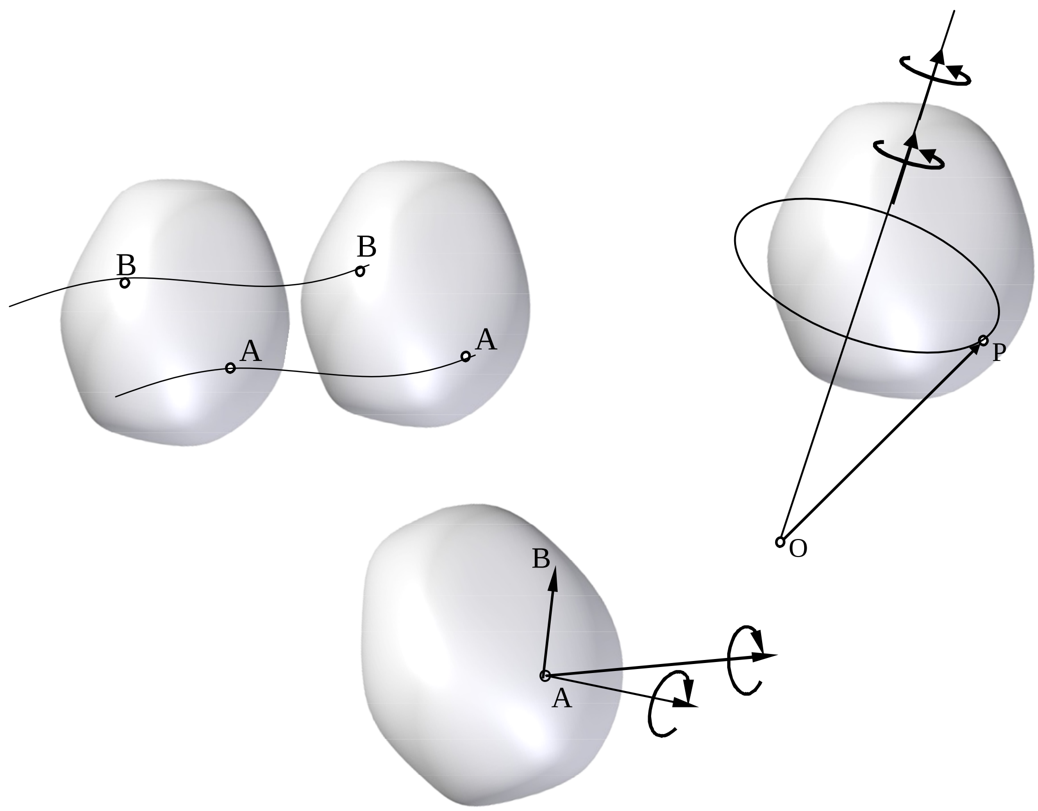
Solido zurrunaren zinematika

Kurtsorako oinarrizko teoria

Solido zurrunaren zinematika, ariketa azalduak



Ramírez López-Para, Pilar
Loizaga Garmendia, Maider
López Soto, Jaime

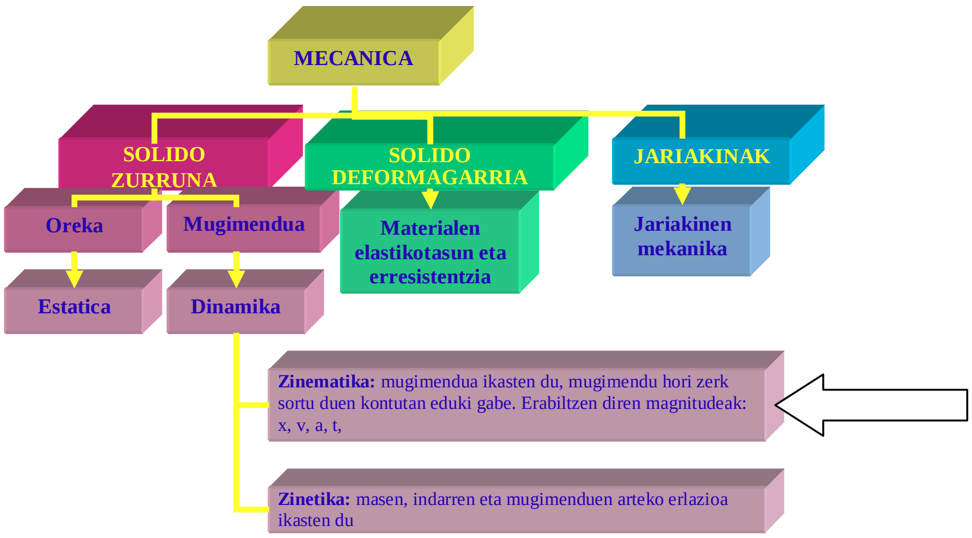
2016 OCW OpenCourseWare

AURKIBIDEA

1. SARRERA

1.1. Zinematikaren definizioa

Sarrera honetan zinematikaren oinarrizko kontzeptuak definituko dira. Abiapuntua, zinematika mekanikaren eremuan kokatzea da.



1. Irudia

Zinematikak mugimendua denboraren menpe ikasten du, mugimendu hori zerk sortu duen kontutan izan gabe.

Erabiltzen diren magnitudeak hurrengoak dira: luzera (x), abiadura (v), azelerazioa (a), denbora (t).

Bestalde, zinematikaren esparruan hurrengo sailkapena egin daiteke:

- Partikularen zinematika

Puntu baten mugimendua ikasten du, planoan zein espazioan, puntu horren ibilbidea, abiadura eta azelerazioa aztertuz.

Solido zurrun baten dimentsioak, bere desplazamenduekin konparatuta oso txikiak direnean, solido horren mugimendua, partikula batena balitz bezala aztertu daiteke, solidoaren grabitate zentroa erabiliz (ad: hegazkin baten mugimendua).

- Solido zurrunaren zinematika

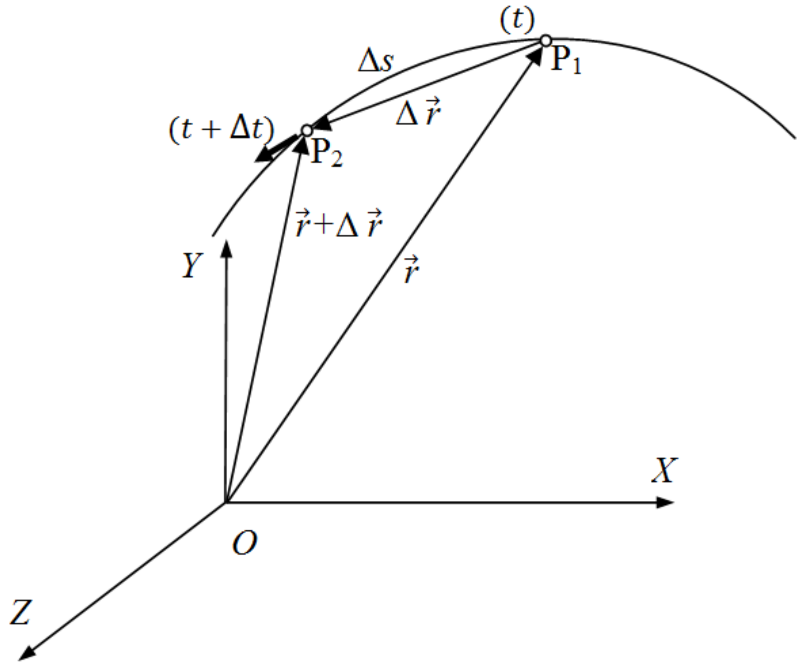
Solido zurrunaren zinematika aztertzen du. Solido zurrunak errotatu dezake eta solidoa osatzen duten puntuek ibilbide, abiadura eta azelerazio ezberdinak eduki dezakete. Horrela, solido zurrunaren zinematika erabiliz, solidoa osatzen duten puntuetako abiadurak eta azelerazioak eta solidoaren abiadura eta azelerazio angeluarrak kalkulatu ahal izango dira.

1.2. Oinarrizko definizioak

Posizio bektorea, puntu baten posizioa definitzen duen bektorea da, P puntu mugikor hori O jatorriarekin lotuz.

$$\vec{r} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k} \tag{1}$$

2. Irudian, P puntuari dagokion hasierako posizioa P_1 eta Δt denbora tartea pasa eta gero P_2 posizio berria ikusten dira.



2. Irudia

Puntu baten mugimendua, bere posizio bektorea denboraren menpe idatziz definitu daiteke. Adierazpen horri **ibilbidearen ekuazio bektoriala** deritzo.

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{\imath} + y(t) \cdot \vec{\jmath} + z(t) \cdot \vec{k} \tag{2}$$

Ibilbidea: puntu batek denboran zehar izan dituen espazioko kokapen ezberdinek definitzen duten lerroa. Puntu batek jarraitutako lerroaren izaeraren arabera hurrengo sailkapena egin daiteke:

- <u>Mugimendu kurboa</u>: bere ibilbidea lerro orokor bat bada. Mugimendu mota hau hurrengo bi mugimenduen kasu orokorra kontsideratu daiteke.
- <u>Mugimendu zuzena</u>: ibilbidea lerro zuzen bat denean.
- <u>Mugimendu zirkularra</u>: bere mugimendua zirkunferentzia bat denean.

Desplazamendua bektorea, denbora tarte bat aztertzean puntu batetako hasierako eta bukaerako posizioak lotzen dituen bektorea da. Posizio bektorearen magnitude eta norabide aldaketak adierazten ditu.

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \Delta x \cdot \vec{\imath} + \Delta y \cdot \vec{\jmath} + \Delta z \cdot \vec{k} \qquad (3)$$

Denbora tarte bat aztertzean, puntu batetako posizio aldaketa, bere ibilbidearen gainean neurtuta, hau da, Δ**s**, **distantzia** izeneko magnitude eskalarraren bidez definitzen da.
Denbora tartea zerorantz hurbiltzean, **desplazamendu bektorea** diferentziala bihurtzen da.

