5. GAIA ROBOTAREN EREDU GEOMETRIKOA ETA ZINEMATIKOA

ROB0TIKA

1. Aurkibidea

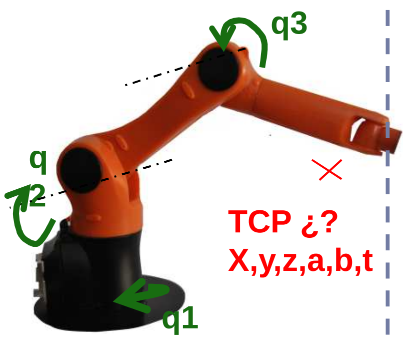
- SARRERA
- POSIZIOZKO ZINEMATIKA
  - ZUZENEKO ZINEMATIKA
    - EREDU GEOMETRIKOA
    - D-H EN ALGORITMOA
  - ALDERANTZIZKO ZINEMATIKA.
    - EREDU GEOMETRIKOA
    - METODO ALGEBRAIKOA
    - DESAKOPLAMENDU ZINEMATIKOA
- MUGIMENDUZKO ZINEMATIKA
  - HEDAPEN-EKUAZIOAK
  - JACOBTAR MATRIZEA

1. Sarrera

POSIZIOZKO ZINEMATIKA

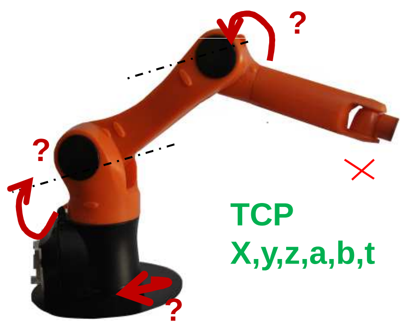
Koordenatu artikularren *kalkulua*
espazioko puntuekiko eta alderantziz

ZUZENA



Geometrikoa **D-H**

ALDERANTZIZKOA



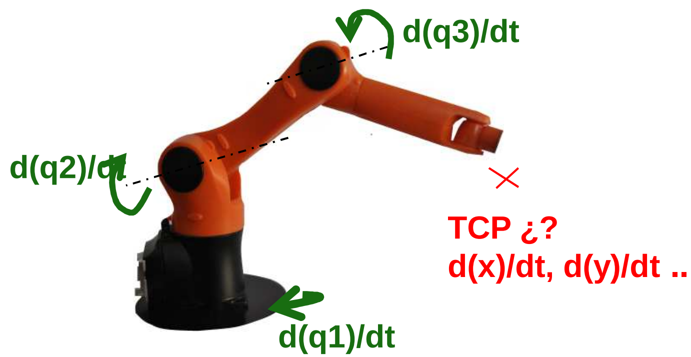
Geometrikoa **Desakoplamendua**
Algebraikoa

MUGIMENDUZKO ZINEMATIKA

Robotaren osagaien(artikulazio, kate-mailak..)
abiadura lineala eta angularraren *kalkulua*

HEDAPEN EKUAZIOAK

JACOBTAR MATRIZEA
(Zuzena eta alderantzizkoa)



1. Sarrera

- Industri robot batek lanabes batekin funtzio berezi bat egin behar du.
- Robotari lanabesa momentu oro non kokatu behar duen zehaztu behar diogu.
- Robotaren muturra kokatu behar da (posizionatu eta orientatu)
- **Muturra kokatzeak beste artikulazioen eta besoen mugimenduetan eragina dauka.**

2. Posiziozko zinematika

Robotaren **zinematikak, erreferentzi sistema finko batekiko** maneiatzailearen **mugimendua** aztertzen du, mugimendu horrek sortzen dituen indarrak eta momentuak kontuan izan barik**.**

- **Muturraren Kokapenaren** (posizioa eta orientazioa) eta **koordenatu artikularraren** arteko erlazioa zehazten du.
- **Artikulazioen** mugimenduen abiaduren eta **muturraren abiaduraren** arteko erlazioa aztertzen du (eredu diferentziala – Jacobtar matrizea)

2. Posiziozko zinematika

ZUZENEKO zinematika

Robotaren muturraren kokapena zehazten du, erreferentzi koordenatu sistema batekiko, <u>artikulazioen eta robotaren parametro geometrikoetatik abiatuta</u>

ALDERANTZIZKO zinematika

<u>Robotaren kokapena ezagututa</u>, robotaren konfigurazioa zein izan behar den zehazten (artikulazioak eta parametro geometrikoak)

Robotikaren ikuspuntutik, alderantzizko zinematika garrantzitsuagoa da.

2. Posiziozko zinematika

Koordenatu artikularren balioak

(q1, q2, ….qn)

ZUZENEKO zinematika →

← **ALDERANTZIZKO zinematika**

Robotaren muturraren kokapena

(x,y,z,a,b,t)

x=f1(q1, q2, ….qn)
y=f1(q1, q2, ….qn)
………….
t=f1(q1, q2, ….qn)

q1=f1(x,y,z,a,f,t)
q1=f1(x,y,z,a,f,t)
………….
q1=f1(x,y,z,a,f,t)

2. Posiziozko zuzeneko zinematika

- Zuzeneko zinematikaren problema aztertzeko metodoak:

Metodo geometrikoak

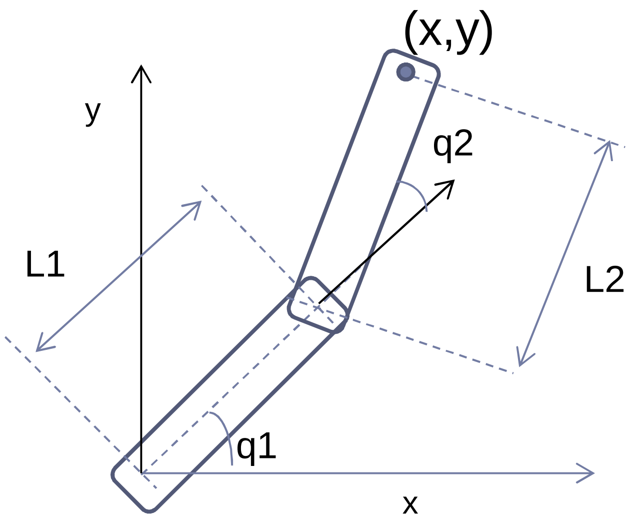
- Metodo hauek ez dira sistematikoak (Askatasun gradu gutxiko robotentzat).
- Erlazio geometrikoak erabiltzen ditu robotaren muturraren posizioa lortzeko aldagai artikularren funtziopean.
- Ikusmen espazial egokia behar da.

