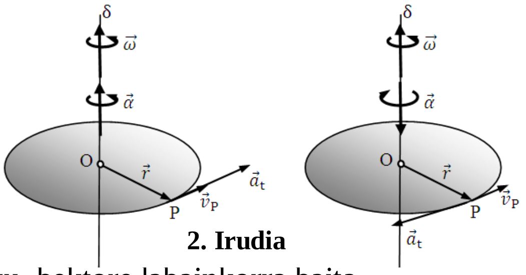
1. Irudia

Solido zurrunaren abiadura angeluarra:

$\vec{\omega}$
- Modulua: $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
- Norabidea: ibilbidearen zirkunferentziari elkarzut, bere zentrotik pasatuz; biraketa ardatzaren norabidearekin batera dator.
- Norantza: eskumako eskuaren legeak definitzen duena.
- Aplikazio puntua: biraketa ardatzeko edozein puntu.

Solido zurrunaren azelerazio angeluarra:

$\vec{\alpha}$
- Modulua: $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt}$
- Norabidea: ibilbidearen zirkunferentziari elkarzut, bere zentrotik pasatzen; errotazio ardatzaren norabidearekin batera dator.
- Norantza: $\vec{\alpha}$ eta $\vec{\omega}$ norantza berdina dutenean solidoak gero eta azkarrago biratzen du. $\vec{\alpha}$ eta $\vec{\omega}$ kontrako norantza badute, solidoa gero eta astiroago doa. Ikusi 10. Irudia.



2. Irudia

- Aplikazio puntua: biraketa ardatzeko edozein puntu, bektore labainkorra baita.

Puntu honetan, definituriko bi magnitude bektorialen inguruko bi idei azpimarratzea interesgarria gertatu daiteke:

- Solido zurrunaren errotazio hutsa definitzen duten $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ abiadura angeluarra eta $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ azelerazio angeluarra definitu daitezke.
- $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ eta $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ solidoa osatzen duten puntuen mugimendu zirkularrak definitzen dituzte. Horrela, solidoko edozein punturen abiadura eta azelerazio linealak kalkulatu daitezke, bere mugimendu zirkularra, errotazio ardatzari elkarzuta den plano batetan aztertuz.

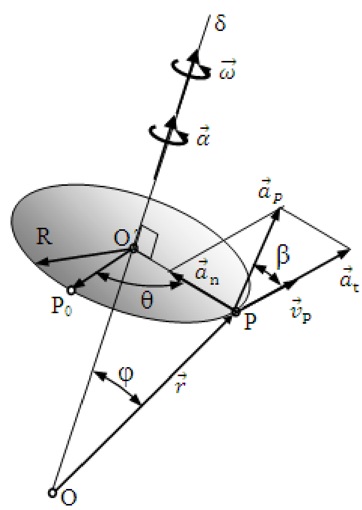
Oharra: Ardatz baten inguruko errotazioaren kasu partikularrean, $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ abiadura angeluarrak eta $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ azelerazio angeluarrak norabide berdina daukate. Aurrerago ikusiko denez, mugimendu orokorraren kasuan, $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ -k eta $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ -k norabide ezberdina izan dezakete.

Ondoren, δ ardatz finkoaren inguruan $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ abiadura angeluarrarekin eta $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ azelerazio angeluarrarekin biratzen duen solido zurruneko P puntuaren abiadura eta azelerazio linealak ezagutu nahi direla suposatu.

Alboko 11. Irudian, errotazio ardatza eta puntu batetako ibilbidea marraztu dira. Ikusi daitekeenez, δ errotazio ardatza ezaguna den O puntutik pasatzen da eta P puntua ardatzari elkarzuta den plano batetan zirkunferentzia bat definitzen du. Zirkunferentzia horren zentroa ardatzean dagoen O´ puntua da.

P puntuaren abiadura lortzeko, aurretik definituriko aldiuneko abiaduraren adierazpenetik abiatuko gara:

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_t \qquad (26)$$



3. Irudia

$\vec{v}_P$

· Modulua: $ds = Rd\theta$ dela jakina da eta 11. Irudian $R = rsen\varphi$ ikusi daiteke, beraz,

$$v_P = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\theta}{dt} = R \cdot \omega = rsen\varphi \cdot \omega$$

· Norabidea: $\vec{u}_t$ bektorearena, ibilbideak definitzen duen zirkunferentziari ukitzaile

· Norantza: mugimenduarena

· P puntuan definituta

Azkenik, P puntuaren abiadura, $\vec{v}_P$ bektorea, solidoaren abiadura angeluarra $\vec{\omega}$ eta ardatzeko edozein puntu erabilita P puntuaren posizioa definitzen duen $\vec{r}$ bektoreen arteko biderkadura bektoriala burutuz lortzen dela ondorioztatu daiteke.

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{27}$$

<u>P puntuaren azelerazioa</u> kalkulatzeko abiadura denborarekiko deribatzen da. Lortutako adierazpena azelerazioaren osagai intrintsekoetan deskonposatu daiteke: azelerazio tangentziala eta azelerazio normala.

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha} \wedge \vec{r}}_{a_{tangentziala}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})}_{a_{normala}} \tag{28}$$

<u>Azelerazio tangentziala</u>: $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}$ (29)

$\vec{a}_t$
- · Modulua: $a_t = \alpha \cdot rsen\varphi = R \cdot \alpha$ (30)
- · Norabidea: P puntuak definituriko zirkunferentziari ukitzaile
- · Norantza: α-ak definitzen duena
- · Jatorria P puntuan

<u>Azelerazio normala</u>: $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P$ (31)

$\vec{a}_n$
- · Modulua: $a_n = \omega \cdot v_P \cdot sen90° = \omega \cdot R \cdot \omega = \omega^2 \cdot R$ (32)
- · Norabidea: Ibilbideari normala
- · Norantza: P puntuak definitzen duen zirkunferentziaren zentrorantza
- · Jatorria P puntuan

P puntuak definitzen duen zirkunferentziaren O´ puntua ezagutzen bada, azelerazioaren bi osagaiak eskalarki kalkulatu daitezke.