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{\imath} + dy \cdot \vec{\jmath} + dz \cdot \vec{k} \qquad (4)$$

Era berean, aipatutako distantzia diferentziala bihurtzen da, **ds**. Kasu honetan desplazamenduaren modulua eta ibilitako distantzia berdindu daitezke.

$$|d\vec{r}| = ds \qquad (5)$$

2. PARTIKULAREN ZINEMATIKA

2.1. Partikularen abiadura

P_1 puntutik P_2 puntura mugitzen den gorputz mugikor bat emanda (ikusi 2. Irudia), **aldiuneko abiadura** t aldiunean, posizio bektorea denborarekiko deribatuz lortzen da.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (6)$$

Aldiuneko abiadura, $\vec{v}$, hurrengo eratara adierazi daitekeen magnitude bektoriala da:

- Bere <u>osagai kartesiarrak</u> erabiliz:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{\imath} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{\jmath} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} \qquad (7)$$

- Bere <u>modulua</u> eta <u>norabidea</u> erabiliz. Horretarako, aldiuneko abiaduraren adierazpenetik abiatuta, hurrengo eragiketa burutuz:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\overbrace{d\vec{r}}^{norabidea}}{ds} \cdot \frac{\overbrace{ds}^{modulo}}{dt} \qquad (8)$$

Eta aldiuneko abiaduraren hurrengo ezaugarriak definitu daitezke:

$\vec{v}$:
· Modulua: $v = \frac{ds}{dt}$ [m/s]; denbora tarte batetan ibilitako distantzia definitzen du.
· Norabidea: $\frac{d\vec{r}}{ds} = lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$; non $\Delta s \to 0$, $\Delta \vec{r}$ eta Δs moduloak berdinak dira eta $\Delta \vec{r}$ ibilbideari ukitzaile egiten da P_1 puntuan. $\vec{u}_t$ bektore unitarioa definitzen da:
$\to \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}_t$, ibilbideari ukitzailea den bektore unitarioa P_1 puntuan.
· Norabidea: mugimenduarena.
· Aplikazio puntua: P_1 puntua (bektore finkoa)

Honela, aldiunezko abiadura bere modulua eta ibilbideari ukitzailea den eta bere norabidea eta norantza definitzen dituen bektore unitario bat erabiliz idatzi daiteke:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_t = v \cdot \vec{u}_t \tag{9}$$

2.2. Partikularen azelerazioa

Azelerazioak abiaduraren aldaketa denboraren menpe neurtzen du. **Aldiuneko azelerazioa** gorputz mugikor baten aldiuneko azelerazioa t aldiune batetan abiadura denborarekiko deribatuz definitzen da.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{10}$$

Abiadurarekin gertatzen den bezala, aldiuneko azelerazioa, $\vec{a}$, era ezberdinetan adierazi daitekeen magnitude bektoriala da.

- Bere osagai kartesiarren menpe:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} \tag{11}$$

- Ibilbideari ukitzaile eta elkarzut diren bere bi osagaiak erabiliz. Bi osagai horiek azelerazioaren osagai normala eta tangentziala deitzen dira.

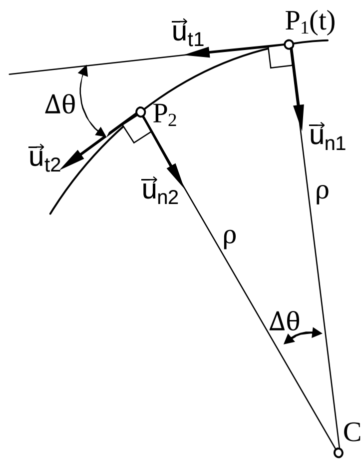
  Azelerazioa definitzen duen adierazpenetik abiatuz:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt} \tag{12}$$

Aurreko adierazpeneko gai guztiak ezagunak dira, bektore unitarioren denborarekiko deribatua izan ezik, $\frac{d\vec{u}_t}{dt}$. Deribatu horren kalkulua burutzeko, hurrengo hiru zatietan deskonposatzen da:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \tag{13}$$

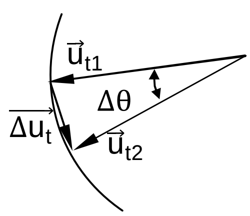
Abiapuntua, bektore unitarioaren ibilbidearekiko deribatua lortzean datza, $\frac{d\vec{u}_t}{d\theta}$. Deribatu hori kalkulatzeko, 3. Irudian ikusten diren, (t) eta (t+Δt) aldiunetan P puntuaren ibilbidearen bektore ukitzaileak aztertu behar dira. Zerorantz doan Δt denbora tarteari dagokion, C kurbatura zentroa eta ρ kurbatura erradioa baita ere irudikatu dira.



3. Irudia

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta}$$

Jarraian, 4. Irudian ikusten den bezala, erradio unitario daukan zirkunferentzia bat definitzen da, bertan bektore unitarioen muturrak jarriz.



4. Irudia

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta} = \vec{u}_n \qquad (14)$$

Honela, hurrengo ezaugarriak dituen, ibilbideari normala den bektore unitarioa definitu daiteke:

$\vec{u}_n$

- Modulua: $\Delta\theta \to 0$ denean, $(\Delta\vec{u}_t)$ korda eta $(\Delta s = r \cdot \Delta\theta = 1 \cdot \Delta\theta)$ arkua, batera datoz, eta beraz: $lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta} = lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{1 \cdot \Delta\theta}{\Delta\theta} = 1$
- Norabidea: $\Delta\theta \to 0$, denean, $\frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta}$ adierazpena, erradio unitarioa daukan zirkunferentziari ukitzaile bihurtzen da, $\vec{u}_t$bektoari elkartzut, hau da, $\vec{u}_n$bektorearen norabidea jarraitzen du.
- Norantz: kurbatura zentrorantz

Bigarren deribatuaen kalkulua burutzeko, $\frac{d\theta}{ds}$, arku baten luzera, bere kurbatura erradioaren eta arkuak definituriko angeluaren arteko biderkadura dela planteatzen da, hurrengoa lortuz:

$$ds = \rho \cdot d\theta \; ; \; \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \qquad (15)$$

Azkenik, aurreko adierazpeneko (13) hirugarren deribatua, hau da, $\frac{ds}{dt}$, abiaduraren modulua dela jakina da. Beraz:

$$\frac{ds}{dt} = v \tag{16}$$

Eta aurreko adierazpenetan (14), (15) eta (16) lortutako emaitzak, hasierako adierazpenean (13), ordezkatuz, hurrengoa lortzen da:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \vec{u}_n\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\ v \tag{17}$$

Aurreko adierazpenean ordezkatuz (12), azelerazioaren adierazpena bere osagai normalaren eta tangentzialaren menpe lortzen da, (ikusi 5. Irudia).

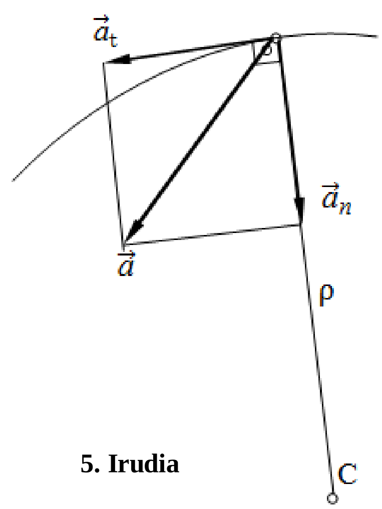
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n \tag{18}$$

<u>Azelerazio tangentziala</u>, ibilbideari ukitzailea da eta abiaduraren moduluaren aldaketa adierazten du.

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{u}_t \tag{19}$$

<u>Azelerazio normala</u>, ibilbidearen kurbatura zentrorantz zuzenduta dago, eta abiaduraren norabide aldaketa adierazten du.

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n \tag{20}$$



5. Irudia

3. SOLIDO ZURRUNAREN MUGIMENDU MOTAK

3.1. <u>Sailkapena</u>

Partikula bat aztertzean, ibilbide bakarra dago eta beraz aldiune bakoitzean abiadura eta azelerazio bakarra. Partikulak jarraitutako ibilbidearen arabera, mugimendua izan daiteke kurboa, zuzena edo zirkularra (ibilbidearen kurbatura erradioa konstantea denean).

Solido zurrunaren kasua ezberdina da. **Solido zurruna** gorputzeko partikula guztien arteko distantziak konstante eta finko dituen gorputz deformaezina da. Solido zurrun bat mugitzen denean hurrengoa betetzen da:

- ➩ <u>Solido zurruneko puntu bakoitzak bere ibilbidea jarraituko du, dagokion abiadura eta azelerazioarekin</u>.

Solido zurrunaren kasuan hurrengo mugimenduak definitu daitezke:

Oinarrizko mugimenduak: Translazio hutsa.
Errotazio hutsa (ardatz finko baten inguruko errotazioa).

Mugimendu orokorra: Solido zurrunaren mugimendu guztiak kontutan hartzen ditu, puntu finko baten inguruko mugimendua eta higidura laua bi kasu partikular bezala aztertuz.