Erreferentzi sistemen aldaketetan oinarritutako metodoak

- Metodo sistematikoa (arau batzuk jarraitzen ditu eredua askatzeko, robotaren ezaugarri geometrikoak kontutan izan barik).
- **Transformazio matrize homogeneoak** erabiltzen ditu => Denavit Hartenberg (1955) metodoa.

2. Zuzeneko zinematika:Metodo geometrikoa

- Robotaren muturreko posizioa lortzeko erlazio geometrikoak erabiltzen dituen metodoa.
- Orokorrean posizioa lortzeko erabiltzen da eta ez orientatzeko
- Askatasun-gradu gutxiko robotetan erabiltzen da.



2 AG-ko beso batentzat:

$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1+q_2)$$

$$y = l_1 \, sen \, q_1 + l_2 \, sen(q_1+q_2)$$

2. Zuzeneko zinematika:Matrize homogeneoak

Robot bat, artikulazioen bitartez lotutako objektu zurrunez (**kate-mailez**) osatutako **kate zinematiko** bat bezala kontsideratu daiteke.

- Robotaren oinarrian erreferentzi sistema finko bat badago eta erreferentzi sistema horrekiko kate-maila bakoitzaren kokapena zehazten bada,

$$\Downarrow$$

- Transformazio matrize homogeneo bat aurkitu daiteke, ondokoa beteko duena:
  - Koordenatu artikularren funtzio izango da.
  - Robotaren muturraren kokapena erreferentzi sistema finkoarekiko adieraziko du.

2. Zuzeneko zinematika:Matrize homogeneoak

- Kate-maila bakoitzari erreferentzi sistema bat egokitzen zaio.
- Kate-mailen artean traslazioak eta errotazioak adierazi daitezke.
- ${}^{i-1}_{i}A$ matrizea robotaren ondoz ondoko bi kate-mailen sistemen posizio eta translazio erlatiboa adierazten du.
- Robotaren kate zinematikoa partzialki edo osoki adierazi daiteke, matrizeak bat bestearen atzean kokatuz:

$$ {}^{0}_{i}T = {}^{0}_{1}A \; {}^{1}_{2}A \; {}^{2}_{3}A \ldots\ldots \; {}^{i-1}_{i}A $$

- Kate-maila bakoitzari dagokion koordenatu sistema kokatzeko eta robotaren kate zinematikoa lortzeko metodorik erabiliena Denavit-Hatenbergen metodoa da (1955).

2. Zuzeneko zinematika:Matrize homogeneoak

<u>Denavit-Hartenberg-en Algoritmoa :</u>

- <u>Erreferentzi sistemen esleipena</u> : D-H-en arauak jarraitu
- <u>D-Hen parametroak identifikatu</u>: Taula: θi, di, ai, αi
- <u>Matrizeen lorpena</u>: Aurreko taularen errenkada bakoitzeko

$$ {}^{i-1}_{i}A = \begin{bmatrix} C\,\theta i & -C\,\alpha i\, S\,\theta i & S\,\alpha i\, S\,\theta i & ai\;\; C\,\theta i \\ S\,\theta i & C\,\alpha i C\;\theta i & -S\,\alpha i C\;\theta i & ai\;\; S\,\theta i \\ 0 & S\,\alpha i & C\,\alpha i & di \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- <u>Kokapen matrizeak robotaren muturretik oinarrira</u>

$$ {}^{0}_{i}T = {}^{0}_{1}A\; {}^{1}_{2}A\; {}^{2}_{3}A \ldots\ldots {}^{i-1}_{i}A $$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

2. Zuzeneko zinematika:Matrize homogeneoak

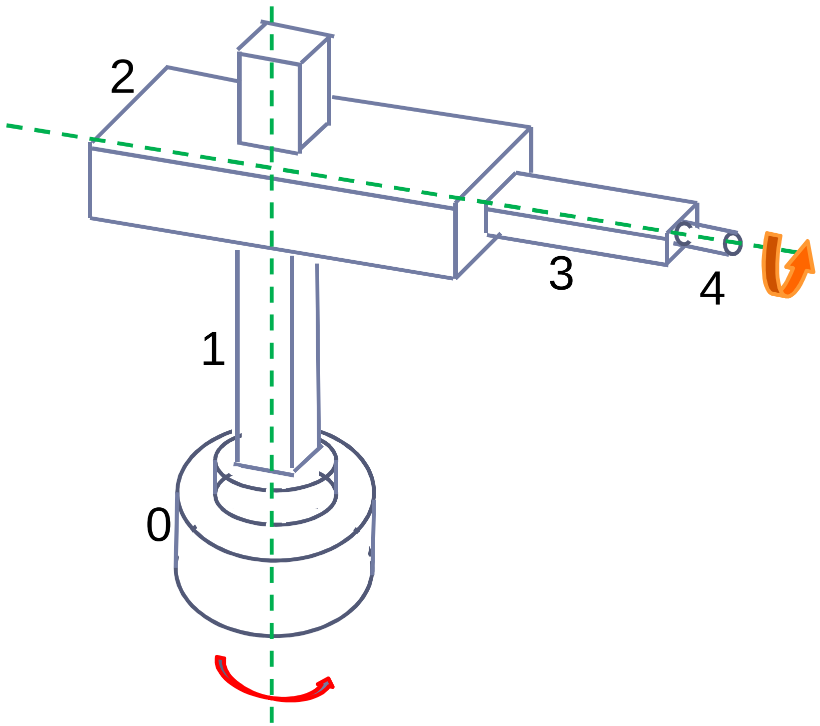
D-H algoritmoa:

Erreferentzi sistemen esleipena

Adibidea:

Robot zilindrikoaren zuzeneko eredu zinematikoa (4AG- 2 errotazionalak eta translaziozkoak)

- D-H1: Kate-mailak zerrendatu 1-etik n arte (n=AG). S= elementua robotaren oinarria izango da.
- D-H2: Artikulazioak 1-etik n arte zerrendatu
- D-H3: Artikulazioen ardatzak. Biraketakoa bada, ardatza biraketa-ardatza bera izango da. Prismatikoa bada, desplazamendua gertatzen den ardatza bera izango da.



