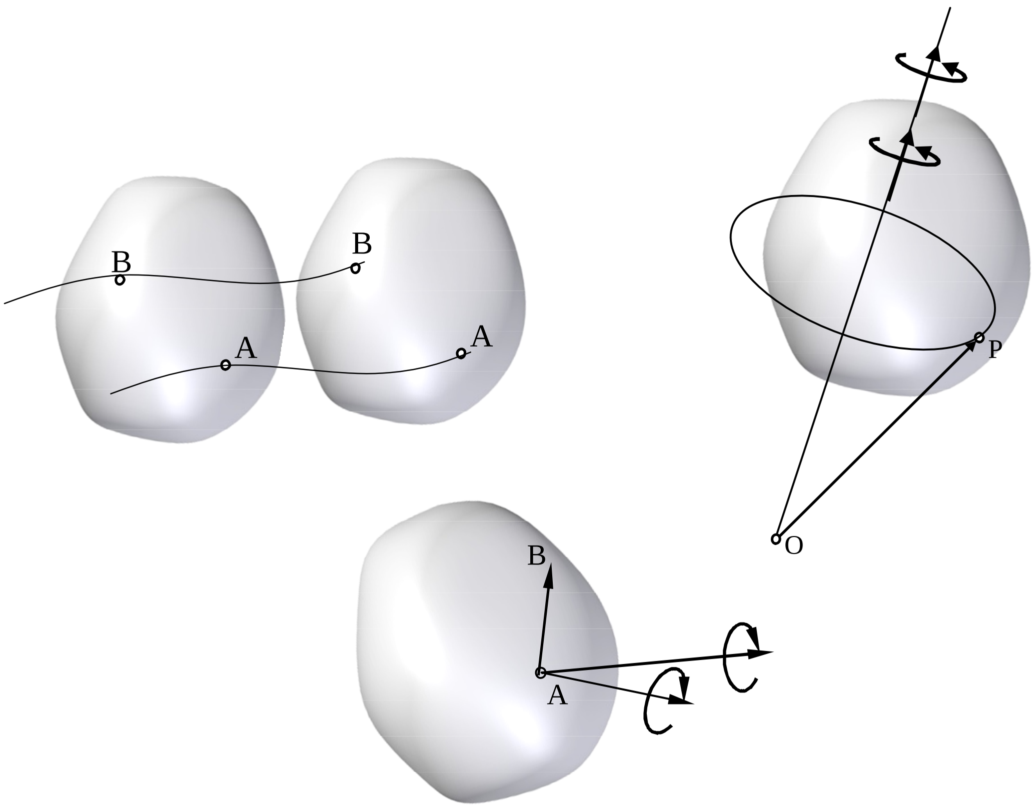
Solido zurrunaren zinematika

Kurtsorako oinarrizko teoria: I ZATIA

Solido zurrunaren zinematika, ariketa azalduak



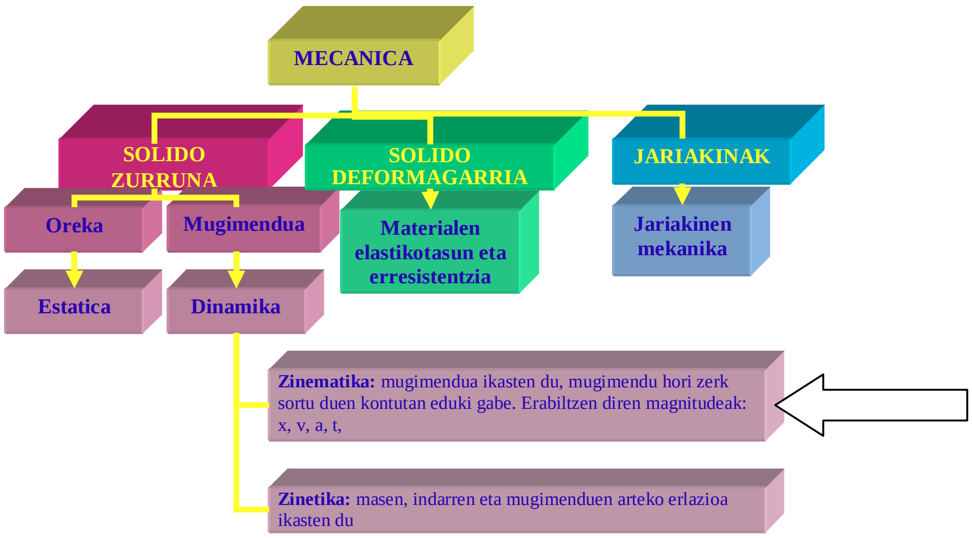
Ramírez López-Para, Pilar
Loizaga Garmendia, Maider
López Soto, Jaime