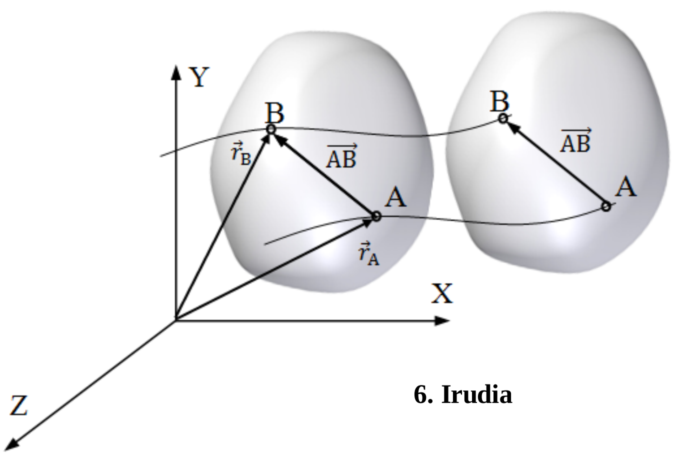
Mugimendu erlatiboaren zinematika: Mugimendu absolutua, erlatiboa eta arrastre mugimendua

3.2. <u>Translazio hutsa</u>

Solido zurrun batek translazio hutsa dauka, bere buruarekiko paralelo mantenduz mugitzen denean, hau da, solidoan definituriko zuzen batek bere norabidea konstante mantentzen duenean. Orduan hurrengoa betetzen da:

⇨ <u>Solidoko puntu guztien ibilbideak berdinak dira, abiadura eta azelerazio berdinarekin. Beraz, solido zurrunarentzat abiadura eta azelerazio angeluar bakar bat definitu daiteke</u>.

Frogapena: Solidoko A eta B puntuak definituz, bere posizio bektoreak erlazionatzen dira (21), ondoren deribatuz (22).



6. Irudia

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \qquad (21)$$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \qquad (22)$$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ bektorearen modulua konstantea da, $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{kte}$, (solidoko bi puntuen arteko distantzia ez da aldatzen) eta norabidea baita ere konstantea da (translazio hutsean solidoan definituriko edozein zuzenak bere norabidea mantentzen du), beraz, bere deribatua nulua da:

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0 \qquad (23)$$

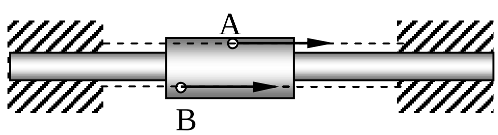
Aurreko adierazpenean ordezkatuz eta berriz deribatuz:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A \tag{24}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_B}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A \tag{25}$$

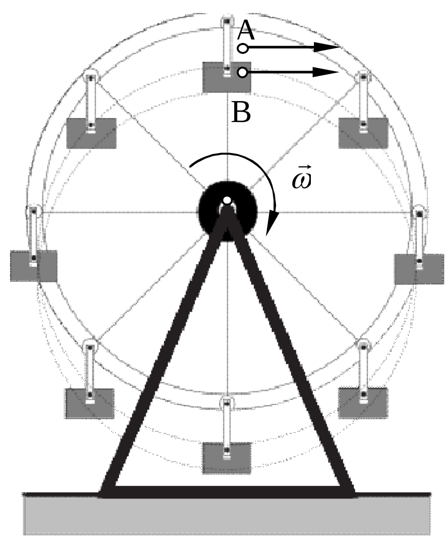
Era honetan, solidoko puntu guztiek, aldiune jakin batetan, abiadura eta azelerazio berdinak dituztela frogatzen da. Solido zurrunaren abiadura eta azelerazioari buruz, solidoko puntu konkretu bat zehaztu gabe, translazio hutsaren kasuan bakarrik hitz egin daiteke. Translazioa zuzena edo kurboa izan daiteke.

Translazio zuzena: solidoko puntu bakoitzak ibilbide zuzena jarraituko du, eta ibilbide guzti horiek haien artean paraleloak izango dira. 7. Irudian A eta B puntuetako ibilbide zuzenak adierazi dira.



7. Irudia

Translazio kurboa: solidoa osatzen duten puntuetako ibilbideak kurboak dira. Hurrengo irudian marraztu den gurpila aztertzean, egitura, errotazio hutsarekin mugitzen dela ikusten da, baina zintzilikatuta dauden ontziek, translazio zirkularra daukate.



8. Irudia

Aurreko adibidean, A eta B puntuetako ibilbideek zirkunferentzia berdinak definitzen dituzte, baina zirkunferentzia horien zentroak desplazatuta daude. Puntuek abiadura eta azelerazio berdinak dituzte eta ontziaren posizioa beti horizontala da.

3.3. <u>Ardatz finko baten inguruko errotazio hutsa</u>

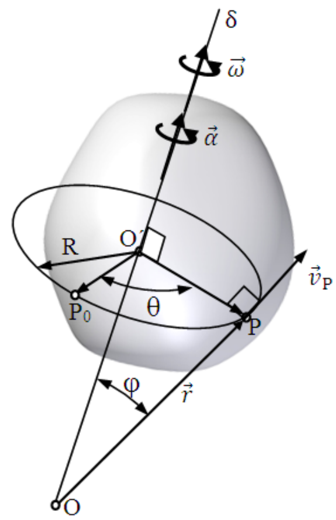
Solido batek errotazio hutsa dauka, ardatz finko baten inguruan biratzen duenean.

➪ <u>Solidoko puntu guztietako ibilbideak zirkunferentziak dira, eta haien zentroak errotazio ardatza izeneko zuzena definitzen dute. Ibilbide zirkular guztiek, zuzen horri elkarzutak diren planoak definitzen dituzte.</u> Ardatzeko puntuen abiadura nulua da.

Mugimendu hau aztertzeko, δ ardatz finkoaren inguruan biratzen duen solido bat definitzea da abiapuntua, bidebatez, solidoaren abiadura angeluarra eta azelerazio angeluarrak diren $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ magnitude bektorialak definituz.

Solidoak biratzen duenez, bere orientazioa aldatzen du eta beraz zeinen arinen biratzen duen adierazteko parametroren bat definitzea beharrezkoa izango da. Hau da, denbora unitate batetan biratutako angelua adieraziko duen parametro bat definitzea ezinbestekoa da.

θ solidoak bere ardatzaren inguruan biraturiko angelua izanda, bere abiadura angeluarra, $\vec{\omega}$, eta bere azelerazio angeluarra, $\vec{\alpha}$ definitu daitezke, biak magnitude bektorialak izanda:



9. Irudia

Solido zurrunaren abiadura angeluarra:

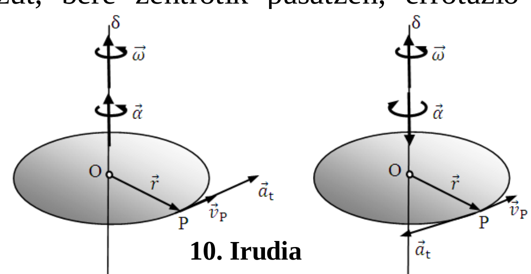
$\vec{\omega}$

- <u>Modulua</u>: $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
- <u>Norabidea</u>: ibilbidearen zirkunferentziari elkarzut, bere zentrotik pasatuz; biraketa ardatzaren norabidearekin batera dator.
- <u>Norantza</u>: eskumako eskuaren legeak definitzen duena.
- <u>Aplikazio puntua</u>: biraketa ardatzeko edozein puntu.

Solido zurrunaren azelerazio angeluarra:

$\vec{\alpha}$

- <u>Modulua</u>: $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt}$
- <u>Norabidea</u>: ibilbidearen zirkunferentziari elkarzut, bere zentrotik pasatzen; errotazio ardatzaren norabidearekin batera dator.
- <u>Norantza</u>: $\vec{\alpha}$ eta $\vec{\omega}$ norantza berdina dutenean solidoak gero eta azkarrago biratzen du. $\vec{\alpha}$ eta $\vec{\omega}$ kontrako norantza badute, solidoa gero eta astiroago doa. Ikusi 10. Irudia.



10. Irudia

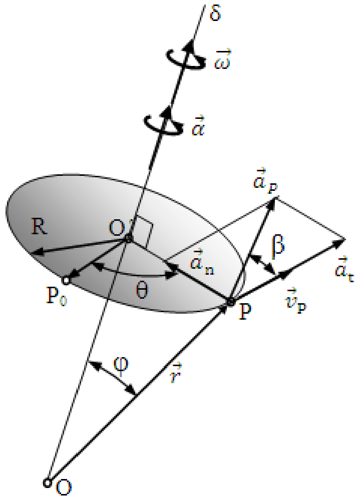
- <u>Aplikazio puntua</u>: biraketa ardatzeko edozein puntu, bektore labainkorra baita.

Puntu honetan, definituriko bi magnitude bektorialen inguruko bi idei azpimarratzea interesgarria gertatu daiteke:

- Solido zurrunaren errotazio hutsa definitzen duten $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ abiadura angeluarra eta $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ azelerazio angeluarra definitu daitezke.
- $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ eta $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ solidoa osatzen duten puntuen mugimendu zirkularrak definitzen dituzte. Horrela, solidoko edozein punturen abiadura eta azelerazio linealak kalkulatu daitezke, bere mugimendu zirkularra, errotazio ardatzari elkarzuta den plano batetan aztertuz.

Oharra: Ardatz baten inguruko errotazioaren kasu partikularrean, $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ abiadura angeluarrak eta $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ azelerazio angeluarrak norabide berdina daukate. Aurrerago ikusiko denez, mugimendu orokorraren kasuan, $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ -k eta $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ -k norabide ezberdina izan dezakete.

Ondoren, δ ardatz finkoaren inguruan $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ abiadura angeluarrarekin eta $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ azelerazio angeluarrarekin biratzen duen solido zurruneko P puntuaren abiadura eta azelerazio linealak ezagutu nahi direla suposatu.



11. Irudia

Alboko 11. Irudian, errotazio ardatza eta puntu batetako ibilbidea marraztu dira. Ikusi daitekeenez, δ errotazio ardatza ezaguna den O puntutik pasatzen da eta P puntua ardatzari elkarzuta den plano batetan zirkunferentzia bat definitzen du. Zirkunferentzia horren zentroa ardatzean dagoen O´ puntua da.