Jon Legarreta / Raquel Martinez

2. Zuzeneko zinematika:Matrize homogeneoak

D-H algoritmoa:

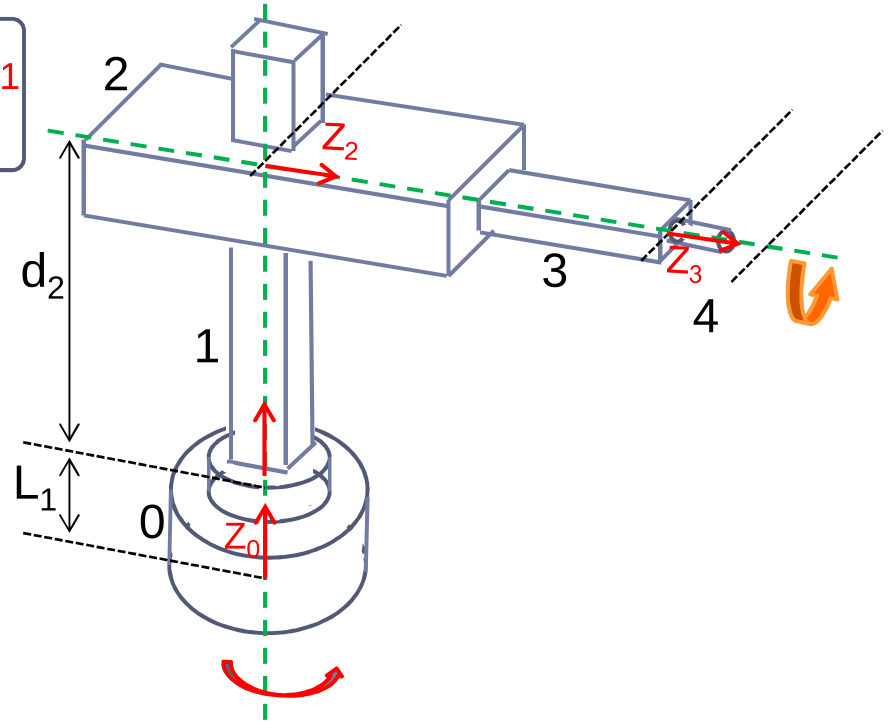
Erreferentzi sistemen esleipena

I elementu bakoitzaren erreferentzi sistema ezarri

- D-H4: i bakoitzeko (0-tik n-1 arte), Zi ardatza kokatu i+1 artikulazioaren ardatzean

Adibidea:

Robot zilindrikoaren zuzeneko eredu zinematikoa (4AG- 2 errotazionalak eta translaziozkoak)



Jon Legarreta / Raquel Martinez

2. Zuzeneko zinematika:Matrize homogeneoak

D-H algoritmoa:

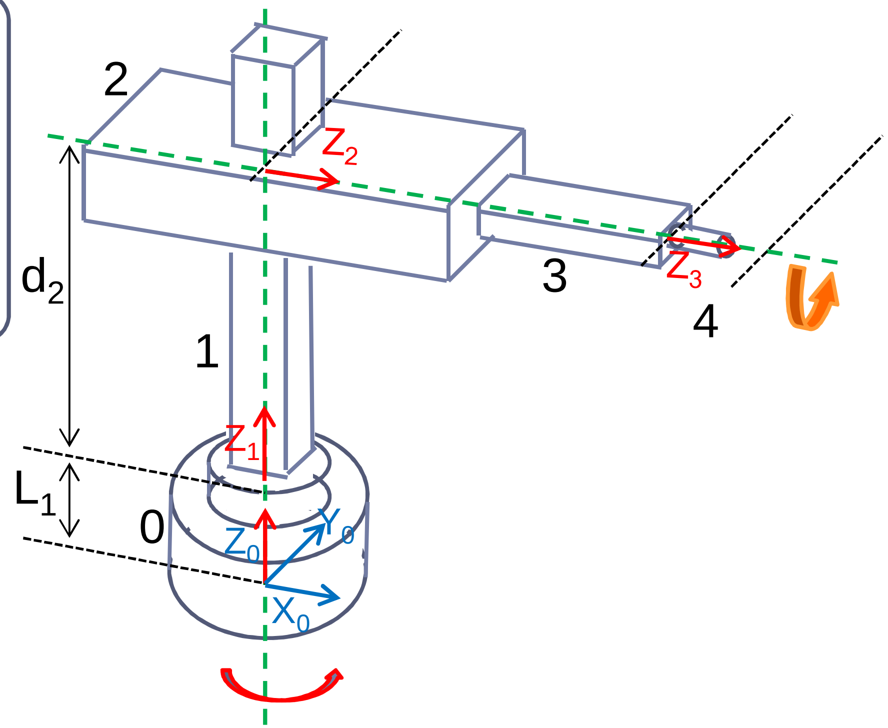
Erreferentzi sistemen esleipena

I elementu bakoitzaren erreferentzi sistema ezarri

- D-H4: i bakoitzeko (0-tik n-1 arte), Zi ardatza kokatu i+1 artikulazioaren ardatzean
- D-H5: So oinarri sistemaren jatorria kokatu Z0 ardatzaren edozein puntutan (1 artikulazioaren ardatza). X0 eta Y0 ardatzak Z0 ardatzarekin sistema destrogiroa izateko kokatzen dira.

Adibidea:

Robot zilindrikoaren zuzeneko eredu zinematikoa (4AG- 2 errotazionalak eta translaziozkoak)



2. Zuzeneko zinematika:Matrize homogeneoak

D-H algoritmoa:

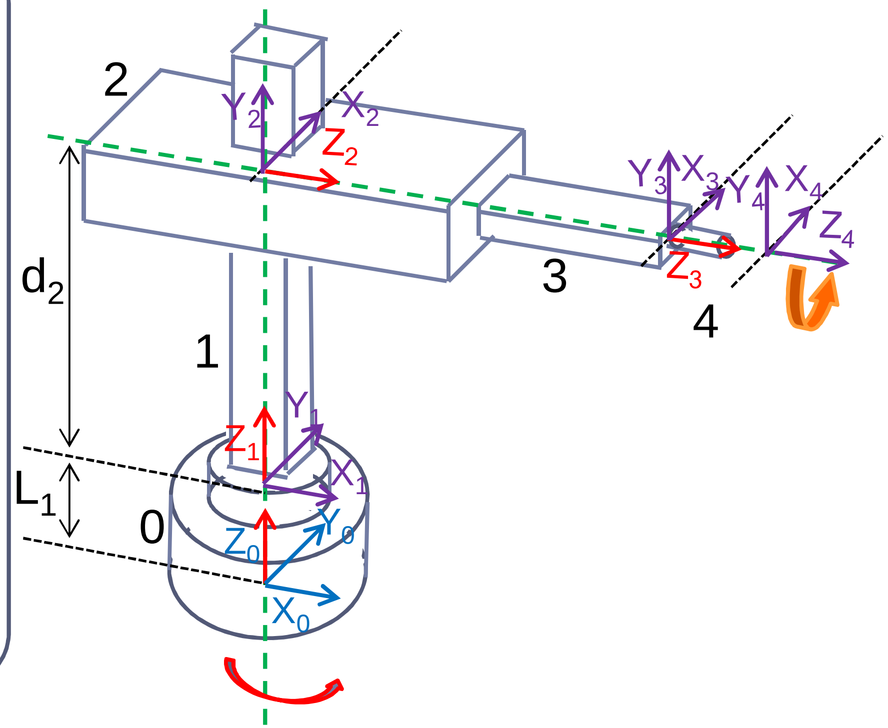
Erreferentzi sistemen esleipena

I elementu bakoitzaren erreferentzi sistema ezarri

- D-H4: i bakoitzeko (0-tik n-1 arte), Zi ardatza kokatu i+1 artikulazioaren ardatzean
- D-H5: So oinarri sistemaren jatorria kokatu Z0 ardatzaren edozein puntutan (1 artikulazioaren ardatza). X0 eta Y0 ardatzak Z0 ardatzarekin sistema destrogiroa izateko kokatzen dira.
- D-H6: i bakoitzeko (1-tik n-1 arte), Si sistema kokatu (i elementuarekin lotuta) Zi ardatzaren intersekzioa Zi-1 eta Zi –rekin normala den lerroan. Bi ardatzak ebakidura puntua badaukate, ebakidura puntuan kokatzen dira. Paraleloak badira i+1 artikulazioan .
- D-H7: Xi kokatu Zi-1 eta Zi ardatzekin normala den lerro komunean. Ardatzak ebakidura puntua badaukate Zi-1 eta Zi ardatzek osatzen duten planoarekin perpendikularra den lerroan kokatzen da. Xi kokatu Zi-1 –ekin normala den lerroan, ebaki egiten du eta kanporantz zuzentzen da.
- D-H8: Yi kokatu Xi eta Zi –rekin sistema destrogiro osatuz.
- D-H9: {Sn} sistema robotaren muturrena kokatu Zn Zn-1-rekin bat eginez eta Xn Zn-1 eta Zn-rekin normala izanik.

Adibidea:

Robot zilindrikoaren zuzeneko eredu zinematikoa (4AG- 2 errotazionalak eta translaziozkoak)



2. Zuzeneko zinematika:Matrize homogeneoak

D-H algoritmoa:

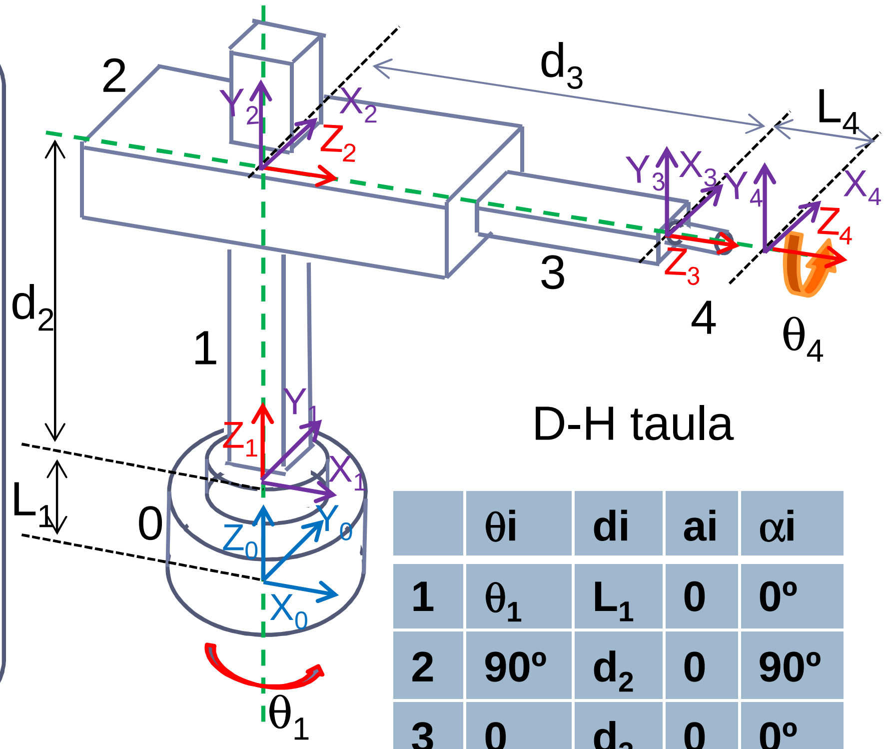
D-H-en parametroak identifikatu

Denavit-Hartenberg-eko parametroekin taula bat osatu

- D-H10: **θi** **lortu** Zi-1-ekiko biratu behar den angelua bezala Xi-1 eta Xi paraleloak izateko.
- D-H11: **di lortu** Zi-1 ardatzaren luzeran neurtzen den distantzia bezala. Distantzia hori {Si-1} sistema mugitu beharreko distantzia da Xi eta Xi-1 plano berean egoteko.
- D-H12: **ai** lortu Xi ardatzaren luzeran neurtzen den distantzia bezala (Xi-1-ekin bat egingo duena). Distantzia hori {Si-1} sistema mugitu beharreko distantzia da bere jatorria {Si}-ekin berdina izateko.
- D-H13: αi lortu Xi-ekiko biratu behar den angelua bezala (Ondorioz Xi-1-ekin parekatzen da) {Si-1} berria {Si} –ekin erabat parekatuz

Adibidea:

Robot zilindrikoaren zuzeneko eredu zinematikoa (4AG- 2 errotazionalak eta translaziozkoak)



D-H taula

	θi	di	ai	αi
1	**θ_1**	**L_1**	**0**	**0º**
2	**90º**	**d_2**	**0**	**90º**
3	**0**	**d_3**	**0**	**0º**
4	**θ_4**	**L_4**	**0**	**0º**

2. Zuzeneko zinematika:Matrize homogeneoak

D-H algoritmoa:

Matrize Homogeneoak lortu

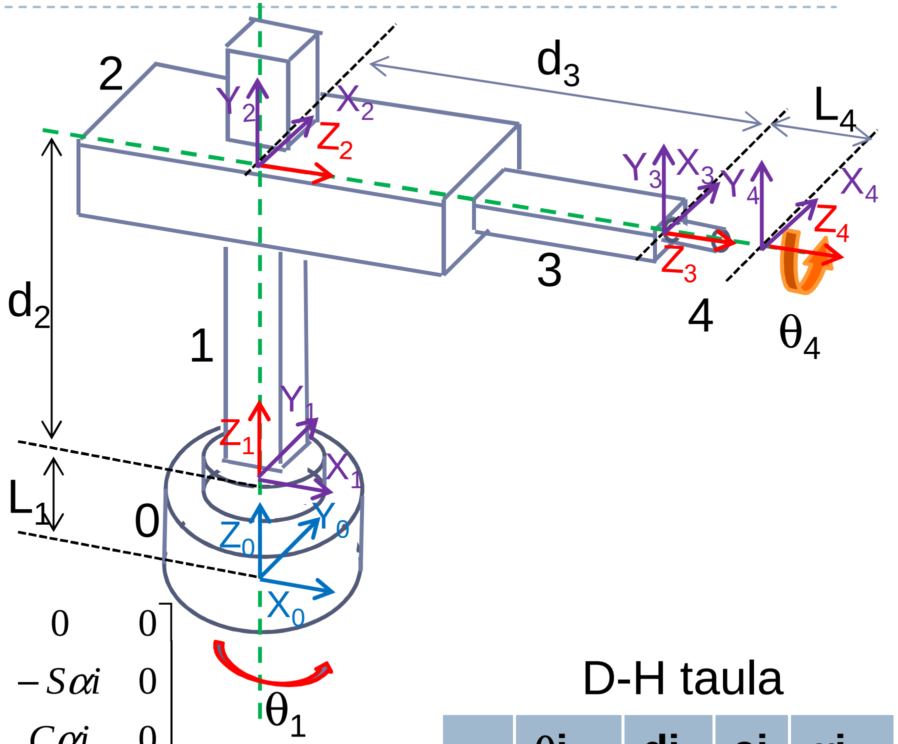
- D-H14: ${}^{i-1}A_i$ Transformazio Matrizea lortu.

  θi* biraketa** *Zi-1-ekiko, jarraian* ***di translazio *bat* ***(Zi-1*** *ardatzaren luzeran), ondoren* ***ai*** *translazio bat (Xi ardatzaren luzeran) eta azkenik* ***αi*** *errotazioa Xi-ekiko :*

$$
{}^{i-1}_{i}A = R(Zi-1,\vartheta i)T(di)T(ai)R(xi,\alpha i) =
$$

$$
= \begin{bmatrix} C\theta i & -S\theta i & 0 & 0 \\ S\theta i & C\theta i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & di \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ai \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha i & -S\alpha i & 0 \\ 0 & S\alpha i & C\alpha i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{i-1}_{i}A = \begin{bmatrix} C\theta i & -C\alpha i\,S\theta i & S\alpha i\,S\theta i & ai\,C\theta i \\ S\theta i & C\alpha i C\theta i & -S\alpha i C\theta i & ai\,S\theta i \\ 0 & S\alpha i & C\alpha i & di \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$



D-H taula

	θi	di	ai	αi
1	**θ_1**	**L_1**	**0**	**0º**
2	**90º**	**d_2**	**0**	**90º**
3	**0**	**d_3**	**0**	**0º**
4	**θ_4**	**L_4**	**0**	**0º**

2. Zuzeneko zinematika:Matrize homogeneoak

D-H algoritmoa: **Matrize Homogeneoak lortu**

$$ {}^{i-1}_{i}A = \begin{bmatrix} C\theta i & -C\alpha i\, S\theta i & S\alpha i\, S\theta i & ai\, C\theta i \\ S\theta i & C\alpha i C\theta i & -S\alpha i C\theta i & ai\, S\theta i \\ 0 & S\alpha i & C\alpha i & di \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

D-H taula

	θi	di	ai	αi
1	θ_1	L_1	0	0º
2	90º	d_2	0	90º
3	0	d_3	0	0º
4	θ_4	L_4	0	0º

$$ {}^{0}_{1}A = \begin{bmatrix} C\theta 1 & -S\theta 1 & 0 & 0 \\ S\theta 1 & C\theta 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{1}_{2}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{2}_{3}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{3}_{4}A = \begin{bmatrix} C\theta 4 & -S\theta 4 & 0 & 0 \\ S\theta 4 & C\theta 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- D-H15: Robotaren oinarriko sistema muturreko sistemarekin erlazionatzen duen Transformazio matrizea lortu: ${}^{0}T_{4} = {}^{0}A_{1}\, {}^{1}A_{2}\, {}^{2}A_{3}\, {}^{3}A_{4}$

$$ {}^{0}_{4}T = {}^{0}_{1}A\, {}^{1}_{2}A\, {}^{2}_{3}A\, {}^{3}_{4}A = \begin{bmatrix} -S\theta 1 C\theta 4 & S\theta 1 S\theta 4 & C\theta 1 & C\theta 1(d3+L4) \\ C\theta 1 C\theta 4 & -C\theta 1 S\theta 4 & S\theta i & S\theta 1(d3+L4) \\ S\theta 4 & C\theta 4 & 0 & d2+L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

T matrizeak oinarriarekiko muturraren orientazioa eta posizioa definitzen du koordenatu artikularren funtzio bezala.

2. Alderantzizko zinematika

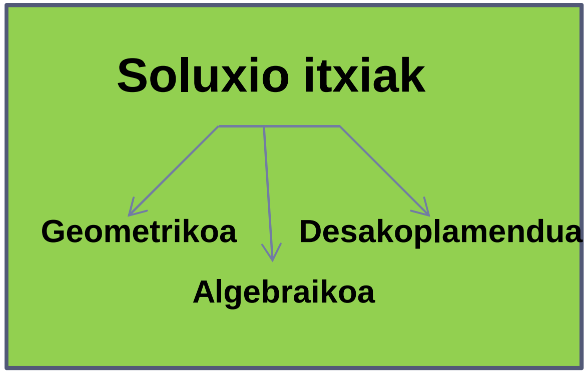
ALDERANTZIZKO ZINEMATIKAREN PROBLEMA

Robotaren kokapena ezagututa, robotaren konfigurazioa zehatzen du (artikulazioak eta parametro geometrikoak).

1) Soluzioa ez da sistematikoa
2) Robotaren konfigurazioaren menpe dago
3) Lortu behar den erlazioa (soluzio itxia) :

qk=fk(x,y,z,a,f,t) k=1…n (Askatasun-graduak)

4) Ez da zertan egon behar beti soluzio itxi bat
Soluzio itxi bat egoteko baldintzak:
a) 3 artikulazio-ardatz auzokideak puntu baten elkartzen direnean (PUMA robota eta Stanford)
b) 3 artikulazio-ardatz auzokideak euren artean paraleloak (ASEA, eta abar)



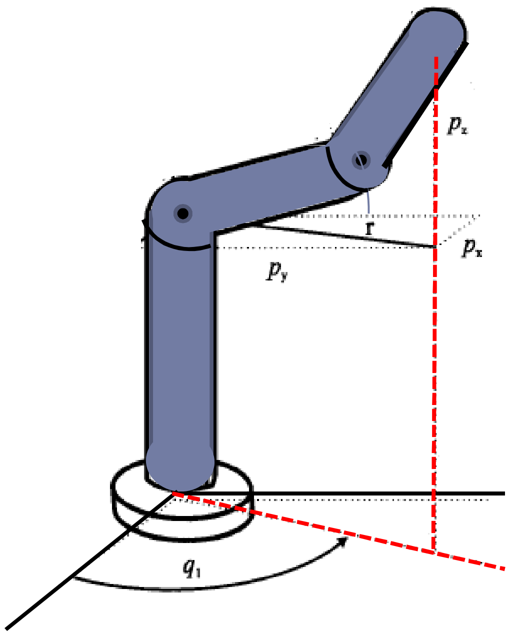
Jon Legarreta / Raquel Martinez

2. Alderantzizko zinematika: Metodo Geometrikoak

Kate zinematikoa plano geometriko desberdinetan deskonposatzean eta ondoren plano bakoitza trigonometria erabiliz ebaztean datza. Robotaren muturra kokatzeko beharrezkoak diren erlazio geometrikoak lortzea. Lehenengo artikulazioetarako erabiltzen da.