Azkenik, azelerazioaren modulua eta azelerazioak tangentearekin osatzen duen β angelua kalkulatu daitezke hurrengo adierazpenen bidez:

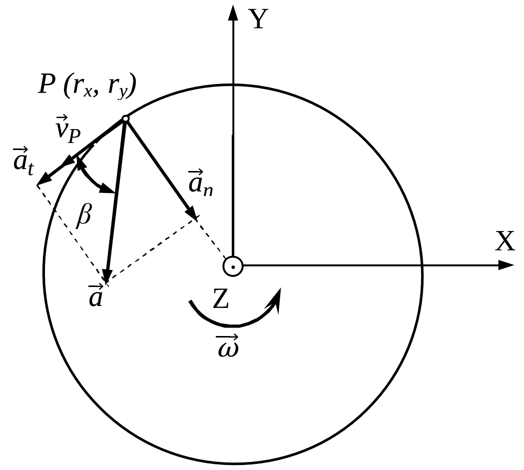
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2 \cdot \alpha^2 + R^2 \cdot \omega^4} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{33}$$

$$tg\beta = \frac{a_n}{a_t} \tag{34}$$

3.3.1. Mugimendu zirkularra planoan

Mugimendu zirkularra XY planoan gertatzen den kasuetan, aurreko atalean garatutako abiaduren eta azelerazioen kalkulua sinplifikatu daiteke.

Ibilbidearen zirkunferentzia, abiadura eta azelerazioa, XY planoan definituak egoteaz gain, $\vec{\omega}$ abiadura angeluarra eta $\vec{\alpha}$ azelerazio angeluarra planuari elkartzutak dira, hau da, Z ardatzari paraleloak.



4. Irudia

P puntuari dagokion abiaduraren azterketa burutzeko (27.) adierazpenetik abiatuko da.

P puntuaren abiadura: $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{P}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{\boldsymbol{r}}$

$\vec{v}_P$
- Modulua: $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ eta $\vec{\boldsymbol{r}}$ elkarren artean elkarzutak direnez, $\boldsymbol{v_P = r \cdot sen90° \cdot \omega = \omega \cdot R}$ (35)
- Norabidea: XY planoan definituriko zirkunferentziari elkarzut.
- Norantza: mugimenduarena
- P puntuan definituta

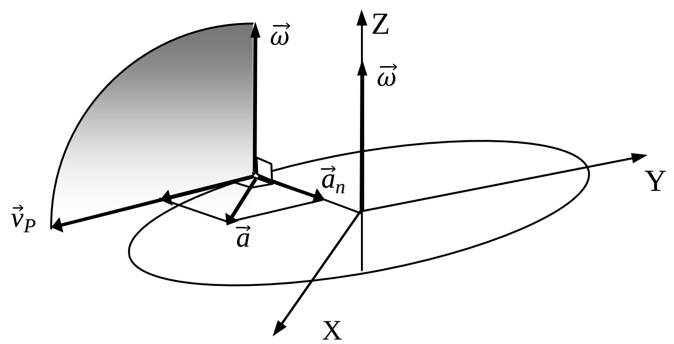
P puntuaren azelerazioa aztertzeko aurreko kasu orokorrerako lortutako azelerazioaren osagai intrintsekoen adierazpenetik abiatuko gara:

Azelerazio tangentziala: $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{t}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \vec{\boldsymbol{r}}$

$\vec{a}_t$
- Modulua: $a_t = R \cdot \alpha$ (36)
- Norabidea: XY planuan definituriko zirkunferentziari ukitzaile
- Norantza: α positiboa bada, abiaduraren norantza berdina; α negatiboa bada kontrakoa
- P puntuan definituta

<u>Azelerazio normala</u>: $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P$

$$\vec{a}_n \begin{cases} \cdot \text{ Modulua: } a_n = \omega \cdot (\omega \cdot R) sen 90° = \omega^2 \cdot R \\ \cdot \text{ Norabidea: } \vec{\omega} \text{ eta } \vec{v}_P \text{ definituriko planoari elkartzut, normalaren norabidean} \\ \cdot \text{ Norantza: zirkunferentziaren zentrorantz.} \\ \cdot \text{ P puntuan definituta} \end{cases} \tag{37}$$



5. Irudia

Azelerazio normalaren norabidea eta noranzkoa lortzeko beste modu bat, aurretik definituriko $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$, biderkadura bektoriala, analitikoki garatzean datza:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r_x & r_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega \cdot r_y & \omega \cdot r_x & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 \cdot r_x \vec{i} - \omega^2 \cdot r_y \vec{j} = -\omega^2 \cdot \vec{r} \tag{38}$$

Laburbilduz, abiadura normala, $\omega^2 \cdot r$ balioko moduloa eta posizio bektorearen kontrako norantza duen bektorea dela ondorioztatu daiteke. Adierazpen honek, $\vec{a}_n = -\omega^2 \cdot \vec{r}$, kalkuluak sinplifikatzen ditu, eta $\vec{r}$ bektorearen koordenatuen kalkulua erraza den kasuetan erabili daiteke (hau higidura lauan eta zenbait kasu espazialetan gertatuko da) .