P puntuaren abiadura lortzeko, aurretik definituriko aldiuneko abiaduraren adierazpenetik abiatuko gara:

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_t \qquad (26)$$

$\vec{v}_P$

· Modulua: $ds = Rd\theta$ dela jakina da eta 11. Irudian $R = rsen\varphi$ ikusi daiteke, beraz,

$$v_P = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\theta}{dt} = R \cdot \omega = rsen\varphi \cdot \omega$$

· Norabidea: $\vec{u}_t$ bektorearena, ibilbideak definitzen duen zirkunferentziari ukitzaile

· Norantza: mugimenduarena

· P puntuan definituta

Azkenik, P puntuaren abiadura, $\vec{v}_P$ bektorea, solidoaren abiadura angeluarra $\vec{\omega}$ eta ardatzeko edozein puntu erabilita P puntuaren posizioa definitzen duen $\vec{r}$ bektoreen arteko biderkadura bektoriala burutuz lortzen dela ondorioztatu daiteke.

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{27}$$

P puntuaren azelerazioa kalkulatzeko abiadura denborarekiko deribatzen da. Lortutako adierazpena azelerazioaren osagai intrintsekoetan deskonposatu daiteke: azelerazio tangentziala eta azelerazio normala.

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha} \wedge \vec{r}}_{a_{tangentziala}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})}_{a_{normala}} \tag{28}$$

Azelerazio tangentziala: $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}$ (29)

$\vec{a}_t$
- · Modulua: $a_t = \alpha \cdot r sen\varphi = R \cdot \alpha$ (30)
- · Norabidea: P puntuak definituriko zirkunferentziari ukitzaile
- · Norantza: α-ak definitzen duena
- · Jatorria P puntuan

Azelerazio normala: $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P$ (31)

$\vec{a}_n$
- · Modulua: $a_n = \omega \cdot v_P \cdot sen 90° = \omega \cdot R \cdot \omega = \omega^2 \cdot R$ (32)
- · Norabidea: Ibilbideari normala
- · Norantza: P puntuak definitzen duen zirkunferentziaren zentrorantza
- · Jatorria P puntuan

P puntuak definitzen duen zirkunferentziaren O´ puntua ezagutzen bada, azelerazioaren bi osagaiak eskalarki kalkulatu daitezke.

Azkenik, azelerazioaren modulua eta azelerazioak tangentearekin osatzen duen β angelua kalkulatu daitezke hurrengo adierazpenen bidez:

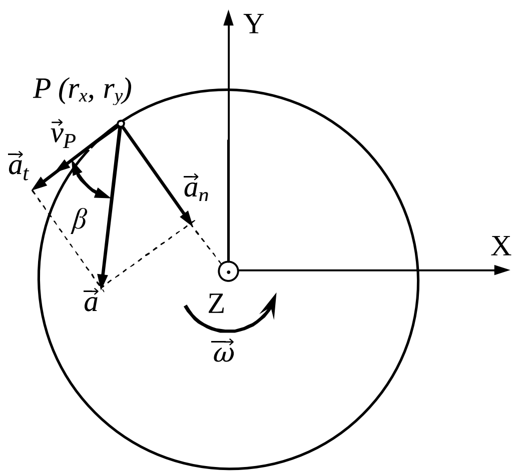
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2 \cdot \alpha^2 + R^2 \cdot \omega^4} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{33}$$

$$tg\beta = \frac{a_n}{a_t} \tag{34}$$

3.3.1. Mugimendu zirkularra planoan

Mugimendu zirkularra XY planoan gertatzen den kasuetan, aurreko atalean garatutako abiaduren eta azelerazioen kalkulua sinplifikatu daiteke.

Ibilbidearen zirkunferentzia, abiadura eta azelerazioa, XY planoan definituak egoteaz gain, $\vec{\omega}$ abiadura angeluarra eta $\vec{\alpha}$ azelerazio angeluarra planuari elkartzutak dira, hau da, Z ardatzari paraleloak.



12. Irudia

P puntuari dagokion abiaduraren azterketa burutzeko (27.) adierazpenetik abiatuko da.

P puntuaren abiadura: $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{P}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{\boldsymbol{r}}$

$\vec{v}_P$

- Modulua: $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ eta $\vec{\boldsymbol{r}}$ elkarren artean elkarzutak direnez, $\boldsymbol{v_P = r \cdot sen90° \cdot \omega = \omega \cdot R}$ (35)
- Norabidea: XY planoan definituriko zirkunferentziari elkarzut.
- Norantza: mugimenduarena
- P puntuan definituta

P puntuaren azelerazioa aztertzeko aurreko kasu orokorrerako lortutako azelerazioaren osagai intrintsekoen adierazpenetik abiatuko gara:

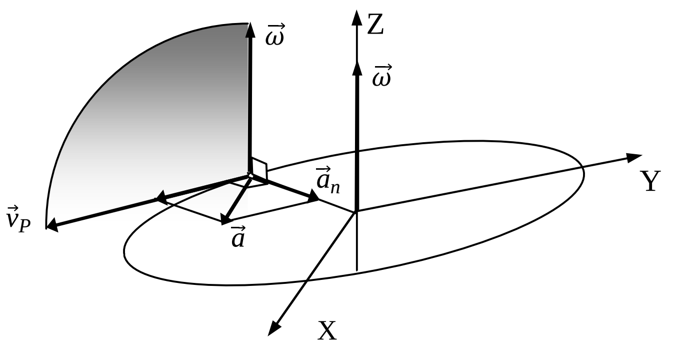
Azelerazio tangentziala: $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{t}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \vec{\boldsymbol{r}}$

$\vec{a}_t$

- Modulua: $a_t = R \cdot \alpha$ (36)
- Norabidea: XY planuan definituriko zirkunferentziari ukitzaile
- Norantza: α positiboa bada, abiaduraren norantza berdina; α negatiboa bada kontrakoa
- P puntuan definituta

<u>Azelerazio normala</u>: $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P$

$\vec{a}_n$
- · Modulua: $a_n = \omega \cdot (\omega \cdot R) sen 90° = \omega^2 \cdot R$ (37)
- · Norabidea: $\vec{\omega}$ eta $\vec{v}_P$ definituriko planoari elkartzut, normalaren norabidean
- · Norantza: zirkunferentziaren zentrorantz.
- · P puntuan definituta



13. Irudia

Azelerazio normalaren norabidea eta noranzkoa lortzeko beste modu bat, aurretik definituriko $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$, biderkadura bektoriala, analitikoki garatzean datza:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r_x & r_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega \cdot r_y & \omega \cdot r_x & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 \cdot r_x \vec{i} - \omega^2 \cdot r_y \vec{j} = -\omega^2 \cdot \vec{r} \tag{38}$$

Laburbilduz, abiadura normala, $\omega^2 \cdot r$ balioko moduloa eta posizio bektorearen kontrako norantza duen bektorea dela ondorioztatu daiteke. Adierazpen honek, $\vec{a}_n = -\omega^2 \cdot \vec{r}$, kalkuluak sinplifikatzen ditu, eta $\vec{r}$ bektorearen koordenatuen kalkulua erraza den kasuetan erabili daiteke (hau higidura lauan eta zenbait kasu espazialetan gertatuko da) .

3.4. Bektore baten deribatua sistema mugikorretan. Boureren legea.

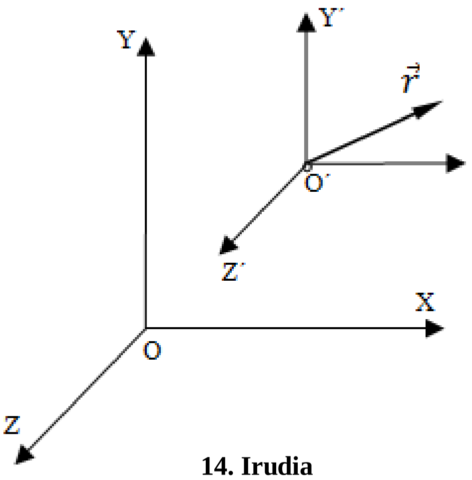
Edozein $\vec{r}$ bektore deribatzerako orduan, nahitaezkoa da, zein erreferentzi sisteman definituta dagoen aztertzea. Bektore horren aldaketak ez dira era berdinean ikusiko, bektorea erreferentzi sistema finko batetan edo erreferentzi sistema mugikor batetan definituta badago. Bektore baten bi erreferentzi sistemekiko deribatuak Boureren legearen bidez erlazionatu daitezke.

Abiapuntua, **transladatzen den sistema batetan definitua dagoen bektore baten deribatua** garatzea da.

Bi erreferentzi sistema definitzen dira, finkoa (OXYZ) eta transladatzen den (O´X´Y´Z´) sistema mugikorra. Helburua bi sistematan garaturiko bi deribatuen arteko erlazioa definitzea da.

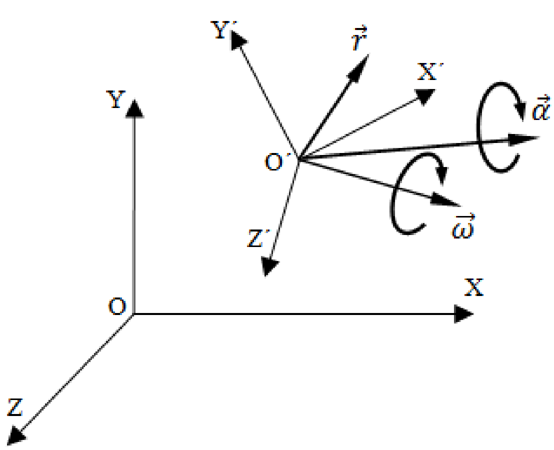
$\vec{r}$ bektorearen deribatua, berdina izango da, bektorea transladatzen den sistema batetan eta erreferentzi sistema finko batetan definituta egonda.

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} \qquad (39)$$



14. Irudia

Orain kasu orokorra aztertuko da, **errotatzen duen erreferentzi sistema batetan definitua dagoen bektore baten deribatua** definituz.



15. Irudia

Bi erreferentzi sistema definitzen dira, bata finkoa (OXYZ) eta beste bat mugikorra (O´X´Y´Z´) bere abiadura eta azelerazio angeluarrak $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ izanik. Berriro, $\vec{r}$ bektorea, erreferentzi sistema mugikorrean definituko da.