Adibidea: **Robot 3 AG**

Datuak: Px, Py, Pz robotaren muturra kokatu nahi den puntua.



$$q_1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}$$

$$\sin q_3 = \pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

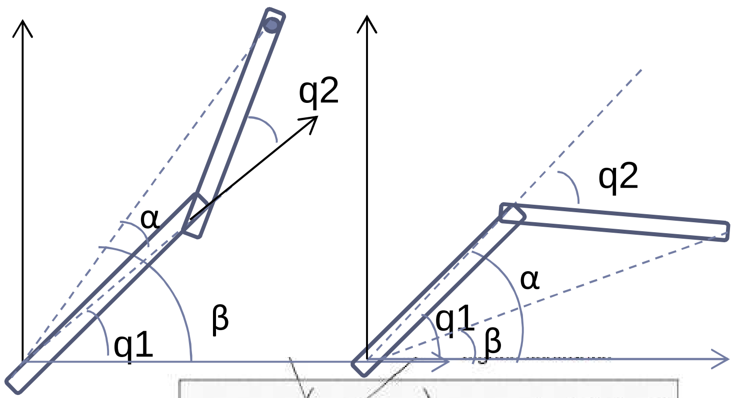
$$q_3 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right)$$

2 artikulazioa bi soluzio ditu (ukondo gora eta bera):

$$q_2 = \beta - \alpha$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{p_z}{r}\right) = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$



$$q_2 = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) - \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

2. Alderantzizko zinematika: Metodo algebraikoak (TMH)

Zuzeneko eredu zinematikotik lortutako ekuazioen maneiaketan oinarritzen dira:

Hau da, $\mathbf{q_i}$ aldagaiak askatu, **n, o, a, p. bektoreen funtzio:**

$$ {}^{0}_{n}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{q}_1,..,\boldsymbol{q}_n) = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{n}} & \vec{\boldsymbol{o}} & \vec{\boldsymbol{a}} & \vec{\boldsymbol{p}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Transformazio Matrize Homogeneoak erabiliz, modu honetan:

$$ {}^{0}_{n}\boldsymbol{T} = {}^{0}_{1}\boldsymbol{A}\,{}^{1}_{2}\boldsymbol{A}\,{}^{2}_{3}\boldsymbol{A}\cdots{}^{n-1}_{n}\boldsymbol{A} $$

$$ \left({}^{0}_{1}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\,{}^{0}_{n}\boldsymbol{T} = {}^{1}_{2}\boldsymbol{A}\,{}^{2}_{3}\boldsymbol{A}\cdots{}^{n-1}_{n}\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{askatzen} \quad \boldsymbol{dugu} \quad \boldsymbol{q}_1 $$

$$ \left({}^{1}_{2}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\left({}^{0}_{1}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\,{}^{0}_{n}\boldsymbol{T} = {}^{2}_{3}\boldsymbol{A}\cdots{}^{n-1}_{n}\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{askatzen} \quad \boldsymbol{dugu} \quad \boldsymbol{q}_2 $$

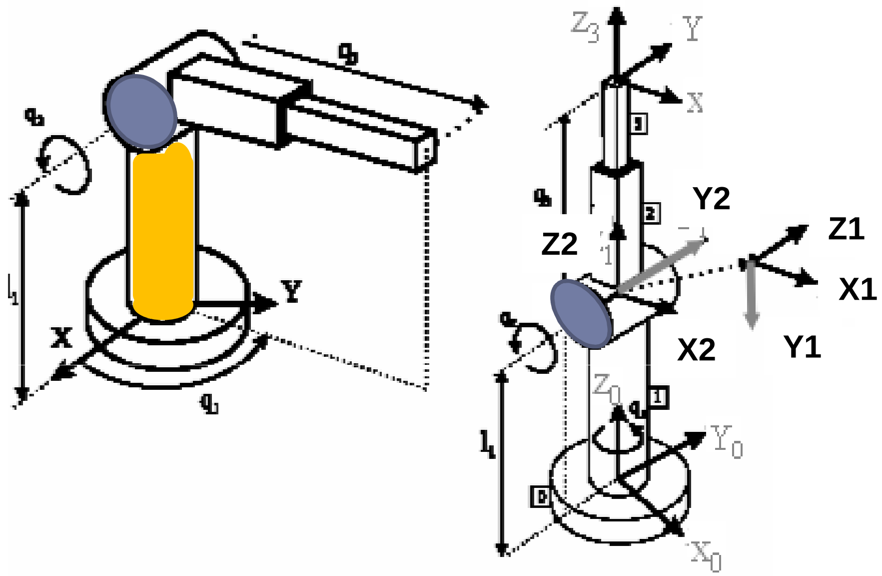
$$ \vdots $$

$$ \left({}^{2}_{3}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\left({}^{0}_{1}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\,{}^{0}_{n}\boldsymbol{T} = \cdots{}^{n-1}_{n}\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{askatzen} \quad \boldsymbol{dugu} \quad \boldsymbol{q}_{n-1} \;\; \boldsymbol{y}\; \boldsymbol{q}_n $$

Oharrak:
Ekuazioen bi aldeetako elementuak berdintzean datza, artikulazio aldagai bakarra agertzen den kasuetan, erlazio trigonometrikoak erabiliz eta arkotangenteen funtzio diren zatiketak aurkituz.