2016

1. SARRERA

1.1. Zinematikaren definizioa

Sarrera honetan zinematikaren oinarrizko kontzeptuak definituko dira. Abiapuntua, zinematika mekanikaren eremuan kokatzea da.



1. Irudia

Zinematikak mugimendua denboraren menpe ikasten du, mugimendu hori zerk sortu duen kontutan izan gabe.

Erabiltzen diren magnitudeak hurrengoak dira: luzera (x), abiadura (v), azelerazioa (a), denbora (t).

Bestalde, zinematikaren esparruan hurrengo sailkapena egin daiteke:

- Partikularen zinematika

Puntu baten mugimendua ikasten du, planoan zein espazioan, puntu horren ibilbidea, abiadura eta azelerazioa aztertuz.

Solido zurrun baten dimentsioak, bere desplazamenduekin konparatuta oso txikiak direnean, solido horren mugimendua, partikula batena balitz bezala aztertu daiteke, solidoaren grabitate zentroa erabiliz (ad: hegazkin baten mugimendua).

- Solido zurrunaren zinematika

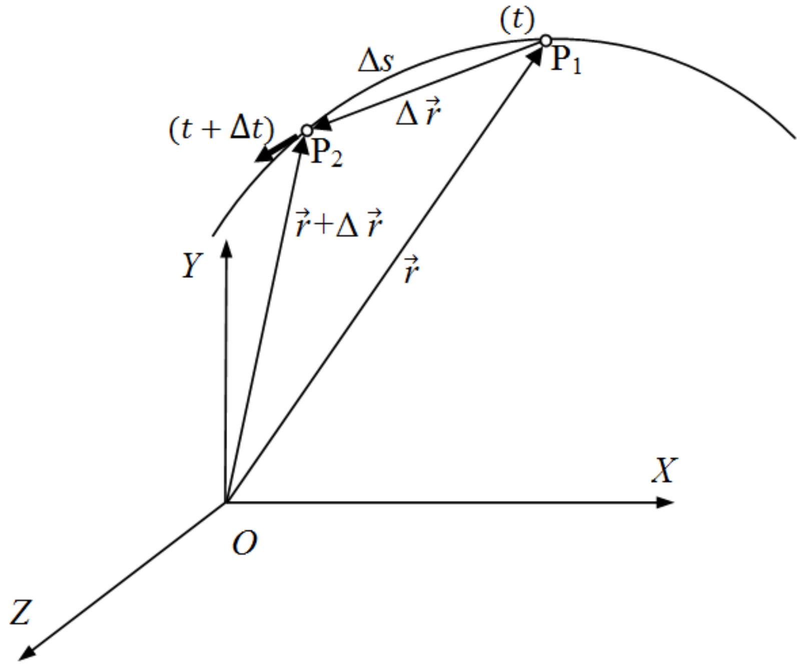
Solido zurrunaren zinematika aztertzen du. Solido zurrunak errotatu dezake eta solidoa osatzen duten puntuek ibilbide, abiadura eta azelerazio ezberdinak eduki dezakete. Horrela, solido zurrunaren zinematika erabiliz, solidoa osatzen duten puntuetako abiadurak eta azelerazioak eta solidoaren abiadura eta azelerazio angeluarrak kalkulatu ahal izango dira.