$\vec{r}$ bektorearen deribatua, ez da berdina izango, bektorea errotatzen duen sistema batetan eta erreferentzi sistema finko batetan definituta egonda. Bektorearen deribatua kalkulatzeko, ondoren definitzen den Boureren legea aplikatu behar da.

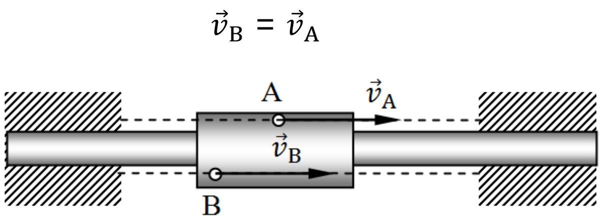
Errotatzen duen erreferentzi sisteman definituriko $\vec{r}$ bektorearen deribatua lortzeko, bektorea sistema mugikorrean deribatu behar da, ondoren sistemaren abiadura angeluarra eta deribaturiko bektorea bektorialki biderkatuz, eta bi gaiak batuz.

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (40)$$

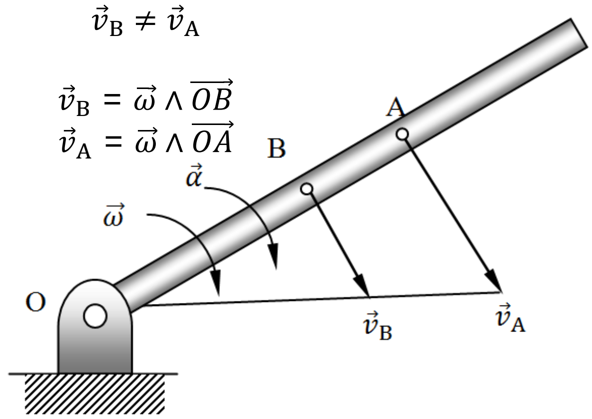
3.5. Solido zurrun baten mugimendu orokorra espazioan

Orain arte translazio eta errotazio hutsak, solido zurrunaren oinarrizko mugimenduak bezala definitu dira. Translazio hutsaren kasuan (16. Irudia) puntu guztiek abiadura eta azelerazio berdinak dituzte eta beraz solidoarentzat abiadura eta azelerazio linealak $\vec{v}$ eta $\vec{a}$ definitu daitezke.

Errotazioaren kasuan (17. Irudia), espazioan solidoaren norabidea aldatzen duten abiadura eta azelerazio angeluarrak, $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$, definitu daitezke.

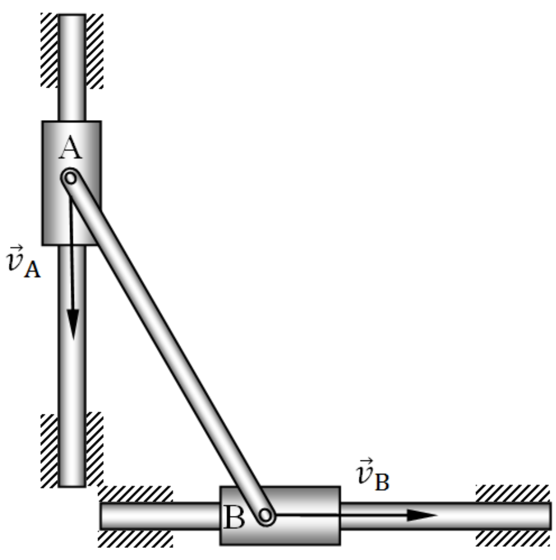


16. Irudia



17. Irudia

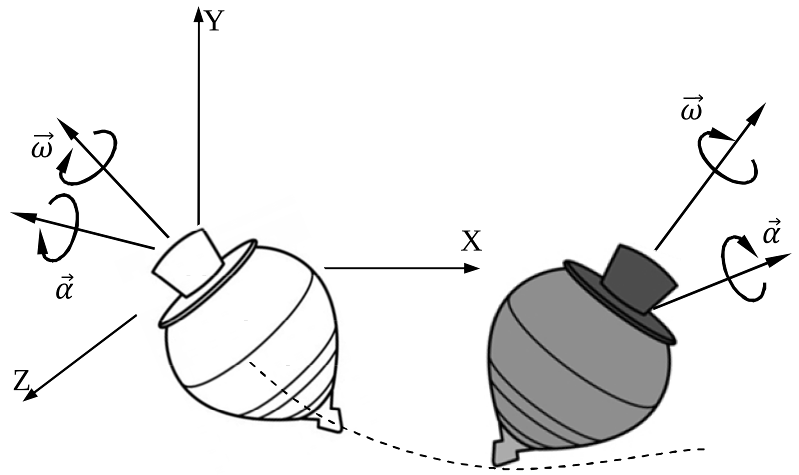
Solidoaren mugimendua, aurreko bi kasuetariko bat ez izatekotan (traslazio hutsa edo errotazio hutsa), solidoak mugimendu orokorra izango du.



18. Irudia

Alboko 18. Irudian, AB barraren mugimendua aztertuz, A eta B puntuetako abiadurak ezberdinak direla eta AB barraren orientazioa aldatzen dela bistakoa da. Beraz AB barrak ez du translazio hutsezko mugimendua izango. Bestalde A eta B puntuek ez dute ardatz berdinaren inguruan ibilbide zirkularra jarraitzen eta beraz, solidoak ez du errotazio hutsa izango. Guzti hori kontutan izanda, solidoaren mugimendua orokorra dela ondorioztatu daiteke.

Mugimendu orokorraren beste adibide bat, oraingoa hiru dimentsiotan, puntu baten inguruan biratu dezakeen ziba baten kasua da. Kasu honetan errotazio ardatzaren orientazioa aldatzen da, edo ziba desplazatu daiteke, ardatza transladatzen delarik. Kasu horietan, $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ ez dute norabide berdina, mugimendu orokorra daukan solido bat izango delarik.



19. Irudia

Kasu honetan $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ denboran aldakorra den, aldiuneko biraketa ardatzaren norabidea dauka. Azelerazio angeluarraren eraginez, abiadura angeluarraren modulua eta bere norabidea aldatzen dira; logikoa denez, $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ eta $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ norabide ezberdinak dituzte, horrela $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$-ren eraginez $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ -ren norabidea aldatu ahal izateko. Abiadura eta azelerazio linealen kasuarekin konparaketa bat burutu daiteke, $\vec{\boldsymbol{v}}$ eta $\vec{\boldsymbol{a}}$ orokorrean ez baitaukate norabide berdina; azelerazio tangentzialak a_t, abiaduraren modulua aldatzen du eta a_n abiaduraren norabidea aldatzen du.

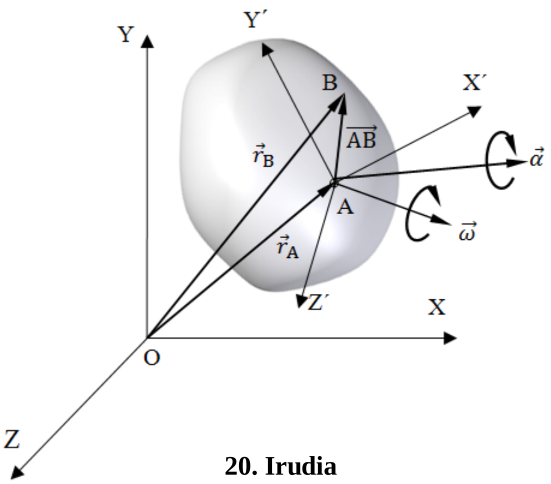
$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{41}$$

3.6. Abiaduren eta azelerazioen eremua mugimendu orokorrean:

Orain, solido zurrun berdinekoak diren bi puntuetako abiaduren arteko erlazioa aztertuko da, ondoren bi puntu horien azelerazioen arteko erlazioa lortzeko.

Hurrengo irudian (20), OXYZ erreferentzi sistema finkoa erabiliz definitu den espazio tridimentsionalean solido zurrun bat aske mugitzen da. Bestalde, solidoari soldatuta O´X´Y´Z´ erreferentzi sistema mugikorra definitzen da.

Aztertutako solidoak, solido batek espazioan eduki dezakeen mugimendurik orokorrena dauka, hau da, transladatzen da, eta errotatzen du, $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ abiadura eta azelerazio angeluarrekin. Mugimendu orokorrean, $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ ez dute norabide berdina, iadanik azaldu denez, errotazio ardatza ez baita finkoa izango.



20. Irudia

Solido zurrunaren mugimendu orokorra aztertzeko abiapuntua, puntu bateko posizio bektorea definitzea da, ondoren denborarekiko birritan deribatzeko:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \tag{42}$$

Abiaduren eremua aurreko (42). adierazpena behin deribatuz lortzen da:

$$\left(\frac{d\vec{r}_B}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} \rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} \tag{43}$$

$\overrightarrow{AB}$ bektorea sistema mugikorrean definituta dagoenez, hau da errotatzen duen sistema batetan, bere deribatua lortzeko Boureren legea aplikatu behar da:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \tag{44}$$

$\overrightarrow{AB}$ bektorea solido zurruneko bi puntu lotzen dituenez, modulu konstantea dauka eta bere norabidea sistema mugikorretik begiratuta aldatzen ez denez, bektore horren deribatua sistema mugikorrean nulua da, hau da, $\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} = 0$, beraz:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \tag{45}$$

Eta beraz hurrengoa ondorioztatzen da:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}} \tag{46}$$

Emaitza aztertuz, solidoko B puntuaren abiadura, A puntuaren abiadurari, B puntuak A punturen inguruan biratzerakoan daukan abiadura gehituz kalkulatu daiteke.

Solidoaren <u>azelerazioen eremua</u>, aurreko (42). adierazpenaren bigarren deribatua garatuz lortzen da:

$$\left(\frac{d\vec{v}_B}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{v}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (47)$$

Eta hurrengoa ondorioztatzen da:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)} \qquad (48)$$

Solido zurruneko B puntuaren azelerazioa, erreferentzi bezala hartutako A puntuaren azelerazioa eta puntu horren inguruko errotazioaren ondorioz B puntuak daukan azelerazioa gehituz lor daiteke.

Beraz, aurreko (46) eta (48) adierazpenak aztertuz, hurrengoa ondorioztatzen da: edozein B puntuaren abiadura/azelerazioa, erreferentzi bezala hartutako A puntuaren abiadura/azelerazioa eta B puntuak A puntutik pasatzen den ardatz baten inguruko errotazioaren ondorioz daukan abiadura/azelerazioa gehituz kalkulatu daiteke.

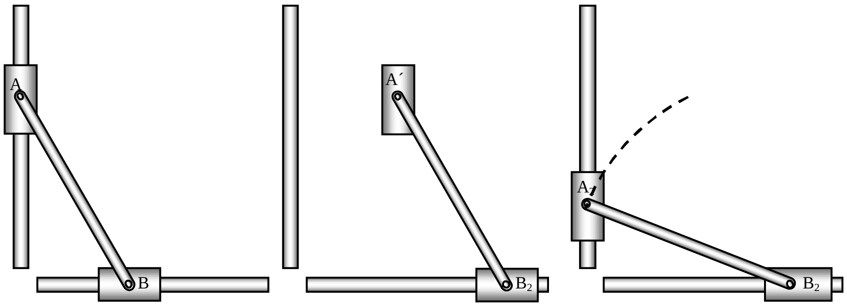
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \underbrace{\vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB}}_{a_{tangentziala}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)}_{a_{normala}}$$

A puntuaren translazioa — A puntuaren inguruko B puntuaren errotazioa

B puntuarentzat garatutako kalkulua solido zurruneko edozein puntura hedatu daiteke, hurrengo ondorioa lortuz:

⇨ Solido baten mugimendu orokorra, aldiberean gertatzen diren <u>translazio bat eta errotazio bat</u> batera aztertuz ikasi daiteke. Beraz, solidoaren mugimendua, <u>aldiune bakoitzean, erreferentzia bezala hartutako puntu baten translazioa eta puntu horretatik pasatzen den ardatz baten inguruko errotazioa gainezarriz</u> adierazi daiteke.

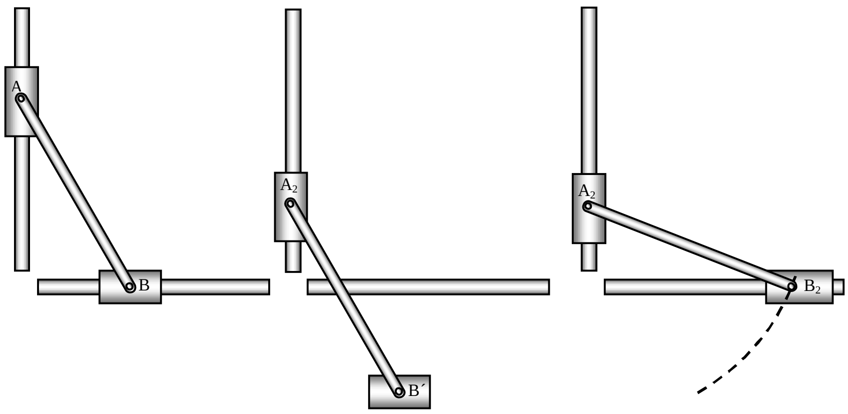


AB barraren mugimendu orokorra, erreferentzi bezala B puntua hartuz

1. Hasierako posizioa
2. AB barra B puntua bezala transladatzen da
3. AB barrak B puntuaren inguruan errotatzen du

21. Irudia

21. eta 22. Irudietan AB barraren mugimendu orokorra ikasi da, translazio eta errotazio bat gainezarriz. Lehenengo kasuan erreferentzia bezala B puntua hartzen da eta bigarren kasuan erreferentzia puntua A izango da. Barrak bi mugimendu hauek bata bestearen ondoren ez dituela burutzen begi-bistakoa da, baina mugimendua horrela gertatuko balitz bezala aztertu daiteke.



AB barraren mugimendu orokorra, erreferentzi bezala A puntua hartuz

1. Hasierako posizioa
2. AB barra A puntua bezala trasladatzen da
3. AB barrak A puntuaren inguruan errotatzen du

22. Irudia

3.7. Mugimendu orokorraren kasuan abiadurak eta azelerazioak kalkulatzeko prozedura

Mugimendu orokorra duen solido zurrun batetako puntuen abiadurak eta azelerazioak kalkulatzeko hurrengo pausuak jarraitu daitezke.

1. Mugimendu orokorra duen solido zurrunaren aukeraketa

   Orokorrean helburua solidoko puntu batetako abiadura eta azelerazioa kalkulatzea izango da. Puntu horrek eta erreferentzi puntuak aukeratutako solidokoak izan behar dute.

2. Erreferentzi puntuaren aukeraketa

   Kalkuluak ahalik eta gehien sinplifikatzen dituen puntu bat aukeratzean datza. Solidoak puntu finko bat badauka, errazena erreferentzi puntu bezala puntu hori aukeratzea izaten da. Solidoak puntu finkorik ez badauka, abiadura eta azelerazio ezagunak dituen puntu bat aukeratu behar da.

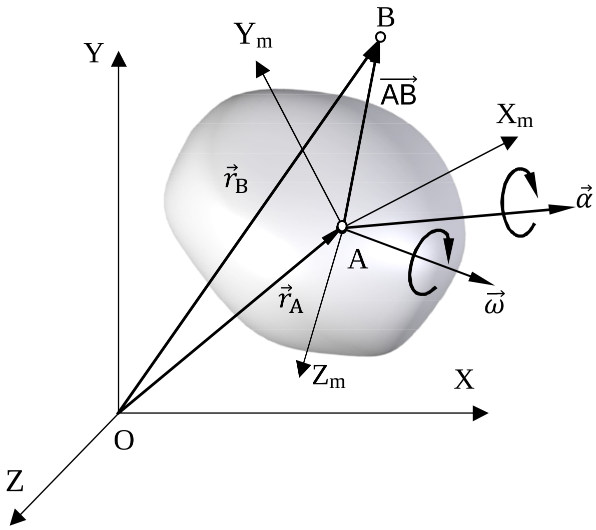
3. Mugimendua translazio bat eta errotazio bat gainezarriz aztertu

   Aurrerago ondorioztatu denez, berrikusi (46) eta (48) adierazpenak, edozein punturen abiadura eta azelerazioa erreferentzia puntuaren translazioa eta puntu horren inguruko errotazioa gainezarriz kalkulatu daiteke. Solidoak puntu finko bat badauka, puntu hori erreferentzi bezala hartuz gero, mugimendua errotazio huts bat izango da, translazioa anulatzen baita.

4. MUGIMENDU ERLATIBOA

4.1. Transladatzen den erreferentzi sistema batekiko puntu baten mugimendu erlatiboa

OXYZ erreferentzi sistema finkoa, transladatzen den O´X´Y´Z´ sistema eta sistema mugikorrean mugitzen den P puntua definitzen dira, ikusi 23. Irudia.



23. Irudia

Datuak:

$\vec{r}_P$: P puntuaren posizioa erreferentzi sistema finkoan.

$\vec{r}_A$: A puntuaren posizioa erreferentzi sistema finkoan.

$\vec{r}_P´$: P puntuaren posizioa sistema mugikorrean.

Alboko 23. Irudian ikus daitekeenez:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_P´ \qquad (49)$$

Abiaduren eremua aurreko adierazpena (49) sistema finkoan deribatuz lortzen da:

$$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{r}_P´}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (50)$$

Aurreko adierazpeneko (50) gaiak aztertuz:

$\vec{r}_P$ eta $\vec{r}_A$ sistema finkoan definitutak daude eta bere deribatuak hurrengoak dira:

$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_P$ ⇨ P puntuaren abiadura absolutua. Abiadura absolutua beti sistema finkoarekiko definitzen da.

$\left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_A$ ⇨ sistema mugikorraren translazioa, P puntua O´X´Y´Z´ sistemari soldatuta egongo balitz edukiko zuen abiadura da. Gai honek P puntuaren arrastre abiadura adierazten du.

$\vec{r}_{\mathrm{P}}{}'$ trasladatzen den sistema mugikorrean definituta dago, beraz hurrengoa betetzen da:

$$\left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'} = \vec{v}_P{}'$$

⇨ P puntuak sistema mugikorrarekiko daukan <u>abiadura erlatiboa</u> definitzen du. Behatzaile batek sistema mugikorretik ikusten duen P puntuaren abiadura da.

Eta emaitza hauek (50). adierazpenean ordezkatuz, hurrengoa lortzen da:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{v}_{\mathrm{P}}{}' \quad (51)$$

Azelerazioen eremua aurreko adierazpena (51) deribatuz lortzen da:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \vec{a}_{\mathrm{A}} + \vec{a}_{\mathrm{P}}{}' \quad (52)$$

Aurreko bi adierazpenak aztertzean (51) eta (52) transladatzen den sistema batetan mugitzen den puntu baten <u>mugimendu absolutua</u>, hurrengo bi mugimenduen gainezarpena bezala aztertu daiteke:

- **Arrastreko** mugimendu bat**:** puntua mugitzen den sistemari soldatuta egongo balitz edukiko zuen abiadura da. Logikoa denez, sistema mugikorrak finkoarekiko daukan abiadurarekin batera dator. Gai honek puntuak mugimenduan dagoen sistema batetan definituta egoteagatik daukan abiadura/azelerazioa adierazten du.
- Mugimendu **erlatibo** bat**:** sistema mugikorrean kokaturiko behatzaile batentzat puntuak duen mugimendua.

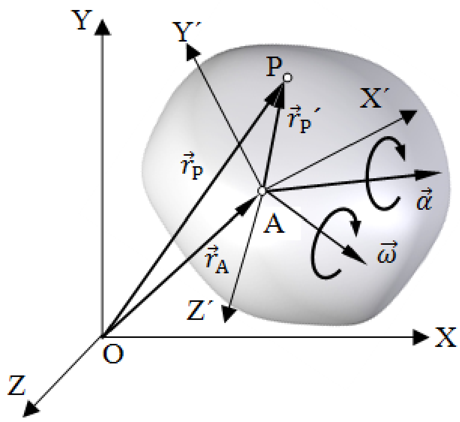
$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{v}_{\mathrm{P}}\\ \vec{a}_{\mathrm{P}}\end{array}} \begin{array}{c}=\\=\end{array} \boxed{\begin{array}{c}\vec{v}_{\mathrm{A}}\\ \vec{a}_{\mathrm{A}}\end{array}} \begin{array}{c}+\\+\end{array} \boxed{\begin{array}{c}\vec{v}_{\mathrm{P}}{}'\\ \vec{a}_{\mathrm{P}}{}'\end{array}}$$

⇩ Mugimendu **absolutua** ⇩ **Arrastre** mugimendua ⇩ Mugimendu **erlatiboa**

4.2. <u>Errotatzen duen erreferentzi sistema batekiko puntu baten mugimendu erlatiboa. Coriolis-en azelerazioa</u>

Aurreko atalean transladatzen den sistema batetan definituriko P puntuaren mugimendua aztertu da; oraingoan, sistema translazioa izateaz gain errotatzen egongo da, kasu orokorra izango da, beraz.

24. Irudian, hurrengoak definitzen dira, OXYZ sistema finkoa, eta $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ abiadura linealarekin eta $\vec{a}_{\mathrm{A}}$ azelerazio linealarekin transladatzen den eta errotatzen duen O´X´Y´Z´ erreferentzi sistema, bere abiadura eta azelerazio linealak $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ direlarik; azkenik sistema mugikorrean mugitzen den P puntua definitzen da.



24. Irudia

Hurrengo bektoreak definitzen dira:

$\vec{r}_\mathrm{P}$: B puntuaren posizioa erreferentzi sistema finkoan.

$\vec{r}_\mathrm{A}$: A puntuaren posizioa erreferentzi sistema finkoan.

$\vec{r}_\mathrm{P}{}'$: B puntuaren posizioa sistema mugikorrean.

Aurreko atalean egin den bezala, alboko grafikoa (24. Irudia) aztertuz, hurrengo erlazioa idatzi daiteke:

$$\vec{r}_\mathrm{P} = \vec{r}_\mathrm{A} + \vec{r}_\mathrm{P}{}' \qquad (53)$$

<u>Abiaduren eremua</u> aurreko adierazpena (53) sistema finkoarekiko deribatuz lortzen da:

$$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (54)$$

Aurreko kasuan gertatzen zen bezala, $\vec{r}_\mathrm{P}$ eta $\vec{r}_\mathrm{A}$ bektoreak sistema finkoan definituak daude eta beraz zuzenean deribatu daitezke; $\vec{r}_\mathrm{P}{}'$ ordea sistema mugikorrean definituta dago eta beraz bere deribatua lortzeko Boure-ren legea aplikatu beharko da.

$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_P$ ⇨ sistema finkoarekiko P puntuaren <u>abiadura absolutua</u>.

$\left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_A$ ⇨ sistema mugikorraren translazio abiadura.

$\left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}' = \vec{v}_P{}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}'$ ⇨ Non $\left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'}$ gaiak P puntuak sistema mugikorrarekiko duen abiadura erlatiboa adierazten duela kontutan hartu den.

Bi emaitza hauek aurreko 54. adierazpenean ordezkatuz: (55)

$$\vec{v}_\mathrm{P} = \vec{v}_\mathrm{A} + \vec{v}_\mathrm{P}{}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_\mathrm{P}{}'$$

Eta gaiak berrordenatuz:

$$\vec{v}_\mathrm{P} = \underbrace{\vec{v}_\mathrm{A} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_\mathrm{P}{}'}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_\mathrm{P}{}'}_{v_{erlatiboa}} \qquad (56)$$

Transladatzeaz gain errotatzen duen erreferentzi sistema batetan mugitzen den puntu batetako abiadura absolutua hurrengo bi abiadurak batuz aztertu daiteke:

- **Arrastre** abiadura: puntua sistema mugikorrari soldatuta balego edukiko lukeen abiadura da. Suposaketa honetan, sistema eta puntua batera mugitzen dira, mugimendu orokorra duen solido bat balitz bezala, bere mugimendua, sistema mugikorra definitzen duten magnitudeak definituko dutelarik: $\vec{v}_A$, $\vec{a}_A$, $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$. Solido zurrunaren mugimendu orokorra aztertzerakoan lortutako ondorioa gogoratuz (46), P puntuaren mugimendua bi mugimenduen gainezarpena bezala aztertu daiteke. Alde batetik, erreferentzi sistemaren jatorri bezala hartutako solido bereko puntu batetako translazioa, A puntua adibidez, eta bestetik, puntu horretatik pasatzen den ardatz baten inguruko P puntuaren errotazioa.
- Abiadura **erlatiboa**: sistema mugikorrean dagoen behatzaile batentzat P puntuak duen abiadura da. Bistakoa denez, gai hau sistema mugikorrean definituriko posizio bektorearen deribatua da, sistema mugikorrarekiko.

Azelerazioen eremua (55). adierazpena sistema finkoarekiko deribatuz lortzen da:

$$\left(\frac{d\vec{v}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{v}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} \wedge \vec{r}_P{}' + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} \tag{57}$$

Gai hauek aztertuz:

$\left(\frac{d\vec{v}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{a}_P$ ⇨ sistema finkoarekiko P puntuaren azelerazio absolutua.

$\left(\frac{d\vec{v}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{a}_A$ ⇨ sistema mugikorraren translazio azelerazioa.

$\left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}' = \vec{a}_P{}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P$ ⇨ Non $\left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'}$ gaiak, P puntuak sistema mugikorrarekiko duen azelerazio erlatiboa adierazten duela kontutan hartu den.

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} \wedge \vec{r}_P{}' = \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \overbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega}}^{=0}\right] \wedge \vec{r}_P{}' = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P{}'$$

$$\vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{\omega} \wedge \left[\left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}'\right] = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}')$$

Aurreko (55). adierazpenean ordezkatuz:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \vec{a}_{\mathrm{A}} + \vec{a}_{\mathrm{P}}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathrm{P}}' + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathrm{P}}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}') \qquad (58)$$

Eta gaiak ordenatuz:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\vec{a}_{\mathrm{A}} + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}')}_{a_{arrastre}} + \underbrace{\vec{a}_{\mathrm{P}}'}_{a_{erlatiboa}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathrm{P}}'}_{a_{Coriolis}} \qquad (59)$$

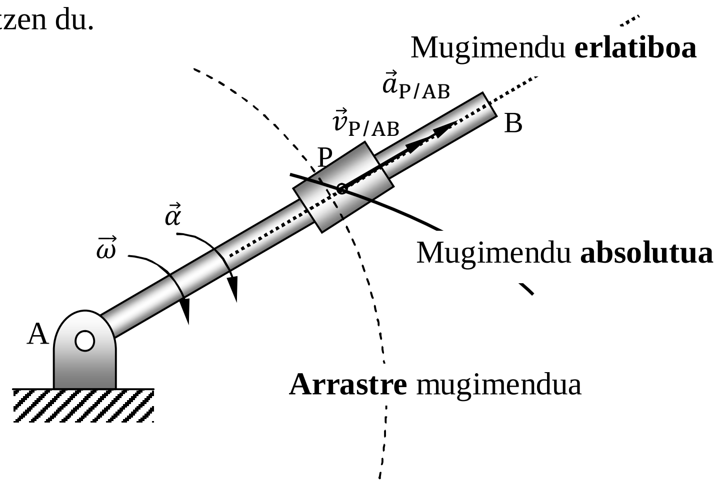
Transladatzeaz gain errotatzen duen erreferentzi sistema batetan mugitzen den puntu batetako azelerazio absolutua, hurrengo hiru azelerazioen batuketa bezala azteztu daiteke:

- **Arrastre** azelerazioa: puntua, $\vec{v}_{\mathrm{A}}$, $\vec{a}_{\mathrm{A}}$, $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ magnitude zinematikoen bidez definitua dagoen erreferentzi sistemari soldatuta dagoen solido zurrunekoa balitz bezala aztertzerakoan duen azelerazioa da.
- Azelerazio **erlatiboa:** sistema mugikorrean dagoen behatzaile batentzat, P puntuak duen azelerazioa da.
- **Coriolis-en** azelerazioa: Boure-ren legea magnitude bektorialei aplikatzean agertzen den gai bat da.

Aurreko (56) eta (59) adierazpenak aztertuz, hurrengo paralelismoa ikusi daiteke, (51) eta (52) adierazpenetarako lortu denaren antzekoa:

$\vec{v}_{\mathrm{P}}$	=	$\vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}'$	+	$\vec{v}_{\mathrm{P}}'$		
$\vec{a}_{\mathrm{P}}$	=	$\vec{a}_{\mathrm{A}} + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}')$	+	$\vec{a}_{\mathrm{P}}'$	+	$2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathrm{P}}'$
$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$
Mugimendu **absolutua**		**Arrastre** mugimendua		Mugimendu **erlatiboa**		**Coriolis-en** azelerazioa

Ondoren, adibide erraz baten bidez, mugimendu absolutuaren, arrastre mugimenduaren eta mugimendu erlatiboaren kontzeptuak azalduko dira. 25. Irudian, mekanismo sinple bat irudikatu da; bertan AB barra jarraituz mugitzen den irristagailua ikusi daiteke, barrarekiko dituen abiadura eta azelerazioa $\vec{v}_{\mathrm{P/AB}}$ eta $\vec{a}_{\mathrm{P/AB}}$ direlarik. Aldi berean, AB barrak $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$ abiadura eta azelerazio angeluarrekin biratzen du.



25. Irudia

P puntuaren **arrastre** mugimendua, erreferentzi sistema finkoarekiko mugitzen den sistema batetan definitua egoteagatik duen mugimendua da.

Adibidean irristagailukoa den P puntua, biratzen duen barratik mugitzera behartuta dago; arrastre mugimendua P puntua barrakoa balitz edukiko lukeena da, hau da ibilbide zirkularra jarraituko luke A puntuaren inguruko errotazioa hain zuzen ere.

P puntuaren mugimendu **erlatiboa**, sistema mugikorrean dagoen behatzaile batek ikusten duena da. Sistema mugikorra gelditzean geratzen den mugimendua da.

Adibidean, sistema mugikorra, AB barrak definitzen du, eta beraz mugimendu erlatiboa barratik aztertutakoa da, bere biraketa kontutan hartu gabe. Logikoa denez, irristagailuak barrarekiko duen mugimendua da, eta bistakoa denez, bere norabidea izango du.

Azkenik, P puntuaren **mugimendu absolutua** sistema finko batetik ikusten dena da**,** aurreko bi mugimenduen gainezarpena, hain zuzen.

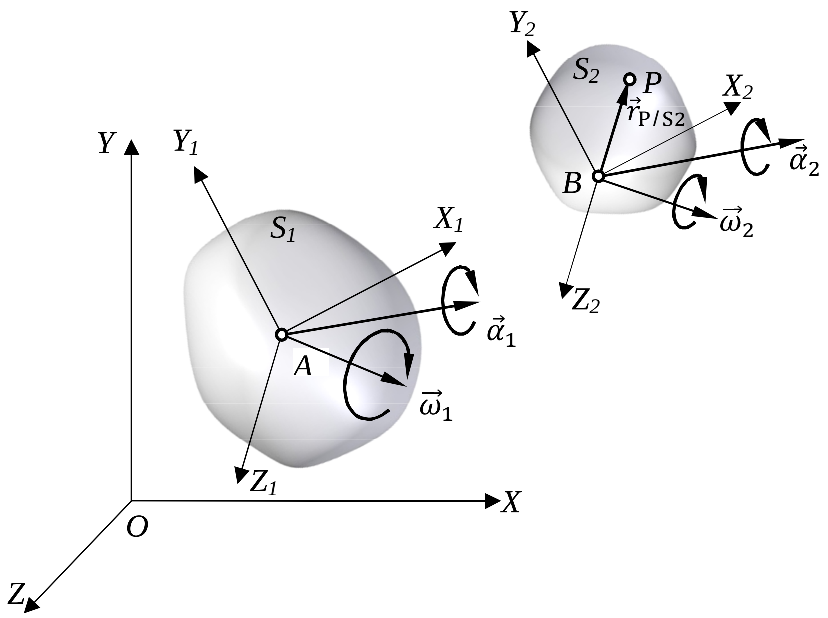
Adibidean, sistema finkoan dagoen behatzaile batentzat, P puntuak, kurbatura erradio aldakorra duen ibilbide kurboa jarraitzen du.

4.3. <u>Bi solidoren arteko mugimendu erlatiboa</u>

Aurreko ataletan errotatzen edo transladatzen dauden sistemetan definitutako puntu baten mugimendua ikasi da; atal honetan transladatzen edota errotatzen duen erreferentzi sistema mugikor batekiko solido zurrun baten mugimendu orokorra aztertuko da.

Kasu honetan, *OXYZ* erreferentzi sistema finkoa, eta S_1 eta S_2 solidoak definitzen dira, mugimendu orokor eta independenteekin. Solidoetariko bakoitza erreferentzi sistema mugikor bati lotuta dago, $AX_1Y_1Z_1$, eta $BX_2Y_2Z_2$, haien mugimenduak definitzen dituzten magnitude bektorialak $\vec{v}_A$, $\vec{a}_A$ $\vec{\omega}_1$, $\vec{\alpha}_1$, $\vec{v}_B$, $\vec{a}_B$ $\vec{\omega}_2$ eta $\vec{\alpha}_2$ direlarik.

Ondoren, S_2 sistema mugikorrean, mugitzen den P puntuaren abiaduren eta azelerazioen eremuak definitzen dira.



26. Irudia

4.3.1. S_1 sistemarekiko abiadura erlatiboen eremua:

Mugimendu orokorra duen S_2 solidokoak diren B eta P puntuen arteko erlaziotik abiatuz, hurrengoa lortzen da:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \tag{60}$$

Bestalde, P eta B puntuetako abiadurak, S_1 sistematik planteatu daitezke, arrastreko eta erlatibozko gaietan deskonposatuz:

$$\underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AP}}_{v_{Parrastre}} + \underbrace{\vec{v}_{P/S1}}_{v_{Perlatiboa}} = \underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB}}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_{B/S1}}_{v_{erlatiboa}} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \tag{61}$$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$ erlazioa kontutan hartuz eta aurreko adierazpenean (61) ordezkatuz:

$$\vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{v}_{B/S1} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \tag{62}$$

Sinplifikatuz:

$$\vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_{B/S1} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \tag{63}$$

Eta azkenik hurrengoa lortzen da:

$$\vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_{B/S1} + (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) \wedge \overrightarrow{BP} \tag{64}$$

Aurreko adierazpenak, S_2 sistemaren mugimendu orokorraren abiaduren eremua, S_1 sistemarekiko definitzen duenez, logikoa da $(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1)$ gaia, S_2 sistemak, S_1 sistemarekiko duen abiadura adierazteak, hau da:

$$\vec{\omega}_{2/1} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1 \tag{65}$$

Eta beraz, S_2 sistemaren abiadura angeluar absolutua, arrastreko abiadura angeluarraren eta abiadura angeluar erlatiboaren gehiketa dela ondorioztatu daiteke.

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1} \tag{66}$$

Azkenik, hurrengoa ondorioztatu daiteke; **abiadura erlatiboen eremua** definitzen duen adierazpena, abiadura absolutuen eremua definitzen duen adierazpenaren antzekoa da, bertan agertzen diren gaiak S_1 sistema mugikorrarekiko definituz.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_{B/S1} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}} \tag{67}$$

4.3.2. S_1 sistemarekiko azelerazio erlatiboen eremua:

Azelerazioak aztertzeko, S_1 sistemarekiko lortutako abiaduren eremua (64) deribatzea beharrezko da. $\overrightarrow{BP}$ bektorea S_1 sistemarekiko ondo deribatzeko, Boureren legea aplikatu behar da, S_1 sisteman, bektore horren abiadura angeluarra $\vec{\omega}_{2/1}$ dela kontutan izanda.

$$\left(\frac{d\vec{v}_{P/S1}}{dt}\right)_{X_1Y_1Z_1} = \left(\frac{d\vec{v}_{B/S1}}{dt}\right)_{X_1Y_1Z_1} + \left(\frac{d\vec{\omega}_{2/1}}{dt}\right)_{X_1Y_1Z_1} \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \left[\overbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{BP}}{dt}\right)_{X_2Y_2Z_2}}^{=0} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}\right] \tag{68}$$

Eta abiadura erlatiboen eremuaren kasuan ondorioztatutakoaren antzera, **azelerazio erlatiboen eremua** definitzen duen adierazpena, azelerazio absolutuen eremua definitzen duen adierazpenaren antzekoa da, bertan agertzen diren gaiak S_1 sistema mugikorrarekiko definituz.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{P/S1} = \vec{a}_{B/S1} + \vec{\alpha}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}} \tag{69}$$

- ⇨ Abiadura eta azelerazio erlatiboen eremua S_1 sistematik ikusita, S_2 sistemak duen mugimendu orokorraren ondorio dira, eta beraz, B puntuaren translazioa eta puntu horretatik pasatzen den ardatz baten inguruko errotazioa gehituz kalkulatu daitezke.

$$\begin{array}{ccccc}
\vec{v}_{P/S1} & = & \vec{v}_{B/S1} & + & \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP} \\
\vec{a}_{P/S1} & = & \vec{a}_{B/S1} & + & \vec{\alpha}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow
\end{array}$$

S_1-rekiko mugimendu erlatiboa | B puntuaren translazioa | B puntuaren inguruko errotazioa

4.3.3. Solido zurrun baten azelerazio angeluar absolutuaren kalkulua

Aurreko atalean frogatu denaren arabera, bi solidoen arteko mugimendu erlatibotik abiatuz, abiadura angeluar absolutuen arteko hurrengo erlazioa topatu daiteke:

$$\boxed{\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1}} \tag{70}$$

Adierazpen hori deribatuz:

$$\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\omega}_{2/1}}{dt}\right)_{XYZ} \tag{71}$$

Aurreko deribatua (71) kalkulatzeko, $\vec{\omega}_1$ eta $\vec{\omega}_2$ bektoreak sistema finkoarekiko abiadura angeluarrak definitzen dutela kontutan hartu behar da eta beraz haien deribadak zuzenean kalkulatu daitezke. Dena den, $\vec{\omega}_{2/1}$ gaiak, S_1 solidoak S_2 solidoarekiko daukan abiadura angeluar erlatiboa adierazten du eta $\vec{\omega}_1$ abiadura angeluarra duen S_1 sisteman definituta dago eta beraz deribatzeko Boureren legea aplikatu behar da:

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \left(\frac{d\vec{\omega}_{2/1}}{dt}\right)_{X_2Y_2Z_2} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1} \qquad (72)$$

Orain, $\vec{\omega}_{2/1}$ askatuz eta aurreko adierazpenean ordezkatuz, hurrengo ondorioa lortzen da, bertan $\vec{\alpha}_{2/1}$ gaiak, S_2 solidoak S_1 solidoarekiko daukan azelerazio erlatiboa adierazten duelarik.

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) \qquad (73)$$

Eta eragiketak burutuz, solidoen azelerazio absolutuak erlazionatzen duen adierazpena lortzen da. Azkenengo gaia, $\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2$, Resal-en azelerazio osagarria da.

$$\boxed{\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2} \qquad (74)$$