2. Alderantzizko zinematika: Metodo algebraikoak (TMH)

Adibidea: **Robot esferikoa 3 AG**



D-H taula

	θi	di	ai	αi
1	q1	L_1	0	-90º
2	q2	0	0	90º
3	0	q3	0	0º

TMH:

$$ {}^0_1A = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & -Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & Cq1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2A = \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & Sq2 & 0 \\ Sq2 & 0 & -Cq2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{q}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

2. Alderantzizko zinematika: Metodo algebraikoak (TMH)

Adibidea: **Robot esferikoa 3 AG**

$$ {}^{0}_{3}T = {}^{0}_{1}A\, {}^{1}_{2}A\, {}^{2}_{3}A $$

$$ \left({}^{0}_{1}A\right)^{-1}\, {}^{0}_{n}T = {}^{1}_{2}A\, {}^{2}_{3}A \Rightarrow askatu \quad q_1 $$

$$ \left({}^{0}_{1}A\right)^{-1}\, {}^{0}_{n}T = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & -Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & Cq1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & Sq2 & 0 \\ Sq2 & 0 & -Cq2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ \left({}^{0}_{1}A\right)^{-1}\, {}^{0}_{n}T = \begin{bmatrix} Cq1 & Sq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L1 \\ -Sq1 & Cq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & Sq2 & Sq2\,q3 \\ Sq2 & 0 & -Cq2 & -Cq2\,q3 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ -Px\,Sq1 + Py\,Cq1 = 0 \Rightarrow \frac{Sq1}{Cq1} = \frac{Py}{Px} \Rightarrow \boxed{q1 = \arctan\left(\frac{Py}{Px}\right)} $$

2. Alderantzizko zinematika: Metodo algebraikoak (TMH)

Adibidea: **Robot esferikoa 3 AG**

$$\left({}^{1}_{2}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\left({}^{0}_{1}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\,{}^{0}_{3}\boldsymbol{T} = {}^{2}_{3}\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{askatzen \quad dira \quad q_{2} \quad y \quad q_{3}}$$

$$\left({}^{1}_{2}A\right)^{-1}\left({}^{0}_{1}A\right)^{-1}\,{}^{0}_{n}T = \begin{bmatrix} Cq2 & Sq2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -Sq2 & Cq2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Cq1 & Sq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L1 \\ -Sq1 & Cq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left({}^{1}_{2}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\left({}^{0}_{1}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\,{}^{0}_{n}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Cq2Cq1} & \boldsymbol{Cq2Sq1} & \boldsymbol{Sq2} & \boldsymbol{-L1Sq2} \\ \boldsymbol{-Sq1} & \boldsymbol{Cq1} & 1 & 0 \\ \boldsymbol{-Sq2Cq1} & \boldsymbol{-Sq2Sq1} & \boldsymbol{Cq2} & \boldsymbol{-L1Cq2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{n_x} & \boldsymbol{o_x} & \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{p_x} \\ \boldsymbol{n_y} & \boldsymbol{o_y} & \boldsymbol{a_y} & \boldsymbol{p_y} \\ \boldsymbol{n_z} & \boldsymbol{o_z} & \boldsymbol{a_z} & \boldsymbol{p_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{\boldsymbol{q}3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PxCq2Cq1 + PySq1Cq2 + PzSq2 - L1Sq2 = 0 \Rightarrow \frac{Sq2}{Cq2} = -\tan\frac{PxCq1 + PySq1}{Pz - L1} \Rightarrow \boxed{q2 = -\arctan\left(\frac{PxCq1 + PySq1}{Pz - L1}\right)}$$

$$\boldsymbol{-Sq2Cq1Pz - Sq2Sq1Py + PzCq2 - L1Cq2 = q3} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{q3 = Cq2(Pz - L1) - Sq2(Cq1Pz + Sq1Py)}}$$

2. A. Z.: Desakoplamendu zinematikoaren metodoa

Posizioa (3) eta muturra orientatzen (3) duten Askatasun graduak bereiztuta ebaztean oinarritzen dira.
Ondorioz, alderantzizko problema zinematikoa bi azpi-problemetan zatitzen da:

1) Posizioari dagozkion lehenengo 3 artikulazioak ebatzi
2) Esku-muturrari dagozkion azken 3 artikulazioak ebatzi.

Ebazpen-metodoa:

1) Aurkitu nahi den posizio eta orientaziotik [n,o,a,p] abiatuta, azkenengo 3 askatasun graduko ebaketa-puntua lortzen da (Pm esku-mutur puntua).
2) Alderantzizko problema zinematikoa ebazten da oinarritik **Pm** –ra heltzen den 3 AG-ko besoarentzako (q1,q2,q3)
3) Alderantzizko problema zinematikoa ebazten da **Pm**-tik azken punturaino pf (q4,q5,q6 kalkulatuz).

3. Mugimenduzko zinematika: Eredu diferentziala

Orain arte artikulazioen erlazioa modu **estatikoan** kontsideratu dira, hau da, robotaren mugimendua kontutan izan barik (zuzeneko eta alderantzizko zinematika).

Robota desplazatzen denean, kate zinematikoaren elementuak artikulazio batetik hurrengora **abiadura linealak zein angeluarrak hedatzen** dituzte.
i+1 elementuaren abiadura i-ren abiadura gehi i+1 artikulazioaren osagaiena izango da.

Ebaketa-metodoak
Eredu diferentziala

Abiaduren hedapena

Biraketa ekuazioak

Translazio ekuazioak

Jacobtar matrizearen kalkulua

Artikulazioen abiadurak

Robotaren muturreko abiadurak

$$\begin{bmatrix} \dot{q}1 \\ \dot{q}2 \\ \vdots \\ \dot{q}n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

Jacobtar ZUZENA

ALDERANTZIZKO Jacobtar

3. Mugimenduzko zinematika: Jacobtar matrizea

Jacobtar matrizea deribatuetan oinarritutako matrizea da. Orokorrean, n aldagai independenteen menpe dauden m funtzioentzako:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

n aldagaiak denboraren funtzio direla suposatzen da, beraz:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdot \dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\cdot \dot{x}_n \\ \dot{y}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdot \dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\cdot \dot{x}_n \\ &\vdots \\ \dot{y}_m &= \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}\cdot \dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\cdot \dot{x}_n \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{y}} = \boxed{\mathbf{J}(x)}\cdot \dot{x}$$

Jacobtar matrizea

Oharra: **x** denboraren funtzio denez, instant bakoitzeko Jacobtar desberdin bat egon behar da.