1.2. Oinarrizko definizioak

Posizio bektorea, puntu baten posizioa definitzen duen bektorea da, P puntu mugikor hori O jatorriarekin lotuz.

$$\vec{r} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k} \quad (1)$$

2. Irudian, P puntuari dagokion hasierako posizioa P_1 eta Δt denbora tartea pasa eta gero P_2 posizio berria ikusten dira.



2. Irudia

Puntu baten mugimendua, bere posizio bektorea denboraren menpe idatziz definitu daiteke. Adierazpen horri **ibilbidearen ekuazio bektoriala** deritzo.

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{\imath} + y(t) \cdot \vec{\jmath} + z(t) \cdot \vec{k} \quad (2)$$

Ibilbidea: puntu batek denboran zehar izan dituen espazioko kokapen ezberdinek definitzen duten lerroa. Puntu batek jarraitutako lerroaren izaeraren arabera hurrengo sailkapena egin daiteke:

- <u>Mugimendu kurboa</u>: bere ibilbidea lerro orokor bat bada. Mugimendu mota hau hurrengo bi mugimenduen kasu orokorra kontsideratu daiteke.
- <u>Mugimendu zuzena</u>: ibilbidea lerro zuzen bat denean.
- <u>Mugimendu zirkularra</u>: bere mugimendua zirkunferentzia bat denean.

Desplazamendua bektorea, denbora tarte bat aztertzean puntu batetako hasierako eta bukaerako posizioak lotzen dituen bektorea da. Posizio bektorearen magnitude eta norabide aldaketak adierazten ditu.

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k} \qquad (3)$$

Denbora tarte bat aztertzean, puntu batetako posizio aldaketa, bere ibilbidearen gainean neurtuta, hau da, Δ**s**, **distantzia** izeneko magnitude eskalarraren bidez definitzen da.
Denbora tartea zerorantz hurbiltzean, **desplazamendu bektorea** diferentziala bihurtzen da.

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k} \qquad (4)$$

Era berean, aipatutako distantzia diferentziala bihurtzen da, **ds**. Kasu honetan desplazamenduaren modulua eta ibilitako distantzia berdindu daitezke.

$$|d\vec{r}| = ds \qquad (5)$$

2. PARTIKULAREN ZINEMATIKA

2.1. Partikularen abiadura

P_1 puntutik P_2 puntura mugitzen den gorputz mugikor bat emanda (ikusi 2. Irudia), **aldiuneko abiadura** t aldiunean, posizio bektorea denborarekiko deribatuz lortzen da.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (6)$$

Aldiuneko abiadura, $\vec{v}$, hurrengo eratara adierazi daitekeen magnitude bektoriala da:

- Bere osagai kartesiarrak erabiliz:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} \qquad (7)$$

- Bere modulua eta norabidea erabiliz. Horretarako, aldiuneko abiaduraren adierazpenetik abiatuta, hurrengo eragiketa burutuz:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\overbrace{d\vec{r}}^{norabidea}}{ds} \cdot \frac{\overbrace{ds}^{modulo}}{dt} \qquad (8)$$

Eta aldiuneko abiaduraren hurrengo ezaugarriak definitu daitezke:

$\vec{v}$:

· Modulua: $v = \dfrac{ds}{dt}$ [m/s]; denbora tarte batetan ibilitako distantzia definitzen du.

· Norabidea: $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = lim_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$; non $\Delta s \to 0$, $\Delta\vec{r}$ eta Δs moduloak berdinak dira eta $\Delta\vec{r}$ ibilbideari ukitzaile egiten da P_1 puntuan. $\vec{u}_t$ bektore unitarioa definitzen da:

$\to \dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}_t$, ibilbideari ukitzailea den bektore unitarioa P_1 puntuan.

· Norabidea: mugimenduarena.

· Aplikazio puntua: P_1 puntua (bektore finkoa)

Honela, aldiunezko abiadura bere modulua eta ibilbideari ukitzailea den eta bere norabidea eta norantza definitzen dituen bektore unitario bat erabiliz idatzi daiteke:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_t = v \cdot \vec{u}_t \qquad (9)$$

2.2. Partikularen azelerazioa

Azelerazioak abiaduraren aldaketa denboraren menpe neurtzen du. **Aldiuneko azelerazioa** gorputz mugikor baten aldiuneko azelerazioa t aldiune batetan abiadura denborarekiko deribatuz definitzen da.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (10)$$

Abiadurarekin gertatzen den bezala, aldiuneko azelerazioa, $\vec{a}$, era ezberdinetan adierazi daitekeen magnitude bektoriala da.

- Bere osagai kartesiarren menpe:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} \qquad (11)$$

- Ibilbideari ukitzaile eta elkarzut diren bere bi osagaiak erabiliz. Bi osagai horiek azelerazioaren osagai normala eta tangentziala deitzen dira.

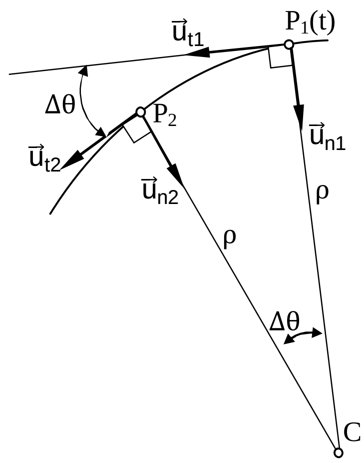
  Azelerazioa definitzen duen adierazpenetik abiatuz:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt} \qquad (12)$$

Aurreko adierazpeneko gai guztiak ezagunak dira, bektore unitarioren denborarekiko deribatua izan ezik, $\frac{d\vec{u}_t}{dt}$. Deribatu horren kalkulua burutzeko, hurrengo hiru zatietan deskonposatzen da:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \qquad (13)$$

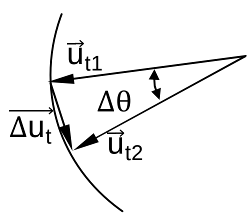
Abiapuntua, bektore unitarioaren ibilbidearekiko deribatua lortzean datza, $\frac{d\vec{u}_t}{d\theta}$. Deribatu hori kalkulatzeko, 3. Irudian ikusten diren, (t) eta (t+Δt) aldiunetan P puntuaren ibilbidearen bektore ukitzaileak aztertu behar dira. Zerorantz doan Δt denbora tarteari dagokion, C kurbatura zentroa eta ρ kurbatura erradioa baita ere irudikatu dira.



3. Irudia

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta}$$

Jarraian, 4. Irudian ikusten den bezala, erradio unitario daukan zirkunferentzia bat definitzen da, bertan bektore unitarioen muturrak jarriz.



4. Irudia

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta} = \vec{u}_n \qquad (14)$$

Honela, hurrengo ezaugarriak dituen, ibilbideari normala den bektore unitarioa definitu daiteke:

$\vec{u}_n$

- · Modulua: *Δθ→0* denean, *(Δ$\vec{u}_t$)* korda eta *(Δs= r·Δθ= 1·Δθ)* arkua, batera datoz, eta beraz: $lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta} = lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1\cdot\Delta\theta}{\Delta\theta} = 1$
- · Norabidea: $\Delta\theta \to 0$, denean, $\frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta}$ adierazpena, erradio unitarioa daukan zirkunferentziari ukitzaile bihurtzen da, $\vec{u}_t$bektoari elkartzut, hau da, $\vec{u}_n$bektorearen norabidea jarraitzen du.
- · Norantz: kurbatura zentrorantz

Bigarren deribatuaen kalkulua burutzeko, $\frac{d\theta}{ds}$, arku baten luzera, bere kurbatura erradioaren eta arkuak definituriko angeluaren arteko biderkadura dela planteatzen da, hurrengoa lortuz:

$$ds = \rho \cdot d\theta \; ; \; \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \qquad (15)$$

Azkenik, aurreko adierazpeneko (13) hirugarren deribatua, hau da, $\frac{ds}{dt}$, abiaduraren modulua dela jakina da. Beraz:

$$\frac{ds}{dt} = v \tag{16}$$

Eta aurreko adierazpenetan (14), (15) eta (16) lortutako emaitzak, hasierako adierazpenean (13), ordezkatuz, hurrengoa lortzen da:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{u}_n \cdot \frac{1}{\rho} \cdot v \tag{17}$$

Aurreko adierazpenean ordezkatuz (12), azelerazioaren adierazpena bere osagai normalaren eta tangentzialaren menpe lortzen da, (ikusi 5. Irudia).

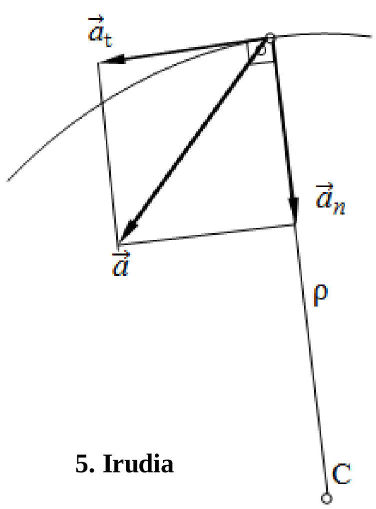
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n \tag{18}$$

Azelerazio tangentziala, ibilbideari ukitzailea da eta abiaduraren moduluaren aldaketa adierazten du.

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t \tag{19}$$

Azelerazio normala, ibilbidearen kurbatura zentrorantz zuzenduta dago, eta abiaduraren norabide aldaketa adierazten du.

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n \tag{20}$$



5. Irudia

3. SOLIDO ZURRUNAREN MUGIMENDU MOTAK

3.1. Sailkapena

Partikula bat aztertzean, ibilbide bakarra dago eta beraz aldiune bakoitzean abiadura eta azelerazio bakarra. Partikulak jarraitutako ibilbidearen arabera, mugimendua izan daiteke kurboa, zuzena edo zirkularra (ibilbidearen kurbatura erradioa konstantea denean).

Solido zurrunaren kasua ezberdina da. **Solido zurruna** gorputzeko partikula guztien arteko distantziak konstante eta finko dituen gorputz deformaezina da. Solido zurrun bat mugitzen denean hurrengoa betetzen da:

- ➩ Solido zurruneko puntu bakoitzak bere ibilbidea jarraituko du, dagokion abiadura eta azelerazioarekin.

Solido zurrunaren kasuan hurrengo mugimenduak definitu daitezke:

Oinarrizko mugimenduak: Translazio hutsa.
Errotazio hutsa (ardatz finko baten inguruko errotazioa).

Mugimendu orokorra: Solido zurrunaren mugimendu guztiak kontutan hartzen ditu, puntu finko baten inguruko mugimendua eta higidura laua bi kasu partikular bezala aztertuz.

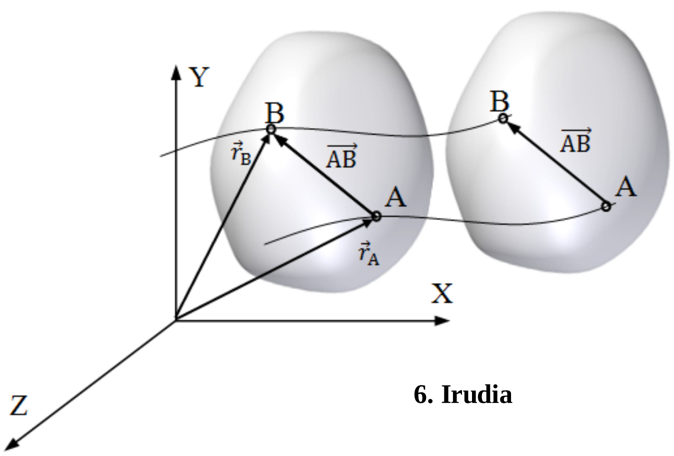
Mugimendu erlatiboaren zinematika: Mugimendu absolutua, erlatiboa eta arrastre mugimendua

3.2. Translazio hutsa

Solido zurrun batek translazio hutsa dauka, bere buruarekiko paralelo mantenduz mugitzen denean, hau da, solidoan definituriko zuzen batek bere norabidea konstante mantentzen duenean. Orduan hurrengoa betetzen da:

- ⇨ Solidoko puntu guztien ibilbideak berdinak dira, abiadura eta azelerazio berdinarekin. Beraz, solido zurrunarentzat abiadura eta azelerazio angeluar bakar bat definitu daiteke.

Frogapena: Solidoko A eta B puntuak definituz, bere posizio bektoreak erlazionatzen dira (21), ondoren deribatuz (22).



6. Irudia

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \tag{21}$$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \tag{22}$$

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$ bektorearen modulua konstantea da, $\boldsymbol{\overline{AB} = kte}$, (solidoko bi puntuen arteko distantzia ez da aldatzen) eta norabidea baita ere konstantea da (translazio hutsean solidoan definituriko edozein zuzenak bere norabidea mantentzen du), beraz, bere deribatua nulua da:

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0 \tag{23}$$

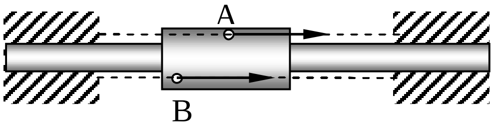
Aurreko adierazpenean ordezkatuz eta berriz deribatuz:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A \tag{24}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_B}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A \tag{25}$$

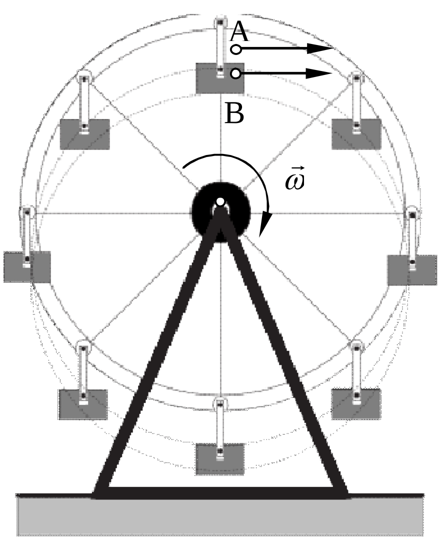
Era honetan, solidoko puntu guztiek, aldiune jakin batetan, abiadura eta azelerazio berdinak dituztela frogatzen da. Solido zurrunaren abiadura eta azelerazioari buruz, solidoko puntu konkretu bat zehaztu gabe, translazio hutsaren kasuan bakarrik hitz egin daiteke. Translazioa zuzena edo kurboa izan daiteke.

Translazio zuzena: solidoko puntu bakoitzak ibilbide zuzena jarraituko du, eta ibilbide guzti horiek haien artean paraleloak izango dira. 7. Irudian A eta B puntuetako ibilbide zuzenak adierazi dira.



7. Irudia

Translazio kurboa: solidoa osatzen duten puntuetako ibilbideak kurboak dira. Hurrengo irudian marraztu den gurpila aztertzean, egitura, errotazio hutsarekin mugitzen dela ikusten da, baina zintzilikatuta dauden ontziek, translazio zirkularra daukate.



8. Irudia

Aurreko adibidean, A eta B puntuetako ibilbideek zirkunferentzia berdinak definitzen dituzte, baina zirkunferentzia horien zentroak desplazatuta daude. Puntuek abiadura eta azelerazio berdinak dituzte eta ontziaren posizioa beti horizontala da.