3. Mugimenduzko zinematika: Jacobtar matrizea

Robotikan, Jacobtarra robotaren muturreko posizioak funtzio bezala erabiltzen da funtzio horien aldagai independenteak artikulazioak izanik:

$$x = f_x(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$y = f_y(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$z = f_z(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$\beta = f_\beta(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$\gamma = f_\gamma(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

Jacobtar

Muturraren abiadura lineala

$$\dot{x} = \frac{\partial f_x}{\partial q_1}\cdot\dot{q}_1 + \frac{\partial f_x}{\partial q_2}\cdot\dot{q}_2 \cdots + \frac{\partial f_x}{\partial q_n}\cdot\dot{q}_n$$
$$\dot{y} = \frac{\partial f_y}{\partial q_1}\cdot\dot{q}_1 + \frac{\partial f_y}{\partial q_2}\cdot\dot{q}_2 \cdots + \frac{\partial f_y}{\partial q_n}\cdot\dot{q}_n$$
$$\dot{z} = \frac{\partial f_z}{\partial q_1}\cdot\dot{q}_1 + \frac{\partial f_z}{\partial q_2}\cdot\dot{q}_2 \cdots + \frac{\partial f_z}{\partial q_n}\cdot\dot{q}_n$$
$$\dot{\alpha} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_1}\cdot\dot{q}_1 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_2}\cdot\dot{q}_2 \cdots + \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_n}\cdot\dot{q}_n$$
$$\dot{\beta} = \frac{\partial f_\beta}{\partial q_1}\cdot\dot{q}_1 + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_2}\cdot\dot{q}_2 \cdots + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_n}\cdot\dot{q}_n$$
$$\dot{\gamma} = \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1}\cdot\dot{q}_1 + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_2}\cdot\dot{q}_2 \cdots + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n}\cdot\dot{q}_n$$

Muturraren abiadura angeluarra

Adierazpen matriziala

Robotaren muturreko abiadurak

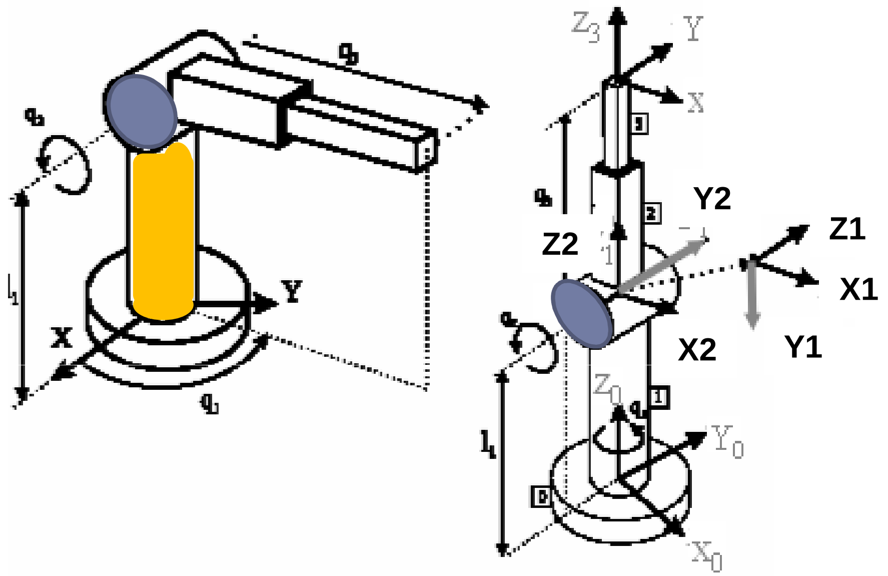
Artikulazioen abiadurak

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v(q) \\ J_\omega(q) \end{bmatrix} \cdot \dot{q}$$

3. Mugimenduzko zinematika: Jacobtar matrizea

Adibidea: **Robot esferikoa 3 AG**



D-H taula

	θi	di	ai	αi
1	**q1**	**L_1**	**0**	**-90º**
2	**q2**	**0**	**0**	**90º**
3	**0**	**q3**	**0**	**0º**

TMH:

$$ {}^{0}_{1}A = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & -Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & Cq1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{1}_{2}A = \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & Sq2 & 0 \\ Sq2 & 0 & -Cq2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{2}_{3}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{q}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

3. Mugimenduzko zinematika: Jacobtar matrizea

Adibidea: **Robot esferikoa 3AG**

$$
{}^{0}_{3}A = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & -Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & Cq1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & Sq2 & 0 \\ Sq2 & 0 & -Cq2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
{}^{0}_{3}A = \begin{bmatrix} Cq1Cq2 & -Sq1 & Cq1Sq2 & \boxed{q3Cq1Sq2} \\ Sq1Cq2 & Cq1 & Sq1Sq2 & \boxed{q3Sq1Sq2} \\ Sq2 & 0 & Cq2 & \boxed{q3Cq2+L1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{matrix} \rightarrow \boldsymbol{x = f_x(q_1, q_2, \ldots, q_n)} \\ \rightarrow \boldsymbol{y = f_y(q_1, q_2, \ldots, q_n)} \\ \rightarrow \boldsymbol{z = f_z(q_1, q_2, \ldots, q_n)} \\ \end{matrix}
$$

$$x = q3Cq1Sq2$$

$$y = q3Sq1Sq2$$

$$z = q3Cq2 + L1$$

Ondoren Jacobtarra kalkulatzen da, muturraren posizoen ekuazioetatik abiatuz

3. Mugimenduzko zinematika: Jacobtar matrizea

Adibidea: **Robot esferikoa 3AG**

$$x = q3Cq1Sq2$$
$$y = q3Sq1Sq2$$
$$z = q3Cq2 + L1$$

Jacobtarra $\Longrightarrow$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q3Sq1Sq2 & q3Cq1Cq2 & Cq1Sq2 \\ q3Cq1Sq2 & q3Sq1Cq2 & Sq1Sq2 \\ 0 & -q3Sq2 & Cq2 \end{bmatrix}$$

Momentu baten robotaren muturrak daukan abiadura, Jacobtar matrizetik lortzen da, artikulazioen posizioa eta abiadura momentu horrentzako jakinda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q3Sq1Sq2 & q3Cq1Cq2 & Cq1Sq2 \\ q3Cq1Sq2 & q3Sq1Cq2 & Sq1Sq2 \\ 0 & -q3Sq2 & Cq2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

3. Mugimenduzko zinematika: Jacobtar matrizea

Adibidea: **Robot esferikoa 3AG**

Demagun robotaren posizioa artikulazioen bidez definituta dagoela: q1=0, q2=90,q3=1m. Robotaren dimentsioa L1=1 m da eta pairatzen dituen abiadurak ondokoak direla: q1'=90º/s, q2'=0º/s y q3'=0.5 m/s. Jacobtarra erabilita kalkulatu robotaren muturreko abiadura lineala.

$$J=\begin{bmatrix} q3Sq1Sq2 & -q3Cq1Cq2 & -cq1Sq2 \\ -q3Cq1Sq2 & -q3Sq1Cq2 & -sq1Sq2 \\ 0 & -q3Sq2 & Cq2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Robotaren muturreko abiadura lineala:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.5 \\ \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix} m/s$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez