4. GAIA BALIABIDE MATEMATIKOAK

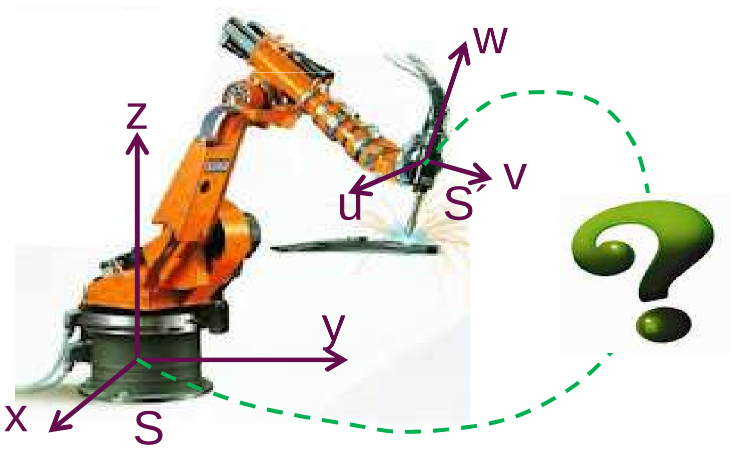
ROBOTIKA

Aurkibidea

- Sarrera
- Kokapen espaziala
- Posizioaren adierazpena
- Orientazioaren adierazpena
- Adierazpen osoa (posizioa eta orientazioa)

Sarrera

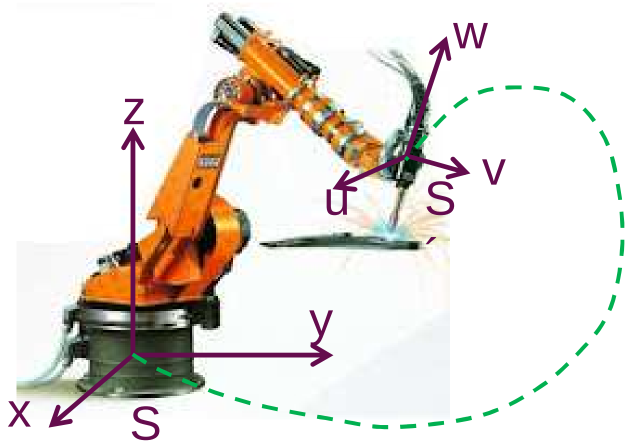
- Robotak pieza maneiatzean bere muturreko osagaiaren mugimendu espaziala zehazten du.
- Robotak pieza maneiatzeko, beharrezkoa du piezaren **KOKAPENA** ezagutzea, hau da, bere **posizioa eta orientazioa robotaren oinarriarekiko**.



- Ondorioz robotaren amaierako elementuaren posizioa eta orientazioa adierazteko **baliabide matematikoak erabiltzea** beharrezkoa da.

Sarrera

- **Erreferentzi** koordenatu-sistema **{S}** (**finkoa**) robotaren oinarrian kokatzen da eta dagozkion **ardatzak XYZ** dira**,** OXYZ sistema osatuz.
- Koordenatu-sistema **mugikorra {S'}** robotaren eskumuturrean kokatzen da eta dagozkion **ardatzak UVW,** O'UVW sistema osatuz .
- ${}^{S}_{S'}T$ Matrizeak, matematikoki **S** sistema **S'** sistemarekin erlazionatzen du.



Kokapen espaziala

- Adierazpena:

Posizioa

- Koordenatu kartesiar
- Koordenatu zilindrikoak
- Koordenatu esferikoak

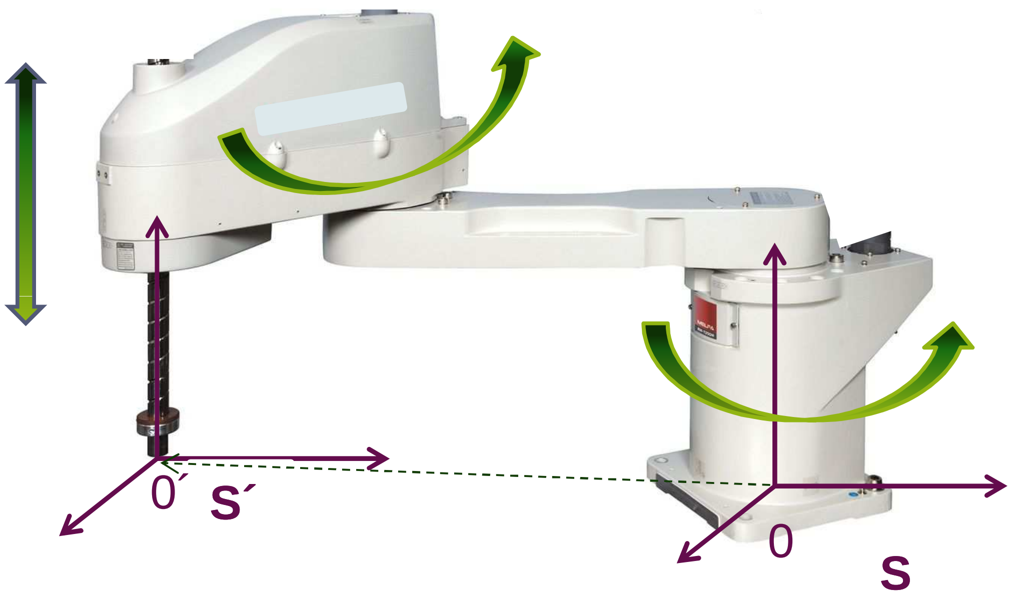
Orientazioa

- Errotazio matrizeak
- Euler-en angeluak
- Errotazio-pare
- Kuatiernioak

Osoa (posizioa+orientazioa)

- Koordenatu homogeneoak
- TRANSFORMAZIO-MATRIZE HOMOGENEOAK

Posizioaren adierazpena



- Robot batzuk soilik bere muturra posizionatu behar dute

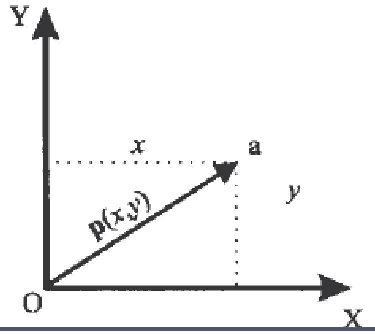
Jon Legarreta / Raquel Martinez

Posizioaren adierazpena

- Puntu bat planoan edo espazioan posizionatu daiteke

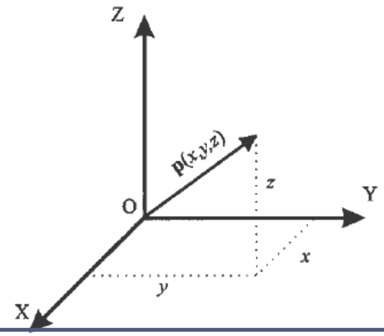
Posizioa PLANOAN

2 **AG-**ko posizionamendua 2 osagai independenteen bidez. **Koordenatu-bektoreak: OX eta OY, OXY erreferentzi koordenatu-sisteman**



Posizioa ESPAZIOAN

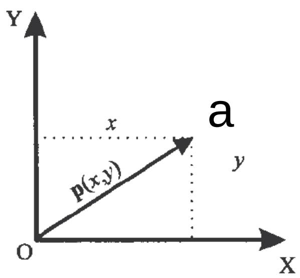
3 **AG-**ko posizionamendua 3 osagai independenteen bidez. **Koordenatu-bektoreak: OX,OY eta OZ OXYZ erreferentzi koordenatu-sisteman.**



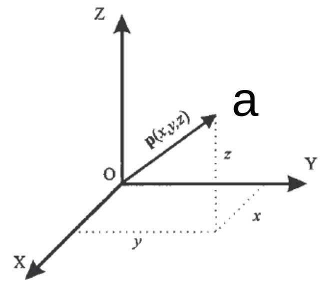
- Puntu bat posizionatzeko koordenatu desberdinak daude: kartesiarrak, polarrak, zilindrikoak eta esferikoak

Posizioaren adierazpena

- **Koordenatu KARTESIARREN** bidezko posizionamendua



• "**a**" puntua PLANO baten posizionatu.
• **p**(x,y) posizio-bektorea
• **(x,y) koordenatu kartesiarrak** non x eta y p bektorearen proiekzioak diren OX eta OY ardatzetan.



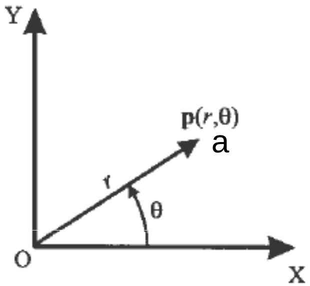
• "**a**" puntua ESPAZIOAN baten posizionatu.
• **p**(x,y,z) posizio-bektorea
• **(x,y,z) koordenatu kartesiarrak** non x, y eta z p bektorearen proiekzioak diren OX, OY eta OZ ardatzetan.

Jon Legarreta / Raquel Martinez

Posizioaren adierazpena

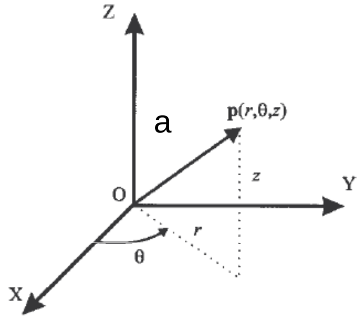
- **Koordenatu POLAR eta ZILINDRIKOEN** bidezko posizionamendua

Koordenatu POLAR



• **a**" puntua PLANO baten posizionatu.
•**p**(r, θ) posizio-bektorea
• **(r, θ) Koordenatu polarrak** non r, O jatorritik "a"-raino dagoen distantzia den eta θ OX-ekiko p-k daukan angelua.

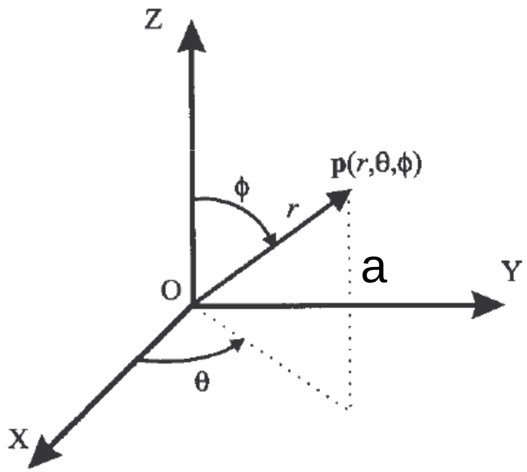
Koordenatu ZILINDRIKOAK



• "**a**" puntua ESPAZIOAN posizionatu.
•**p**(r, θ , z) posizio-bektorea
• **(r, θ, z) koordenatu zilindrikoak** non r, O jatorritik "a"-raino dagoen distantzia den, θ OXY-ekiko p-k daukan angelua eta z p-ren proiekzioa OZ-rekiko.

Posizioaren adierazpena

- **Koordenatu ESFERIKOEN** bidezko posizionamendua



• “**a**” puntua ESPAZIOAN posizionatu

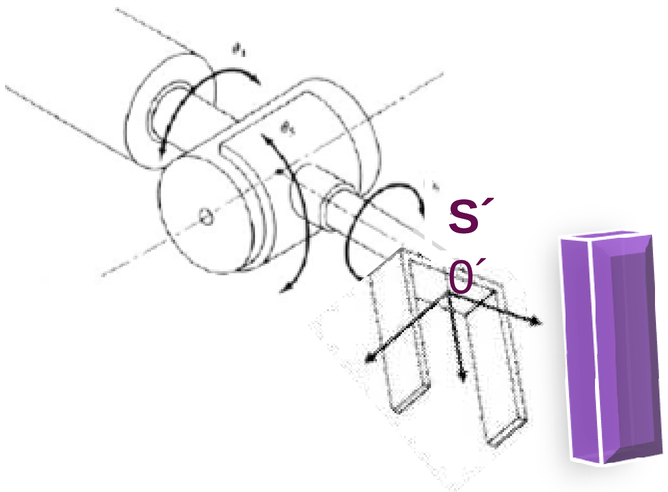
•**p**(**r**, θ, ϕ) bektore-posizioa

• **(r,** θ, ϕ**) koordenatu esferikoaks** non r O jatorritik “a”-raino edo p bektorearen muturreraino dagoen distantzia den, θ OX ekiko r-k daukan angelua eta ϕ OZ-ekiko p-k daukan angelua.

Jon Legarreta / Raquel Martinez

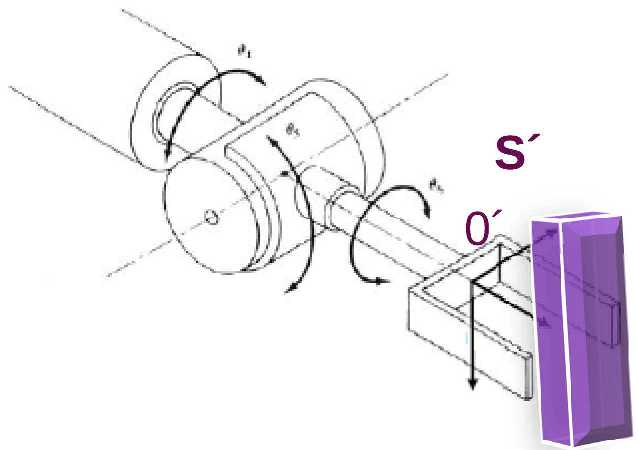
Orientazioaren adierazpena

Muturra posizionaturik soilik



Pieza bat maneiatzeko, robotaren muturraren posizioa adierazteaz gain zerbait gehiago behar da …

Muturra posizionaturik eta orientaturik



…. beharrezkoa da bere orientazioa adieraztea.

Orientazioaren adierazpena

- "0" puntu bat bere posizioagatik definiturik geratzen da espazioan.
  - Robotaren muturra puntu bat izango balitz (ez baleuka amaierako elementurik), posizionamenduarekin nahikoa izango litzateke.
- Solido batentzako beharrezkoa dugu bere orientazioa definitzea.
  - Robotaren muturra (amaierako elementua) lanabes bat da, beraz orientatu behar da.
- (S´) robotaren lanabesari lotutako erreferentzia-sistemak ondokoa bete behar du:
  - 0´ bere jatorria posizionatu.
  - Ondoren bere ardatzak orientatu.
- Orientazioa aztertzeko ondokoa suposatuko dugu:
  - **Robotaren oinarriko (S) zein muturreko (S´) erreferentzia-sistemak 0 jatorri berdinerako (⇔ posizioa).**

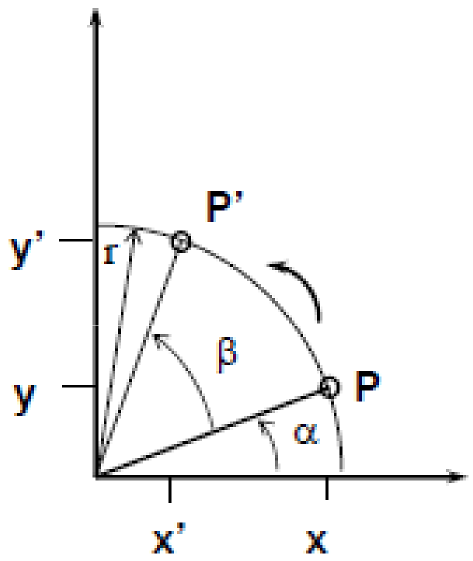
Jon Legarreta / Raquel Martinez

Orientazioaren adierazpena

2D ERROTAZIO-MATRIZEA

Ondokoa betetzen da:

$$x = r\cos\alpha$$
$$y = rsen\alpha$$
$$x' = r\cos(\alpha+\beta) = r(\cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta)$$
$$= x\cos\beta - ysen\beta$$
$$y' = rsen(\alpha+\beta) = r(\cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta)$$
$$= xsen\beta - y\cos\beta$$



Matrize adierazpena:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$p_{x'y'} = R\, p_{xy}$$

Hau da,

R errotazio-matrizea izanik, espazioan errotazio bat adierazten du.

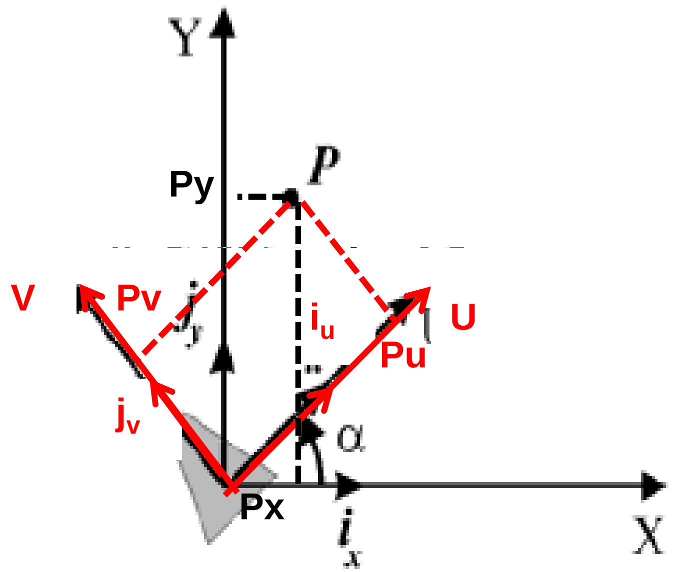
Orientazioaren adierazpena

- **2D ERROTAZIO-MATRIZEA**
  - OUV sistema mugikorra , aurreko sistemarekiko α gradu biratuta badago (jatorri berdinekin).
  - P, XY sistemarekiko

$$^{XY}P = (P_x, P_y)$$

  - P , UV sistemarekiko

$$^{UV}P = (P_U, P_V)$$

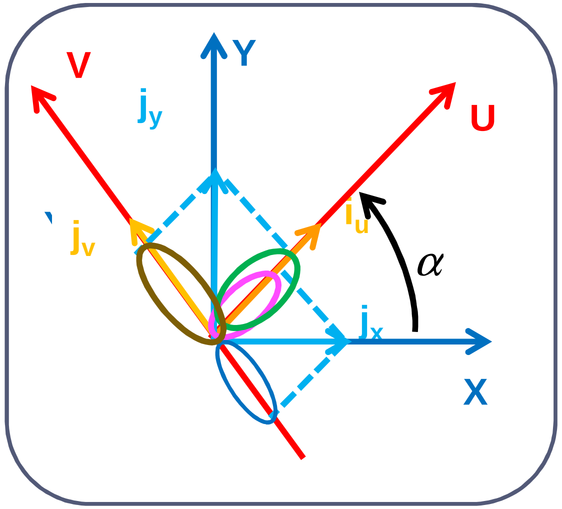


$$P_{XY} = \begin{bmatrix} p_X \\ p_Y \end{bmatrix} = p_X i_X + p_X j_Y$$

$$P_{UV} = \begin{bmatrix} p_U \\ p_V \end{bmatrix} = p_U i_U + p_V j_V$$

Orientazioaren adierazpena

- **2D ERROTAZIO-MATRIZEA**
  - **P puntuaren koordenatuak {UV} sisteman ezagutzen badira eta aurkitu nahi badira P-ren koordenatuak {XY} sisteman:**



$$\begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \end{bmatrix} = {}^{XY}_{UV}R \cdot \begin{bmatrix} P_U \\ P_U \end{bmatrix}$$

$$\boxed{{}^{XY}P = {}^{XY}_{UV}R \cdot {}^{UV}P}$$

  - **{XY} sistema α gradu biratzen da {UV} sistemarekin bat etorri arte, {XY} sistema finkoa bezala.**
  - **Hau da,{XY} sistema {UV} sisteman proiektatzen da, {XY}-ren bektore unitarioak proiketatuz {UV} sistemaren bektore unitarioetan .**

Orientazioaren adierazpena

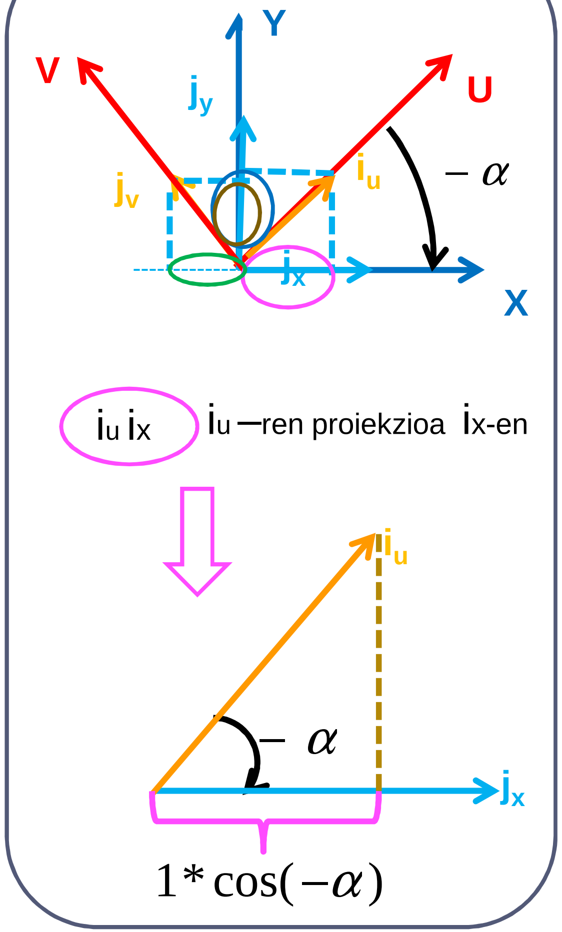
- **<u>2D ERROTAZIO-MATRIZEA</u>**
  - **P puntuaren koordenatuak {XY} sisteman ezagutzen badira eta aurkitu nahi badira P-ren koordenatuak {UV} sisteman:**

$$\boxed{{}^{UV}P = {}^{UV}_{XY}R \cdot {}^{XY}P}$$

  - **{UV} sistema α gradu biratzen da {XY} sistemarekin bat etorri arte, {UV} sistema finkoa bezala.**

  - **Hau da,{UV} sistema {XY} sisteman proiektatzen da,**

$${}^{UV}_{XY}R = \begin{bmatrix} i_U \\ j_V \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} i_X & j_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_U\, i_X & i_U\, j_Y \\ j_V\, i_X & j_V\, j_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$$



Orientazioaren adierazpena

- **2D ERROTAZIO-MATRIZEA**
  - **Alderantzizko matrizeak:**

$$ {}^{XY}_{UV}R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} $$

$$ \boxed{{}^{UV}_{XY}R = ({}^{XY}_{UV}R)^{-1}} $$

$$ {}^{UV}_{XY}R = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} $$

Orientazioaren adierazpena

- **Errotazio-matrizeen esanahia geometrikoa**

Ix-en koordenatua OUV sisteman

ix OU-n

ix OV-n

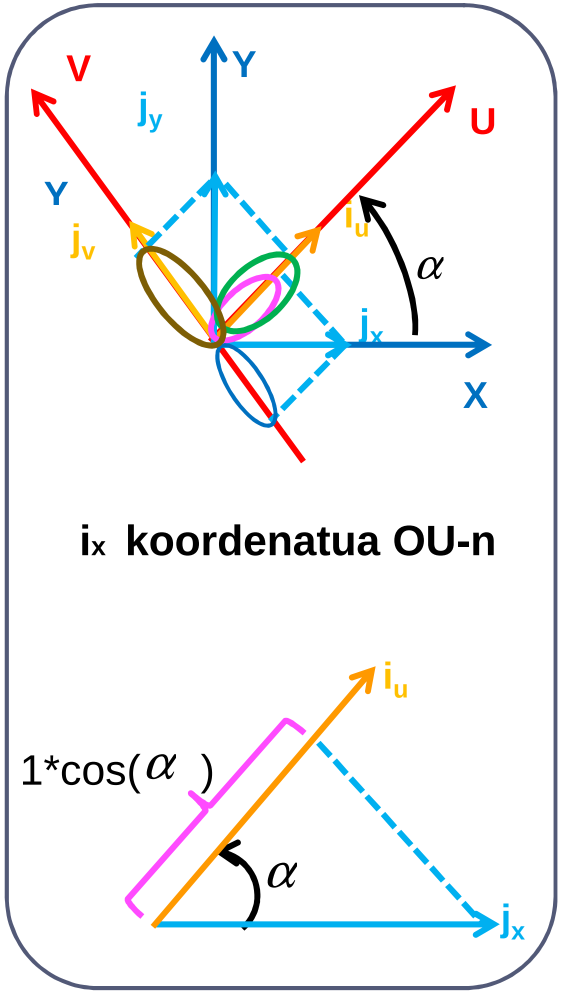
$$
{}^{XY}_{UV}R = \begin{bmatrix} i_X \\ j_Y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} i_U & j_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_X\, i_U & i_X\, j_V \\ j_Y\, i_U & j_Y\, j_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}
$$

jy OU-n

Jy OV-n

jy koordenatua OUV

- R errotazio matrizearen lerroak OXY sistemaren bektore unitarioak dira, OUV sistemarekiko adierazita.



Orientazioaren adierazpena

- **Errotazio-matrizeen esanahai geometrikoa**

$$
{}^{UV}_{XY}R = ({}^{XY}_{UV}R)^{-1}
$$

iu Koordenatuak OXY-n

jy koordenatuak OUV-n

iu OX-n

jv OX-n

$$
{}^{XY}_{UV}R = \begin{bmatrix} i_X\, i_U & i_X\, j_V \\ j_Y\, i_U & j_Y\, j_V \end{bmatrix}
$$

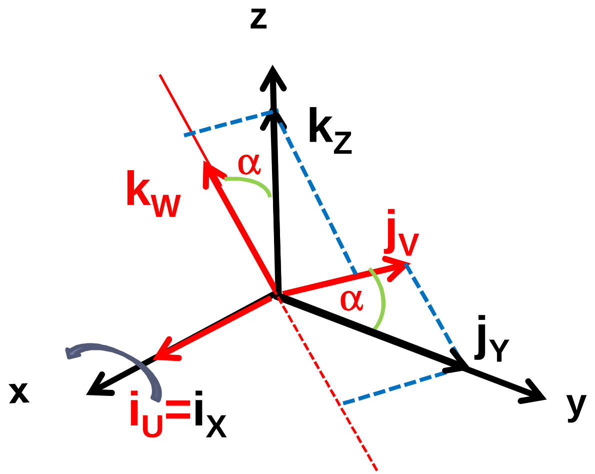
iu OY-n

jy OY-n

R errotazio matrizearen zutabeak OUV sistemaren bektore unitarioak dira, OXY sistemarekiko adierazita.

Orientazioaren adierazpena

- **3D ERROTAZIO-MATRIZEA**
  - **OUVW sistema mugikorra, aurreko sistemarekiko α gradu biratuta badago (jatorri berdinekin).**
  - OX ardatzarekiko α angelu baten biraketa



  - Errotazio-matrizea ondokoa izango litzateke:

$$P_{XY} = [p_X, p_y, p_z]^T = p_X i_X + p_y j_Y + p_z k_z$$

$$P_{UV} = [p_U, p_V, p_W]^T = p_U i_U + p_V j_V + p_W k_W$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Px} \\ \mathrm{Py} \\ \mathrm{Pz} \end{bmatrix} = R(x,\alpha) \begin{bmatrix} Pu \\ Pv \\ Pw \end{bmatrix}$$

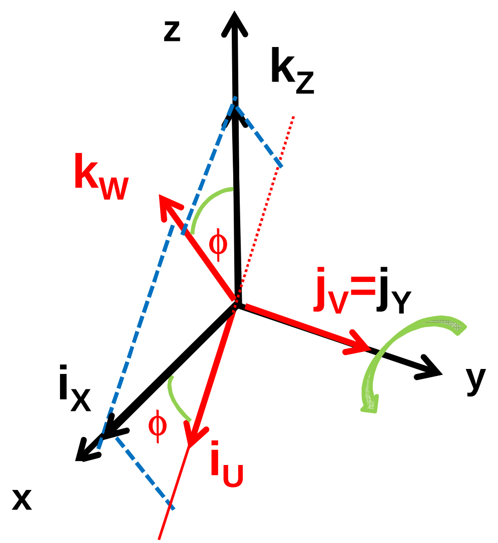
$$R(x,\alpha) = \begin{bmatrix} i_X \\ j_Y \\ k_Z \end{bmatrix} \otimes [i_U \quad j_V \quad k_W] = \begin{bmatrix} i_X i_U & i_X j_V & i_X k_W \\ j_Y i_U & j_Y j_V & j_Y k_W \\ k_Z i_U & k_Z j_V & k_Z k_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Orientazioaren adierazpena

- **3D ERROTAZIO-MATRIZEA**

OY ardatzarekiko ϕ angelu baten biraketa, **kalkulatu R(y, ϕ)**

$$\begin{bmatrix} Px \\ Py \\ Pz \end{bmatrix} = R(y,\phi) \begin{bmatrix} Pu \\ Pv \\ Pw \end{bmatrix}$$



$$R(y,\phi) = \begin{bmatrix} i_X \\ j_Y \\ k_Z \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} i_U & j_V & k_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_X i_U & i_X j_V & i_X k_W \\ j_Y i_U & j_Y j_V & j_Y k_W \\ k_Z i_U & k_Z j_V & k_Z k_W \end{bmatrix} \Rightarrow$$

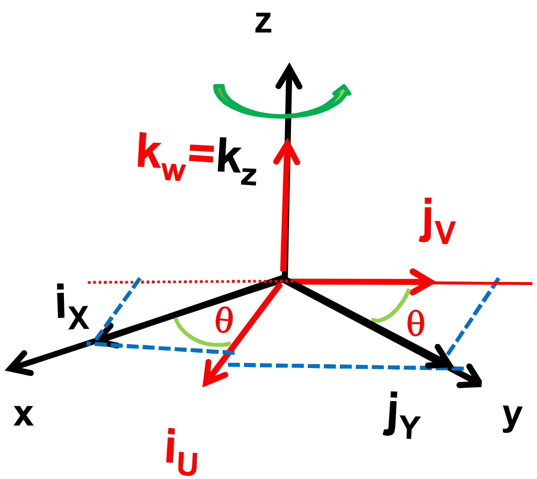
$$R(y,\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Orientazioaren adierazpena

- **3D ERROTAZIO-MATRIZEA**

OZ ardatzarekiko θ angelu baten biraketa, **kalkulatu R(z, θ)**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Px} \\ \mathbf{Py} \\ \mathbf{Pz} \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{Pu} \\ \boldsymbol{Pv} \\ \boldsymbol{Pw} \end{bmatrix}$$

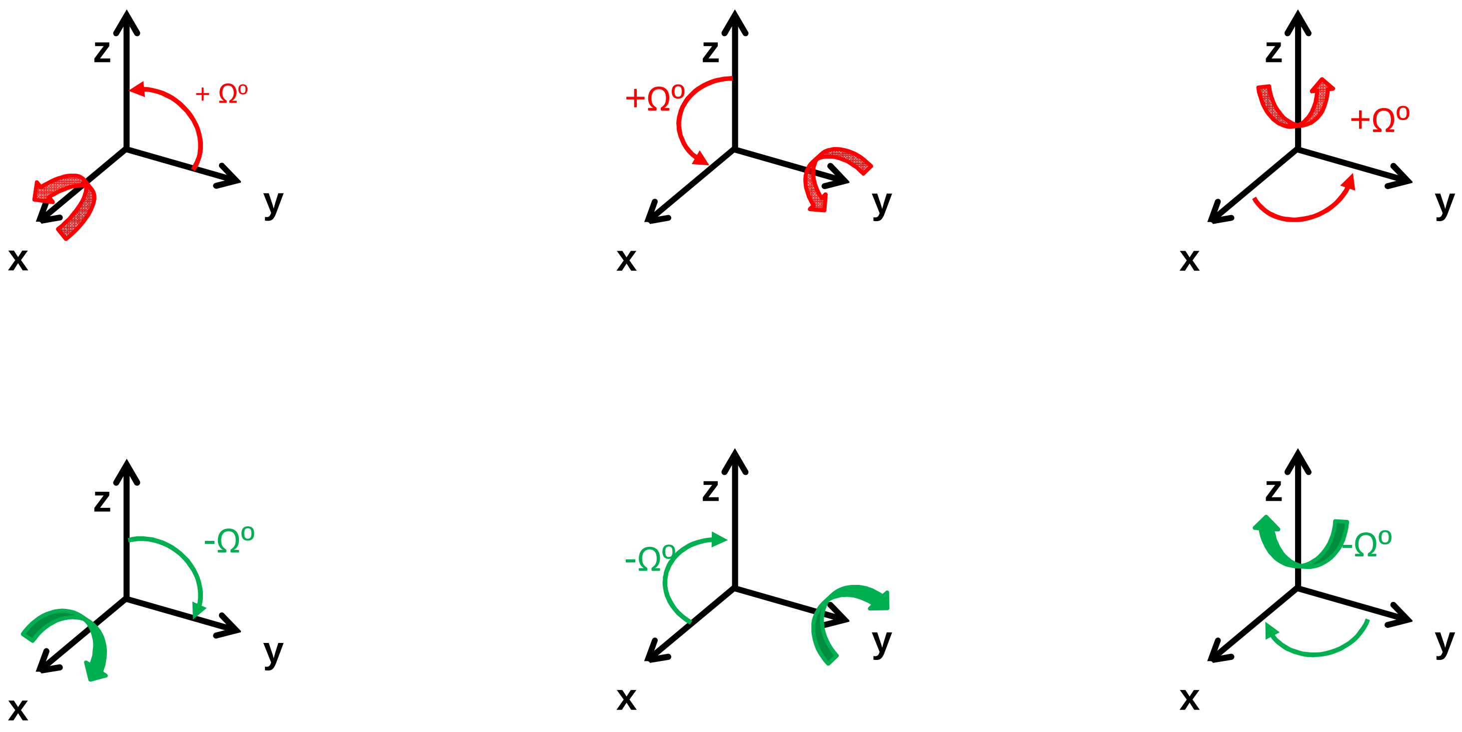


$$R(z,\theta) = \begin{bmatrix} i_X \\ j_Y \\ k_Z \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} i_U & j_V & k_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_X\, i_U & i_X\, j_V & i_X\, k_W \\ j_Y\, i_U & j_Y\, j_V & j_Y\, k_W \\ k_Z\, i_U & k_Z\, j_V & k_Z\, k_W \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$R(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Orientazioaren adierazpena

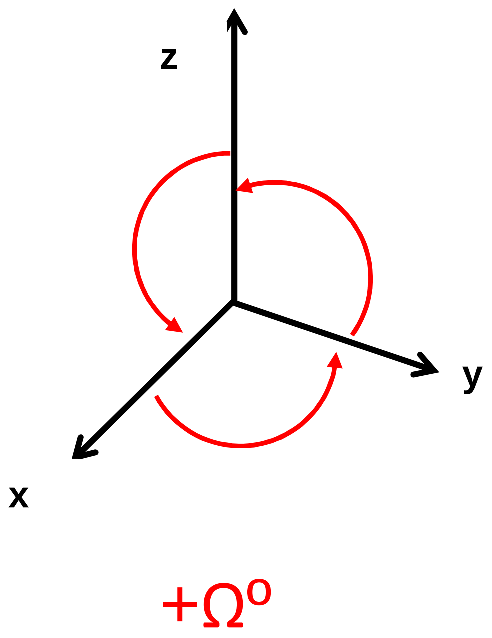
- **<u>Biraketen zeinua:</u>**

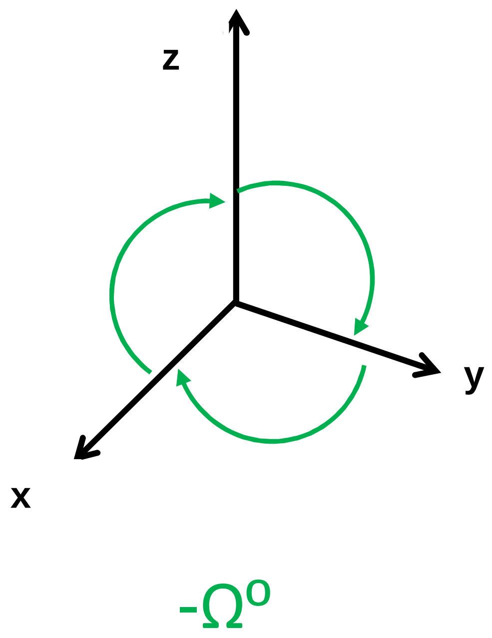


Jon Legarreta / Raquel Martinez

Orientazioaren adierazpena

- **<u>Biraketen zeinua:</u>**





Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-MATRIZEEN KONPOSAKETA**
  - OXYZ koordenatu-sistemarekiko errotazio-sekuentzia zehatz bat adierazteko, errotazio-matrize oinarrizkoak biderkatzen dira.
  - Baina, ondokoa kontuan izan behar da:
    - Matrizeen biderketa ez da trukakorra
    - Eta ondorioz, errotazioen ordena garrantzitsua da.
  - Baita ere, oinarrizko errotazioak aplikatu daitezke errotazio baten osteko koordenatu-sistema berrien ardatz nagusiekiko.

Orientazioaren adierazpena

ERROTAZIO-MATRIZEEN KONPOSAKETA

Errotazioak ordenenean egiteko araua:

- Hasieran bi sistemen koordenatu-sistemak bat datoz ➔ Hasierako **errotazio-matrizea =I**.
- Sistema **mugikorra** sistema finkoaren ardatz nagusi batekiko biraketa egiten badu, hasierako errotazio-matrizea aurre-biderkatu dagokion errotazio-matrizearekin.
- Sistema **mugikorra** bere ardatz nagusi batekiko biraketa egiten badu, hasierako errotazio-matrizea post-biderkatu dagokion errotazio-matrizearekin.
- Sinbolikoki:

$$p_{xyz} = \leftarrow \boxed{R_{XYZ}} \cdot \boxed{I} \cdot \boxed{R_{UVW}} \rightarrow \cdot p_{uvw}$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

Orientazioaren adierazpena

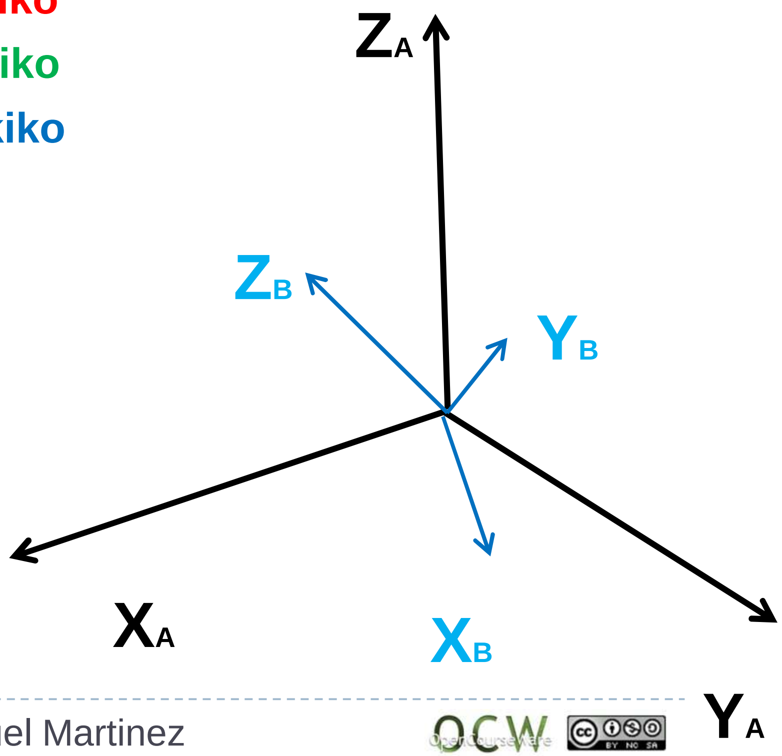
ERROTAZIO-MATRIZEEN KONPOSAKETA

1 ARIKETA

{A} sistema finko baten errotazio-matrizea lortu, jakinik 3 biraketa egiten dituela {D} sisteman bihurtuz :

1. **θ angelu baten biraketa OZ ardatzarekiko**
2. **ϕ angelu baten biraketa OY ardatzarekiko**
3. **α angelu baten biraketa OX ardatzarekiko**

$$ {}^{A}_{B}R = ? $$



Jon Legarreta / Raquel Martinez

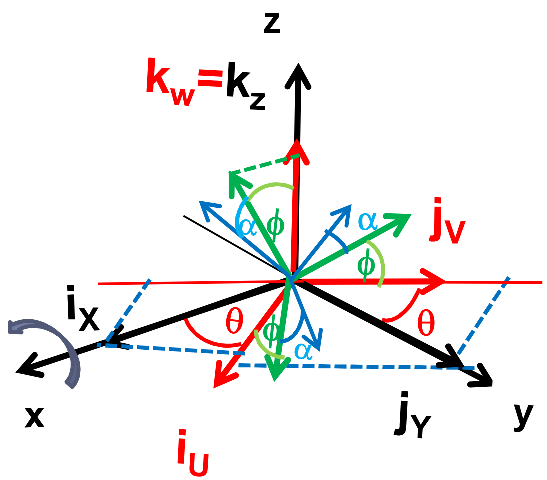
Orientazioaren adierazpena

ERROTAZIO-MATRIZEEN KONPOSAKETA

1 ARIKETA

{A} sistema finko baten errotazio-matrizea lortu, jakinik 3 biraketa egiten dituela {D} sisteman bihurtuz :

1. **θ angelu baten biraketa OZ ardatzarekiko**
2. **ϕ angelu baten biraketa OY ardatzarekiko**
3. **α angelu baten biraketa OX ardatzarekiko**



$$[1] = R_1 = \mathrm{Rot}(z,\ \theta) * I = \mathrm{Rot}(z,\ \theta)$$

$$[2] = R_2 = \mathrm{Rot}(y,\ \phi) * R_1 = \mathrm{Rot}(y,\ \phi) * \mathrm{Rot}(z,\ \theta)$$

$$^{A}_{B}R = [3] = \mathrm{Rot}(x,\ \alpha) * R_2 = \mathrm{Rot}(x,\ \alpha) * \mathrm{Rot}(y,\ \phi) * \mathrm{Rot}(z,\ \theta)$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-MATRIZEEN KONPOSAKETA**

1 ARIKETA

{A} sistema finko baten errotazio-matrizea lortu, jakinik 3 biraketa egiten dituela {D} sisteman bihurtuz :

1. **θ angelu baten biraketa OZ ardatzarekiko**
2. **ϕ angelu baten biraketa OY ardatzarekiko**
3. **α angelu baten biraketa OX ardatzarekiko**

$$
{}^{A}_{B}R = \mathrm{Rot}(x,\alpha) * \mathrm{Rot}(y,\phi) * \mathrm{Rot}(z,\theta) = \overset{\boxed{3}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}} \overset{\boxed{2}}{\begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix}} \overset{\boxed{1}}{\begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}
$$

$$
{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -C\phi S\theta & S\phi \\ S\alpha S\phi C\theta + C\alpha S\theta & -S\alpha S\phi S\theta - C\alpha C\theta & -S\alpha C\phi \\ -C\alpha S\phi C\theta + S\alpha S\theta & C\alpha S\phi S\theta + S\alpha C\theta & C\alpha C\phi \end{bmatrix}
$$

Orientazioaren adierazpena

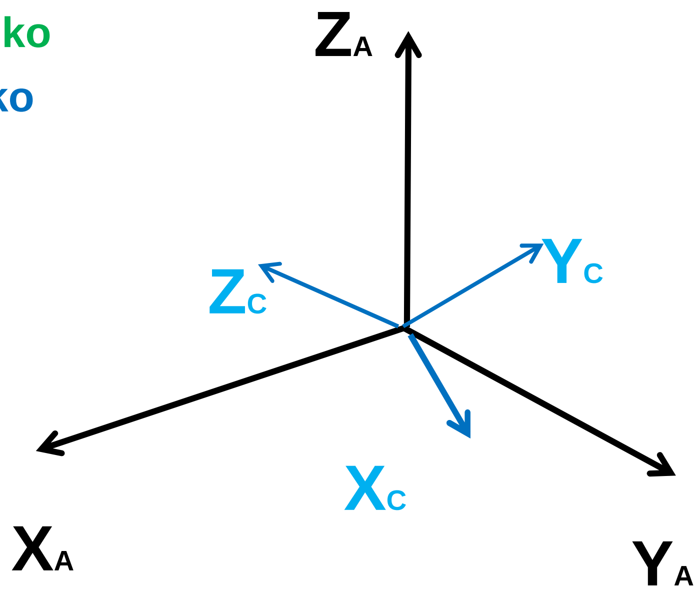
- **ERROTAZIO-MATRIZEEN KONPOSAKETA**

  2. ARIKETA

  {A} sistema finko baten errotazio-matrizea lortu, jakinik 3 biraketa egiten dituela {C} sisteman bihurtuz :

  1. **θ angelu baten biraketa O'W ardatzarekiko**
  2. **ϕ angelu baten biraketa O'V' ardatzarekiko**
  3. **α angelu baten biraketa OX ardatzarekiko**

$$^{A}_{C}R = ?$$



Jon Legarreta / Raquel Martinez

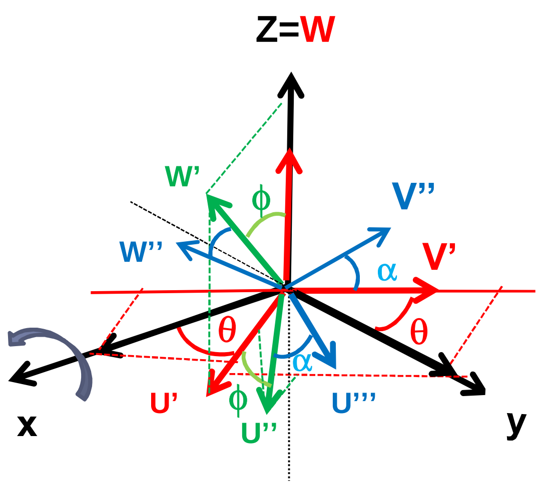
Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-MATRIZEEN KONPOSAKETA**

2. ARIKETA

{A} sistema finko baten errotazio-matrizea lortu, jakinik 3 biraketa egiten dituela {C} sisteman bihurtuz :

1. **θ angelu baten biraketa O'W ardatzarekiko**
2. **ϕ angelu baten biraketa O'V' ardatzarekiko**
3. **α angelu baten biraketa OX ardatzarekiko**



$$[1] = R_1 = I * \mathrm{Rot}(w,\ \theta) = \mathrm{Rot}(w,\ \theta)$$

$$[2] = R_2 = R_1 * \mathrm{Rot}(v,\ \phi) = \mathrm{Rot}(w,\ \theta) * \mathrm{Rot}(v,\ \phi)$$

$$^{A}_{C}R = [3] = \mathrm{Rot}(x,\ \alpha) * R_2 = \mathrm{Rot}(x,\ \alpha) * \mathrm{Rot}(w,\ \theta) * \mathrm{Rot}(v,\ \phi)$$

Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-MATRIZEEN KONPOSAKETA**

2. ARIKETA

{A} sistema finko baten errotazio-matrizea lortu, jakinik 3 biraketa egiten dituela {C} sisteman bihurtuz :

1. **θ angelu baten biraketa O'W ardatzarekiko**
2. **ϕ angelu baten biraketa O'V' ardatzarekiko**
3. **α angelu baten biraketa OX ardatzarekiko**

$$
{}^{A}_{C}R = \mathrm{Rot}(x,\alpha)\mathrm{Rot}(w,\theta)\mathrm{Rot}(v,\phi) = \overset{\boxed{3}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}} \overset{\boxed{1}}{\begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\boxed{2}}{\begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix}}
$$

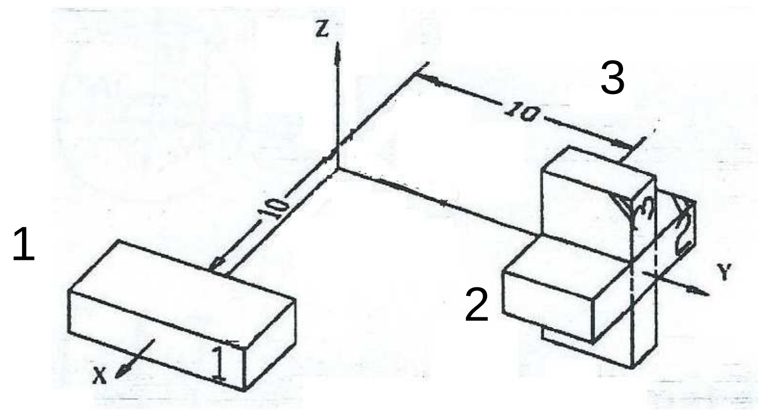
$$
{}^{A}_{C}R = \begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\theta & C\theta S\phi \\ S\alpha S\theta C\phi + S\alpha S\phi & C\alpha C\theta & C\alpha S\theta C\phi - S\alpha C\phi \\ S\alpha S\theta C\phi - C\alpha S\phi & S\alpha C\theta & S\alpha S\theta C\phi - C\alpha C\phi \end{bmatrix}
$$

Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-MATRIZEEN KONPOSAKETA**

  3. ARIKETA

  Irudiko kutxa 1 posiziotik 2 posiziora mugitzen da eta azkenik 3 posiziora. Pieza 1 posiziotik 3. posiziora kokatzen duen errotazio-matrizea kalkulatu.



Jon Legarreta / Raquel Martinez

Orientazioaren adierazpena

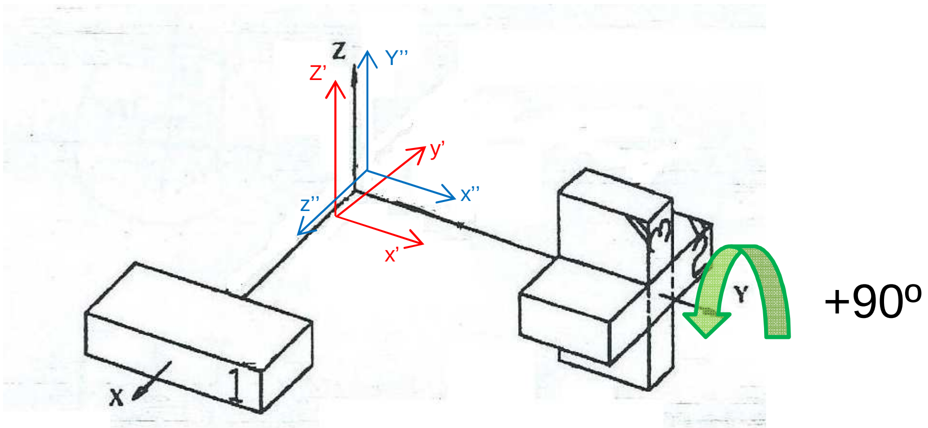
- **<u>ERROTAZIO-MATRIZEEN KONPOSAKETA</u>**

  <u>3. ARIKETA</u>

  Irudiko kutxa 1 posiziotik 2 posiziora mugitzen da eta azkenik 3 posiziora. Pieza 1 posiziotik 3. posiziora kokatzen duen errotazio-matrizea kalkulatu.

1 **90º-ko errotazioa OZ ardatzarekiko , pieza 2 posizioan kokatzen da.**

2 **90º-ko errotazioa OY ardatzarekiko (edo 90º-ko errotazioa OX' ardatzarekiko), pieza 3 posizioan kokatuz.** 2



Jon Legarreta / Raquel Martinez

Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-MATRIZEEN KONPOSAKETA**

3. ARIKETA

Irudiko kutxa 1 posiziotik 2 posiziora mugitzen da eta azkenik 3 posiziora. Pieza 1 posiziotik 3. posiziora kokatzen duen errotazio-matrizea kalkulatu.

1 **90º-ko errotazioa OZ ardatzarekiko**

2 **90º-ko errotazioa OY ardatzarekiko**

$$T = Rot(y,90)Rot(z,90) = \overset{2}{\begin{bmatrix} C90 & 0 & S90 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S90 & 0 & C90 \end{bmatrix}} \overset{1}{\begin{bmatrix} C90 & -S90 & 0 \\ S90 & C90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{{}^{1}_{3}T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-MATRIZEEN KONPOSAKETA**

3. ARIKETA

Irudiko kutxa 1 posiziotik 2 posiziora mugitzen da eta azkenik 3 posiziora. Pieza 1 posiziotik 3. posiziora kokatzen duen errotazio-matrizea kalkulatu.

1 **90º-ko errotazioa OZ ardatzarekiko**

2 **90º-ko errotazioa O'X' ardatzarekiko**

$$
{}^{1}_{3}T = Rot(z,90)Rot(x',90) = \overset{1}{\begin{bmatrix} C90 & -S90 & 0 \\ S90 & C90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C90 & -S90 \\ 0 & S90 & C90 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boxed{{}^{1}_{3}T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}
$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-MATRIZEEN KONPOSAKETA**

  3. ARIKETA

  Irudiko kutxa 1 posiziotik 2 posiziora mugitzen da eta azkenik 3 posiziora. Pieza 1 posiziotik 3. posiziora kokatzen duen errotazio-matrizea kalkulatu.

1 **{1} sistemako 90º-ko errotazioa OZ ardatzarekiko, {2} sistema eratuz**

2 **{2} sistemako 90º-ko errotazioa O'X' ardatzarekiko, {3} sistema eratuz**

$$ {}^{1}_{2}R = Rot(z,90) * I = Rot(z,90) $$

$$ {}^{2}_{3}R = Rot(x',90) * I = Rot(x',90) $$

$$ {}^{1}_{3}R = {}^{1}_{2}R\,{}^{2}_{3}R = Rot(z,90) * Rot(x',90) $$

Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-MATRIZEEN PROPIETATEAK**
  - **Matrize ortonomalak dira:**
    - Bere bektoreak, zutabean edo errenkadan, ortonormalak dira euren artean:
      - Bektore baten eta beste edozein bektoreen arteko biderkadura eskalarra =0.
      - Bektore baten biderkadura eskalarra bere buruarekin=1.
      - Bektore baten biderkadura bektoriala ondorenagoarekin=hirugarrena da.
    - Bere alderantzizko matrizea bere iraulia da $R^T = R^{-1}$.
    - Bere determinantea unitatea da: $|R| = 1$.
  - **konposaketa matrizeen aljebra erabiliz egiten da(erraztasuna erabiltzeko).**
  - **9 elementu behar dira (erredundantea).**
  - **Numerikoki ez da oso egokia biribiltzeen erruz.**
    - Sinbolikoki erabiltzeko aproposa.
    - Ez dira egokiak kalkulu konputazionalerako

Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-MATRIZEEN PROPIETATEAK**
  - **Frogatu ondoko matrize ortonormalen propietateak:**
    - Bere bektoreak, zutabean edo errenkadan, ortonormalak dira euren artean:
      - Adibidez:

$$\boldsymbol{Rot}(\alpha, \boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{C}\alpha & \text{-}\mathrm{S}\alpha \\ \mathbf{0} & \mathrm{S}\alpha & \mathrm{C}\alpha \end{bmatrix}$$

1) Bektore baten eta beste edozein bektoreen arteko biderkadura eskalarra =0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{C\alpha} \\ -\boldsymbol{S\alpha} \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{S\alpha} \\ \boldsymbol{C\alpha} \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{C\alpha} & -\boldsymbol{S\alpha} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{S\alpha} \\ \boldsymbol{C\alpha} \end{bmatrix} = 0$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-MATRIZEEN PROPIETATEAK**
  - **Frogatu ondoko matrize ortonormalen propietateak:**
    - Bere bektoreak, zutabean edo errenkadan, ortonormalak dira euren artean:
      - Adibidez:

$$\boldsymbol{Rot}(\alpha, \boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}\alpha & \mathbf{-S}\alpha \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}\alpha & \mathbf{C}\alpha \end{bmatrix}$$

2) Bektore baten biderkadura eskalarra bere buruarekin=1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{S}\alpha & \boldsymbol{C}\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{S}\alpha \\ \boldsymbol{C}\alpha \end{bmatrix} = 1 \quad \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{C}\alpha & -\boldsymbol{S}\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{C}\alpha \\ -\boldsymbol{S}\alpha \end{bmatrix} = 1$$

Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-MATRIZEEN PROPIETATEAK**
  - **Frogatu ondoko matrize ortonomalen propietateak:**
    - Bere bektoreak, zutabean edo errenkadan, ortonormalak dira euren artean:
      - Adibidez:

$$\boldsymbol{Rot}(\alpha, x) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}\alpha & \mathbf{-S}\alpha \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}\alpha & \mathbf{C}\alpha \end{bmatrix}$$

      - 2) Bektore baten biderkadura bektoriala ondorenagoarekin=hirugarrena da.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{C}\alpha & -\boldsymbol{S}\alpha \end{vmatrix} = \boldsymbol{C}\alpha\,\hat{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{S}\alpha\,\hat{\boldsymbol{j}} = [0 \quad \boldsymbol{S}\alpha \quad \boldsymbol{C}\alpha]$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-MATRIZEEN PROPIETATEAK**
  - **Frogatu ondoko matrize ortonormalen propietateak:**
    - Bere bektoreak, zutabean edo errenkadan, ortonormalak dira euren artean:
      - Adibidez:

$$\boldsymbol{Rot}(\alpha, \boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}\alpha & \mathbf{-S}\alpha \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}\alpha & \mathbf{C}\alpha \end{bmatrix}$$

      - 2) Bere alderantzizko matrizea bere iraulia da $R^{-1}=R^T$,

        $R*R^T,=I$

$$\boldsymbol{Rot}(\alpha, \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{Rot}(\alpha, \boldsymbol{x})^T \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}\alpha & \mathbf{-S}\alpha \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}\alpha & \mathbf{C}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}\alpha & \mathbf{S}\alpha \\ \mathbf{0} & \mathbf{-S}\alpha & \mathbf{C}\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-MATRIZEEN PROPIETATEAK**
  - **Frogatu ondoko matrize ortonormalen propietateak:**
    - Bere bektoreak, zutabean edo errenkadan, ortonormalak dira euren artean:
      - Adibidez:

$$\boldsymbol{Rot}(\alpha, \boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}\alpha & \mathbf{-S}\alpha \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}\alpha & \mathbf{C}\alpha \end{bmatrix}$$

      - 2) Bere determinantea unitatea da **det(R)=1:**

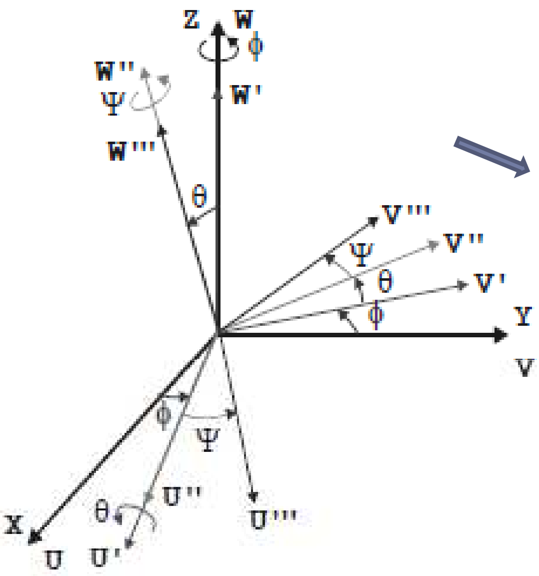
$$\left|\boldsymbol{Rot}(\alpha, \boldsymbol{x})\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{C}\alpha & -\boldsymbol{S}\alpha \\ 0 & \boldsymbol{S}\alpha & \boldsymbol{C}\alpha \end{vmatrix} = \boldsymbol{C}^2\alpha + \boldsymbol{S}^2\alpha = 1$$

Orientazioaren adierazpena

- **EULER-en ANGELUAK**
  - 3 osagai erabiltzen duen orientazio-metodoa.
  - O'UVW sistema gorputz bati lotuta beste OXYZ sistema finko batekiko bere orientazioa adieraz dezake 3 angeluekin.
    - ϕ, θ, ψ EULER-en ANGELUAK
  - OXYZ sistema, bere ardatz ortonormaleekiko bata bestearen segidan ϕ, θ, ψ angeluak biratuz, O'UVW sistema lortzen da.
  - Beharrezkoa ondokoa ezagutzea:
    - Biraketa-angeluak
    - Zein ardatzekiko egiten diren biraketak
    - Biraketaren ordena
  - Bi sistemak bat datozela egoeratik abiatuko da

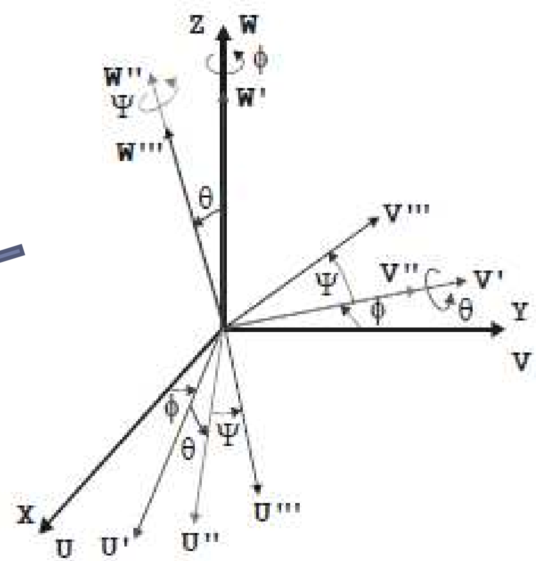
Orientazioaren adierazpena

- **EULER-en ANGELUAK**



Euler-en angeluak ZXZ (Euler I):

1. OUVW biratu OZ-ekiko ϕ angelu bat.
2. OU' V' W' biratu OU'-ekiko θ angelu bat
3. OU'' V'' W'' biratu OW''-ekiko ψ angelu bat



Euler-en angeluak ZYZ (Euler II):

1. OUVW biratu OZ-ekiko ϕ angelu bat.
2. OU' V' W' biratu OV'-ekiko θ angelu bat
3. OU'' V'' W'' biratu OW''-ekiko ψ angelu bat

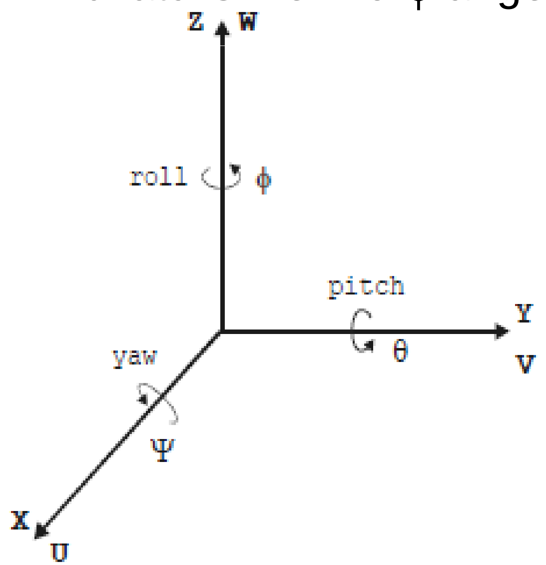
Jon Legarreta / Raquel Martinez

Orientazioaren adierazpena

- **ERROTAZIO-PAREA**

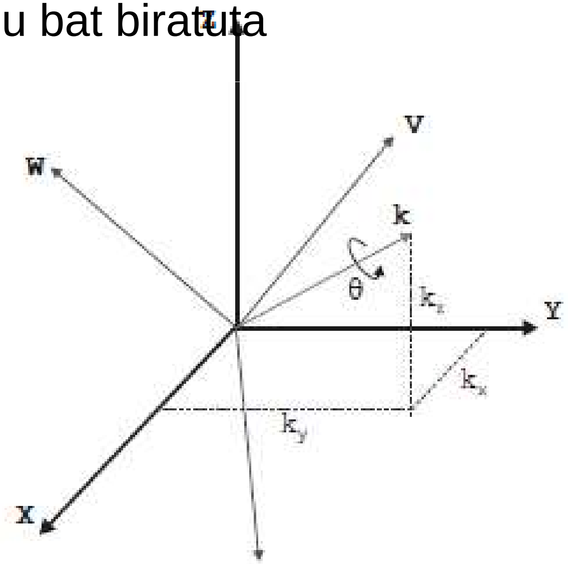
Biraketa,Goratzea, desbiderapen (RPY-Roll, Pitch, Yaw)

1. OUVW biratu OX-ekiko ϕ angelu bat.
2. OUVW biratu OY-ekiko θ angelu bat.
3. OU V W biratu OZ-ekiko ψ angelu bat



Errotazio-parea:

OUVW sistema OXYZ sistemarekin bat dator, biraketa ardatzarekin lotuta dagoen K (kx,ky,kz) bektorearekiko θ angelu bat biratuta



$$\mathbf{Rot}(\mathbf{k},\theta)\,\mathbf{p} = \mathbf{p}\cos\theta - (\mathbf{k}\times\mathbf{p})\,sen\theta + \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})(1-\cos\theta)$$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

Orientazioaren adierazpena

- **LABURPENA**

Errotazio-matrizeak	• Erredundantzia, matrize-aljebra eta erabiltzeko erraza.
Euler-en angeluak	• Informazio gutxi. Ez dago lotuta inolako aljebrarekin. Bektore-adierazpena
Errotazio-parea	• 4 elementu, Kuatiernioen aurreko pausua dela esan daiteke
Kuatiernioak	• 4 elementu, kuatriernio-aljebra eta konputazionalki oso eraginkorra

POSIZIOAREN ETA **ORIENTAZIOAREN** ADIERAZPENA

POSIZIOA
Koordenatu Kartesiarra (XYZ)

+

ORIENTAZIOA
Errotazio-matrizeak

=

KOKAPENA
Transformazio-matrize homogeneoak

ORIENTAZIOA
Euler-en angeluak

=

KOKAPENA
Bektoreak

POSIZIOAREN ETA ORIENTAZIOAREN ADIERAZPENA

- **KOORDENATU HOMOGENEOAK**
  - **Posizioaren eta orientazioaren adierazpen bateratua ahalbidetzen du.**
    - W =1 robotikan
  - **(n+1)- dimentsiodun espazio bat, n-dimentsioko espazio bateko solidoak adierazteko**
  - **p(x,yx,z) $\Longrightarrow$ P(wx,wy,wz,w), w balio zehatz bat izanik, faktore-eskala bat adieraziz**
  - **Koordenatu homogeneoen bektorea:**

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - **Adibideak:**
  - **Bektore nulua:** 2i+3j+4k ➔ $[2,3,4,1]^T = [4,6,8,2]^T = [-6,-9,-12,-3]^T$.
  - **Norabidea:** $[a,b,c,0]^T$. $[0,0,0,n]^T$.

Jon Legarreta / Raquel Martinez

TRANSFORMAZIO-MATRIZE HOMOGENEOA (TMH)

- **Koordenatu-sistema batetik beste batera, koordenatu homogeneoko bektore baten transformatua adierazten duen 4x4-ko matrize bat da:**

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{p}_{3\times1} \\ \mathbf{f}_{1\times3} & \mathbf{w}_{1\times1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Errotazioa} & \text{Translazioa} \\ \text{Perspektiba} & \text{Eskala} \end{bmatrix}$$

- **Robotikan f1x3 azpi-matrizea, perspektiba-transformazio bat adierazten duena, nulua da, eta W1x1 azpimatrizea, eskala-faktorea dena, unitatea da:**

POSIZIOAREN ETA **ORIENTAZIOAREN** ADIERAZPENA

- **TRANSFORMAZIO-MATRIZE HOMOGENEOA (TMH)**
  - **Demagun {S} eta {A} sistemak, ${}^{S}_{A}T$ matrizeak {S} sistemarekiko errotazio eta translazio baten ondorioz lortutako {A} sistemaren orientazioa eta posizioa adierazten du,.**

$$
{}^{S}_{A}T = \left[\begin{array}{ccc|c} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & Px \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} & Py \\ R_{3,1} & R_{3.2} & R_{3,3} & Pz \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

  - **non:**
    - **P (Px,Py,Pz) bektorea, {A} sistemaren jatorriaren koordenatuak ¨S sistemarekiko.**
    - **R, errotazio-matrizea.** ${}^{S}_{A}R$

Jon Legarreta / Raquel Martinez

- **OINARRIZKO MATRIZEAK**
  - **Oinarrizko errotazio-matrizeak: O’UVW sistema angelu baten biratua**

α, OX

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ϕ, OY

$$\begin{bmatrix} C\alpha & 0 & S\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\alpha & 0 & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

θ, OZ

$$\begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - **Translazioko oinarrizko matrizea:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & Px \\ 0 & 1 & 0 & Py \\ 0 & 0 & 1 & Pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ERROTAZIO-MATRIZEEN KONPOSAKETA

Errotazioak ordenenean egiteko araua:

- Hasieran bi sistemen koordenatu-sistemak bat datoz ➔ Hasierako **errotazio-matrizea =I 4X4**.
- O'UVW sistema OXYZ sistema finkoarekiko errotazio-traslazioen ondorioz lortu bada, hasierako errotazio-matrizea aurre-biderkatu beharko da dagokion errotazio-matrize homogeneoarekin.
- O'UVW sistema sistema mugikorrarekiko errotazio-traslazioen ondorioz lortu bada, hasierako errotazio-matrizea post-biderkatu beharko da dagokion errotazio-matrize homogeneoarekin.

$$T = \boxed{T_{xyz} \quad I \quad T_{uvw}}$$

- **<u>4a. ARIKETA :</u>**
- {S'} sistema mugikorra {S} sistema finkoarekin erlazionatzen duen Transformazio matrize homogeneoa kalkulatu, ondoko aldaketak dituenean:
  - 1 Sistema finkoaren X ardatzarekiko 90º-ko biraketa
  - 2 Sistema mugikorraren Z ardatzarekiko 90º-ko biraketa
  - 3 Sistema finkoarekiko (4,5,-3) bektorearen translazioa
  - 4 Sistema mugikorraren Y ardatzarekiko 90º-ko biraketa

$${}^{S}_{S'}T = ? \qquad\qquad {}^{S}_{S'}T = T(p)T(x,90)T(z,90)T(y,90)$$

$$ {}^{S}_{S'}T = T(p)T(x,90)T(z,90)T(y,90) $$

$$ {}^{S}_{S'}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{S}_{S'}T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- **4b. ARIKETA :**

{S'} sistema mugikorra {S} sistema finkoarekin erlazionatzen duen Transformazio matrize homogeneoa kalkulatu, ondoko aldaketak dituenean:

1 Sistema finkoaren X ardatzarekiko 90º-ko biraketa
2 Sistema finkoaren Z ardatzarekiko 90º-ko biraketa
3 Sistema mugikorrarekiko (4,5,-3) bektorearen translazioa
4 Sistema mugikorraren Y ardatzarekiko 90º-ko biraketa

$$ {}^{S}_{S'}T = ? \qquad {}^{S}_{S'}T = T(z,90)T(x,90)T(p)T(y,90) $$

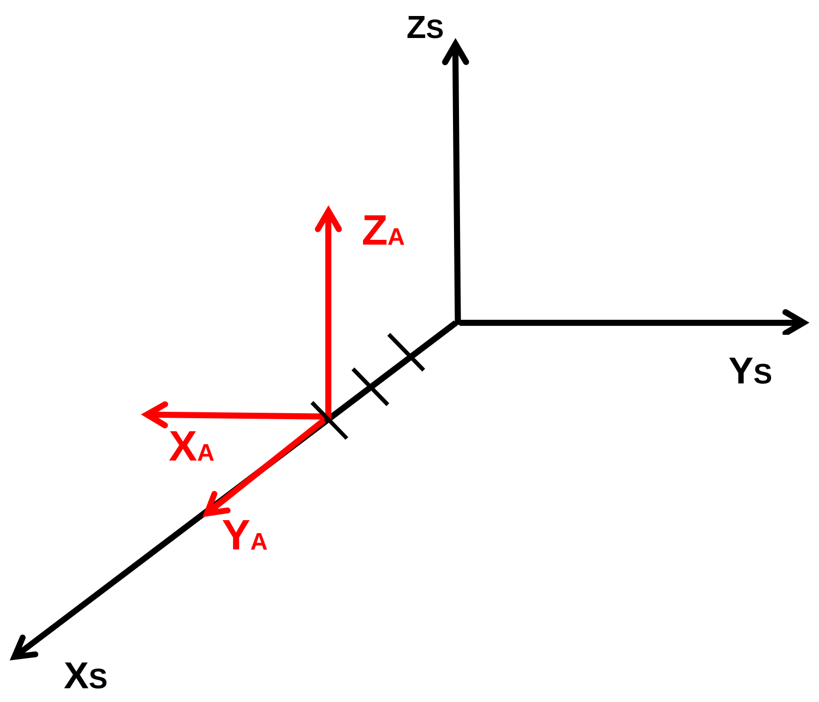
$$ {}^{S}_{S'}T = T(z,90)T(x,90)T(p)T(y,90) $$

$$ {}^{S}_{S'}T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{S}_{S'}T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

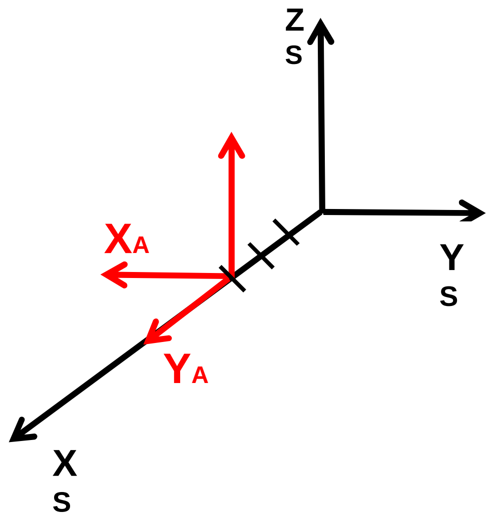
- **5 ARIKETA:**

  {A} sistemaren TMH kalkulatu {S} sistemarekiko . ${}^{S}_{A}T$



- **5 ARIKETA:**

$$ {}^{S}_{A}T = \left[\begin{array}{ccc|c} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & Px \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} & Py \\ R_{3,1} & R_{3.2} & R_{3,3} & Pz \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$



{A} –ren jatorriaren koordenatuak {S}-rekiko

$$ {}^{S}_{A}T = \begin{bmatrix} C(-90) & -S(-90) & 0 & 3 \\ -S(-90) & C(-90) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

{A}-ren errotazioa {S}-rekiko

Z errotazioa -90º

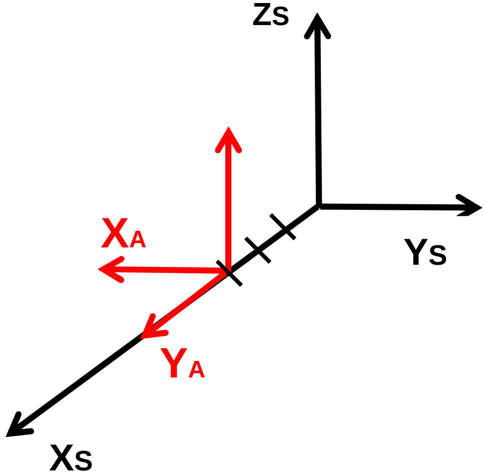
- **5 ARIKETA:**

$^S_A T$

{S} **ix** bektore unitarioaren koordenatuak **{A}-rekiko translaziorik ez suposatuz**

{A} **ixa** bektore unitarioaren koordenatuak **{S}-rekiko, translaziorik ez suposatuz**

$$^S_A T \; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



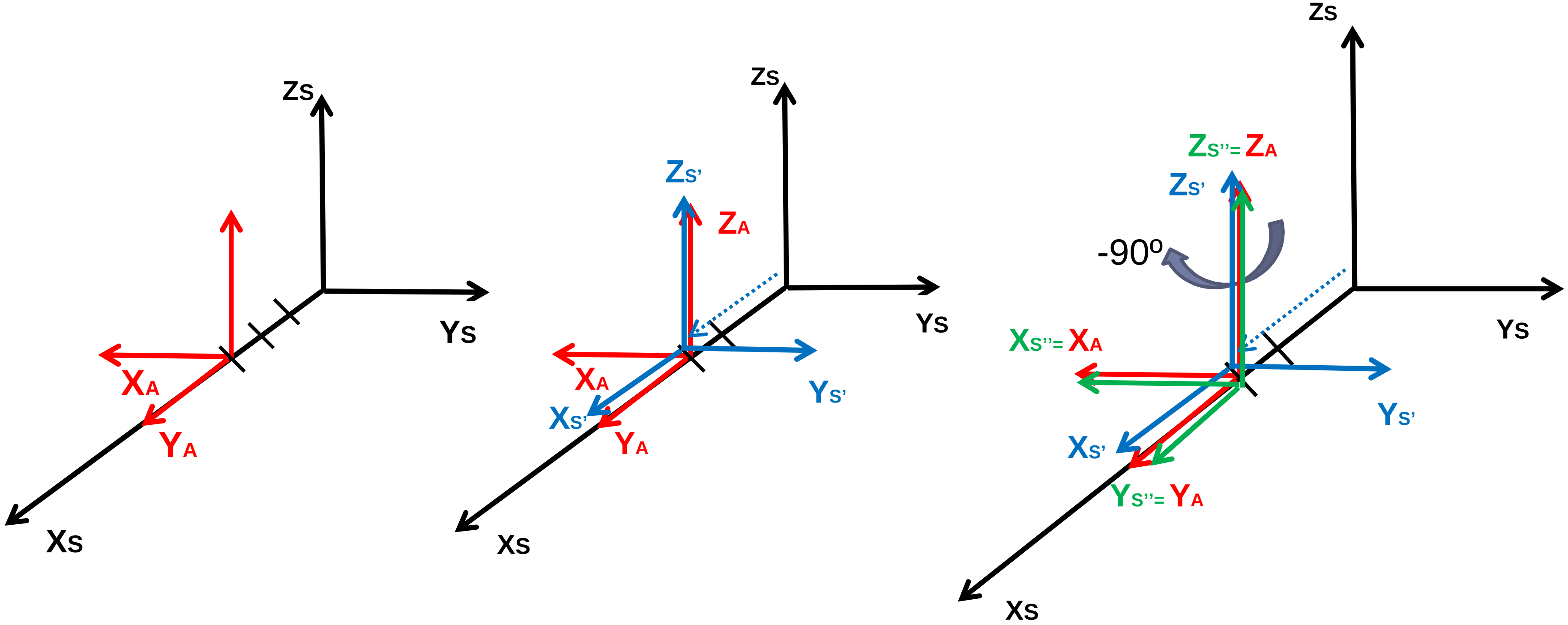
{S} **jy** bektore unitarioaren koordenatuak **{A}-rekiko**

{A} **jya** bektore unitarioaren koordenatuak **{S}-rekiko**

kz {S} bektore unitarioaren koordenatuak **{A}-rekiko**

kza {A} bektore unitarioaren koordenatuak **{S}-rekiko**

- **5. ARIKETA:** ${}^{S}_{A}T$
  - **1) Lehenengo aukera:**
    - **{S} sistema desplazatu p=(3,0,0) bektorean, {S'} lortuz**
    - **T(Z, -90º) biratu {S'}-rekiko, {S''}= {A} lortuz**

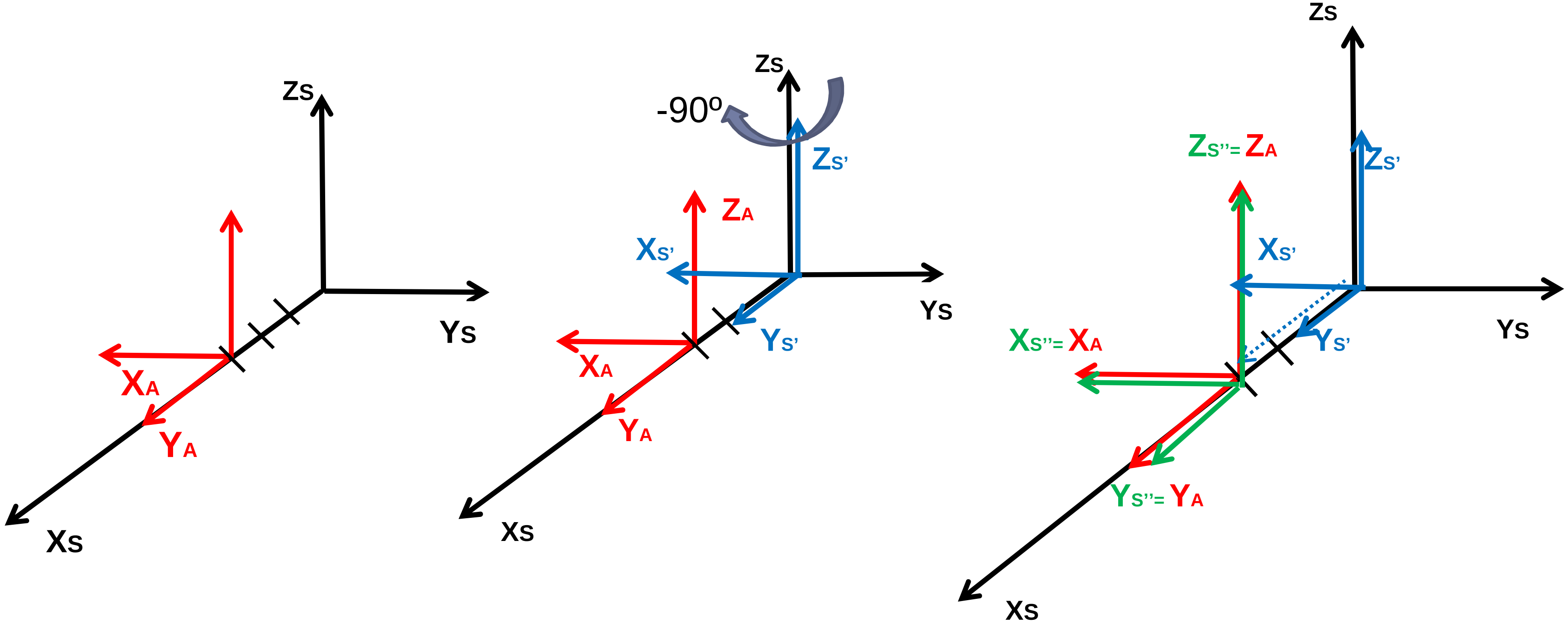


- **5. ARIKETA:** $^{S}_{A}T$
  - **1) Lehenengo aukera:**
    - **{S} sistema desplazatu p=(3,0,0) bektorean, {S'} lortuz**
    - **T(Z, -90º) biratu {S'}-rekiko, {S''}= {A} lortuz**

$$^{S}_{A}T = T(3,0,0)T(z,-90)$$

$$^{S}_{A}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C(-90) & -S(-90) & 0 & 0 \\ -S(-90) & C(-90) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **5. ARIKETA:** $^{S}_{A}T$
  - **1) bigarren aukera:**
    - **T(Z, -90º) biratu {S'} lortuz**
    - **{S'} sistema p=(0,3,0) bektorean desplazatu {S} sistema finkoarekiko, {S'}= {A} sistema lortuz**



Jon Legarreta / Raquel Martinez

- **5. ARIKETA:** $^{S}_{A}T$
  - **1) bigarren aukera:**
    - **T(Z, -90º) biratu {S'} lortuz**
    - **{S'} sistema p=(0,3,0) bektorean desplazatu {S} sistema finkoarekiko, {S'}= {A} sistema lortuz**

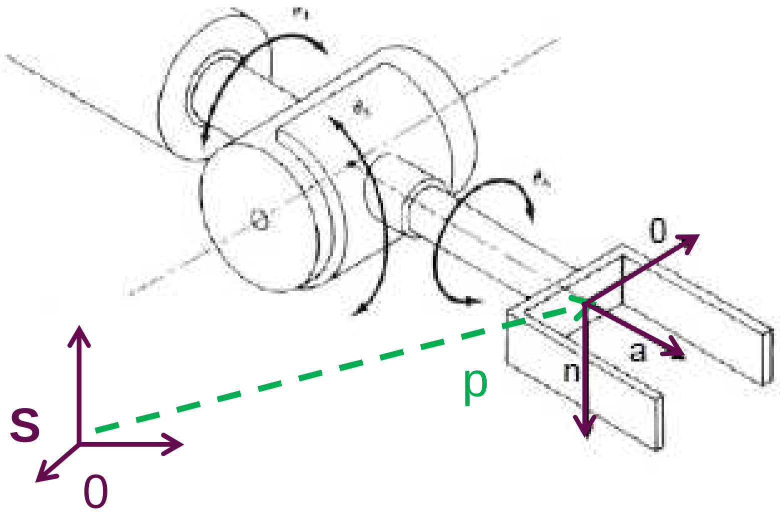
$$^{S}_{A}T = T(z,-90)T(0,3,0)$$

$$^{S}_{A}T = \begin{bmatrix} C(-90) & -S(-90) & 0 & 0 \\ -S(-90) & C(-90) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

POSIZIOAREN ETA **ORIENTAZIOAREN** ADIERAZPENA

TMH –en esnahai geometrikoa

$$ {}^{oinarria}_{muturra}T = \left[\begin{array}{ccc|c} n_x & o_x & a_x & Px \\ n_y & o_y & a_y & Py \\ n_z & o_z & a_z & Pz \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$



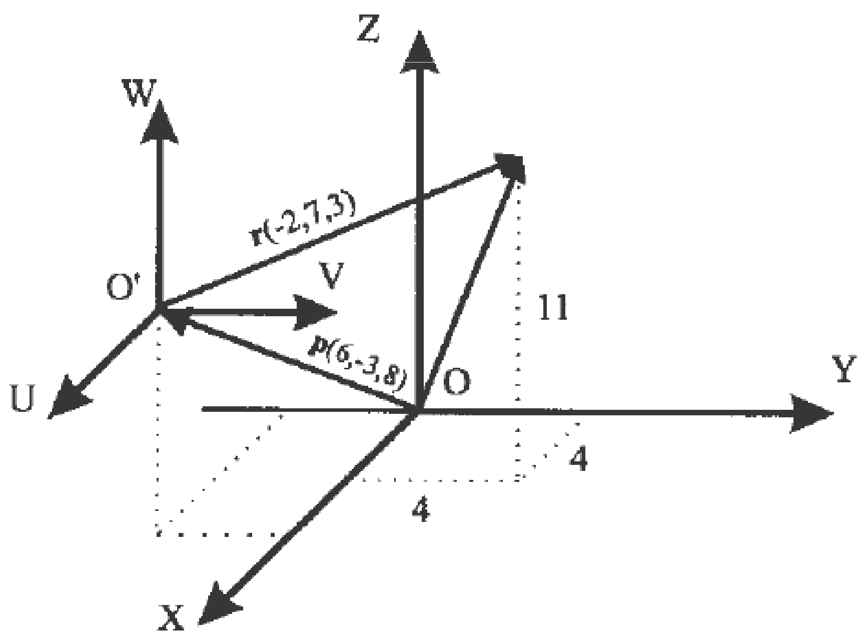
- [n o a] → **Hiru bektore ortonormal**

  Maneiatzailearen orientazioa adierazten dute.
  - **n** bektore normala
  - **o** desplazamendu-bektorea
  - **a** hurbilpen-bektorea

- p → **Maneiatzailearen posizio-koordenatuak adierazten duen bektorea**

6. ARIKETA:

Irudiaren arabera {S'} O'UVW sistema **p**(6,-3,8) bektoregatik trasladatuta dago, {S} OXYZ sistema finkoarekiko. **r** bektorearen koordenatuak kalkulatu $^{xyz}\mathbf{r}$ OXYZ sisteman, jakinik r bektorearen koordenatuak O'UVW ssiteman $^{uvw}\mathbf{r}$ (-2,7,3) direla.



Jon Legarreta / Raquel Martinez

- **6 ARIKETA:**

Koordenatu-sistemaren aldaketa:

TMH translazio bat izanik

Ez dago errotaziorik→ R3x3 matrize unitatea I3x3

Jatorriaren translazioa→ Pxyz =(6,-3,8)

$$
{}_{S'}^{S}T(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & Px \\ 0 & 1 & 0 & Py \\ 0 & 0 & 1 & Pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- **6. ARIKETA:**

$^{S'}\mathbf{r}$ (-2,7,3) bektorea, OXYZ-rekiko :

$$^{S}r = {}^{S}_{S'}T(p) \cdot {}^{S'}r$$

$$\begin{bmatrix} rx \\ ry \\ rz \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ru \\ rv \\ rw \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{^{S'}r = (4,4,11)}$$

- **7. ARIKETA:**

{B} sistema adierazten duen transformazio-matrizea lortu nahi da. {B} sistema {A} sistematik ondorengo moduan eratzen da: **OX**-ekiko -90º-ko biraketa, ondoren **pxyz**(5,5,10) bektorean trasladatuta eta azkenik **OZ** ardatzarekiko 90º-ko biraketa bat.

Eskatzen da:

1) Adierazi grafikoki bi sistemen ardatzak

2)Kalkulatu transformazio-matrizea

3)Kalkulatu **ruvw**(-3,3,3) koordenatuak dituen **r** bektorearen $\mathbf{r}_{\mathbf{xyz}}$ koordenatuak

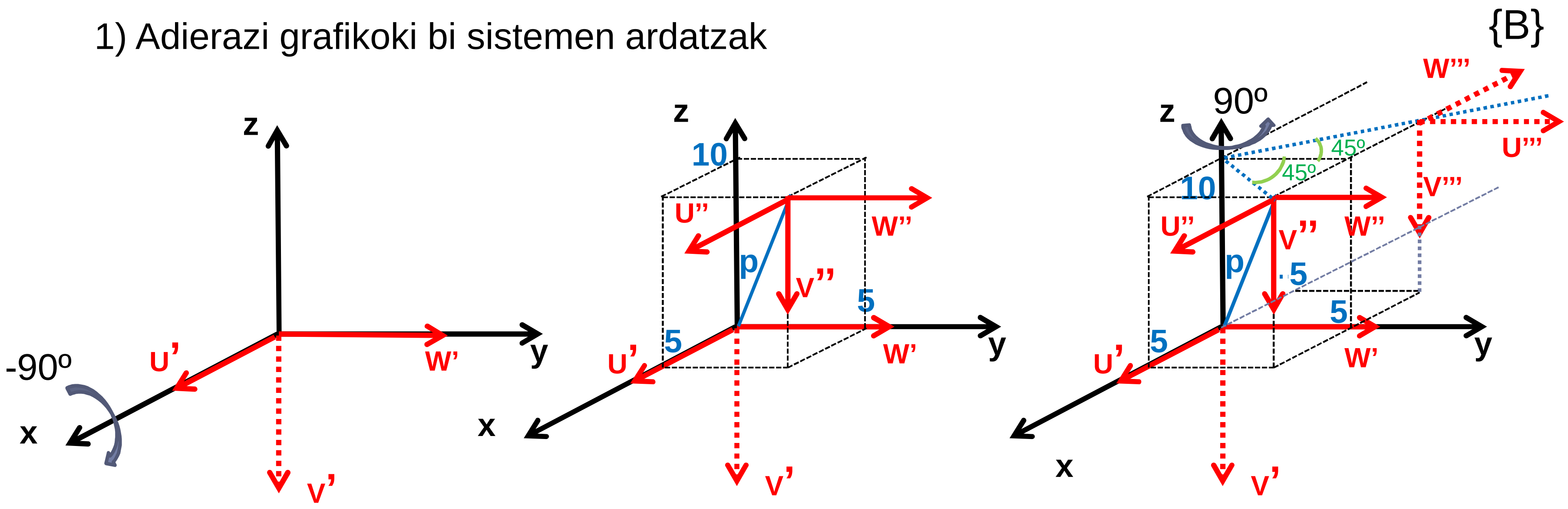
4)Kalkulatu **rxyz**(5,5,10) koordenatuak dituen **r** bektorearen $\mathbf{r}_{\mathbf{uvw}}$ koordenatuak

7. ARIKETA:

{B} sistema adierazten duen transformazio-matrizea lortu nahi da. {B} sistema {A} sistematik ondorengo moduan eratzen da: **OX**-ekiko -90º-ko biraketa, ondoren **pxyz**(5,5,10) bektorean transladatuta eta azkenik **OZ** ardatzarekiko 90º-ko biraketa bat.

Eskatzen da:

1) Adierazi grafikoki bi sistemen ardatzak



Jon Legarreta / Raquel Martinez

- **7. ARIKETA:** Transformazio segida:

1 -90º biraketa OX- ekiko→ T(x, -90)

2 Translazioa OXYZ→ T(p)=T(5,5,10)

3 90º biraketa OZ-ekiko→ T(z, 90)

$$
\begin{array}{cccc}
 & 3 & 2 & 1 \\
{}^{A}_{B}T = T(z,90)T(p)T(x,-90) = & \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
{}^{A}_{B}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{z},90)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},-90) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

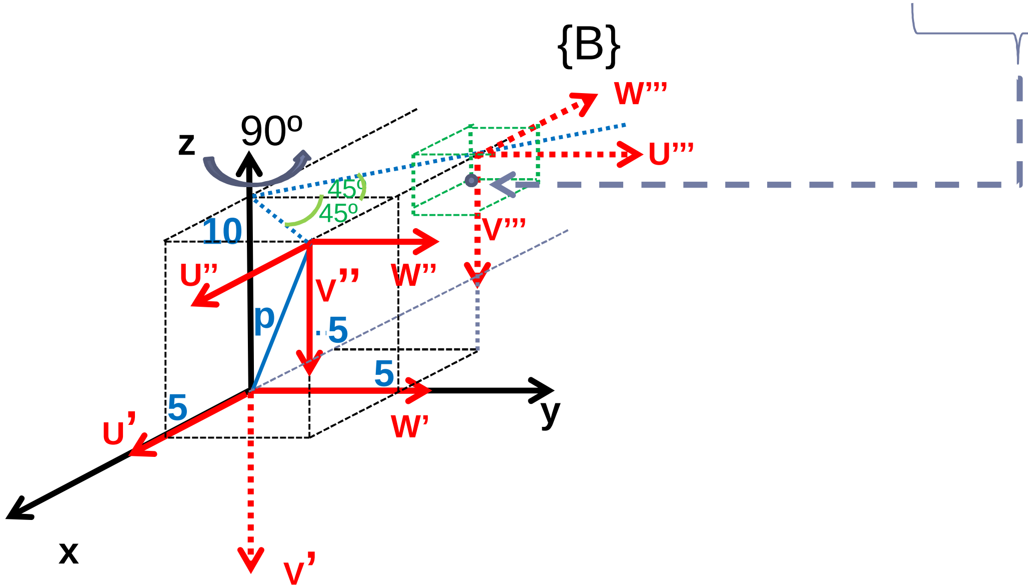
$$
\boxed{{}^{A}_{B}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}
$$

- **7. ARIKETA**

3)Kalkulatu **ruvw**(-3,3,3) koordenatuak dituen **r** bektorearen $\mathbf{r}_{xyz}$ koordenatuak

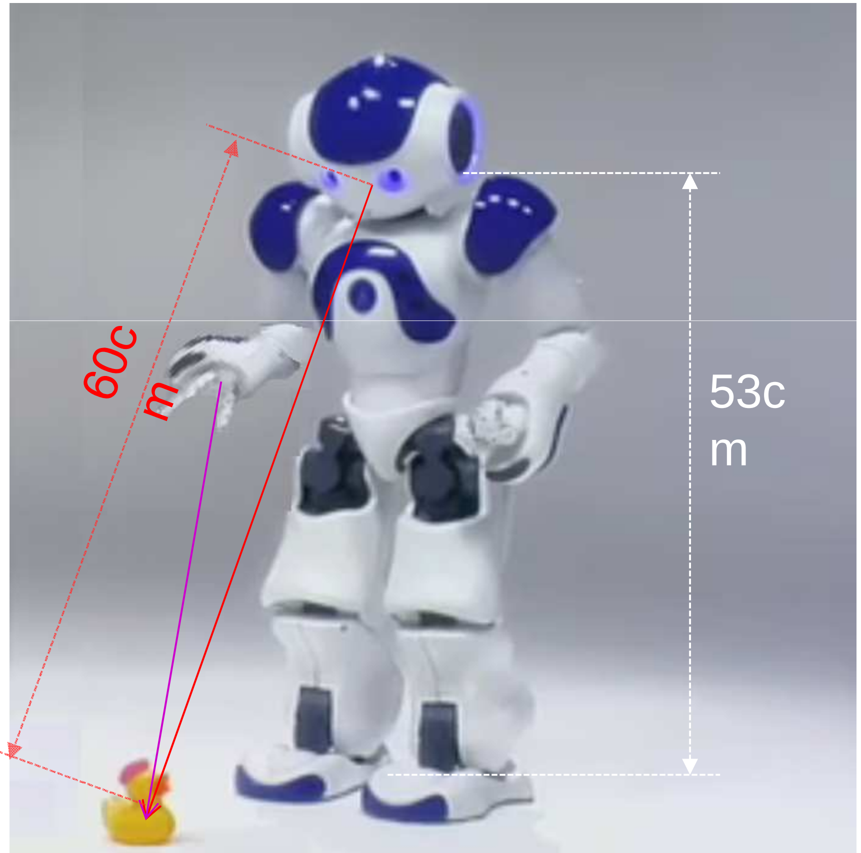
$$\begin{bmatrix} rx \\ ry \\ rz \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ru \\ rv \\ rw \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

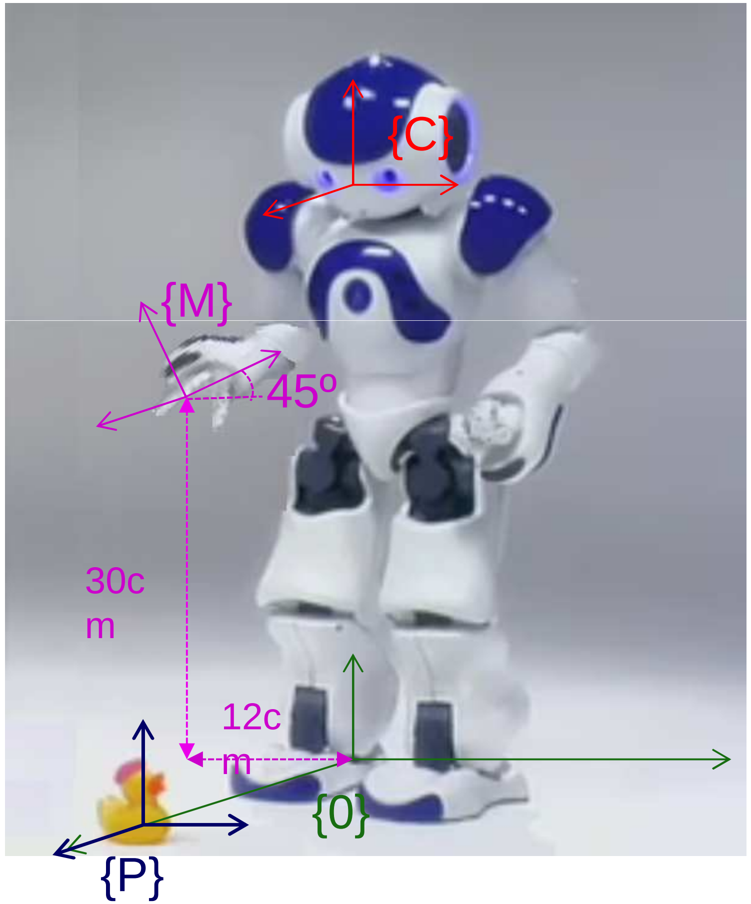
$$^{A}r = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}r$$



POSIZIOAREN ETA ORIENTAZIOAREN ADIERAZPENA

- **8. ARIKETA:** Kalkulatu ahatearen kokapena eskuarekiko eta ahatearen eta eskuaren sistemak erlazionatzen dituen TMH



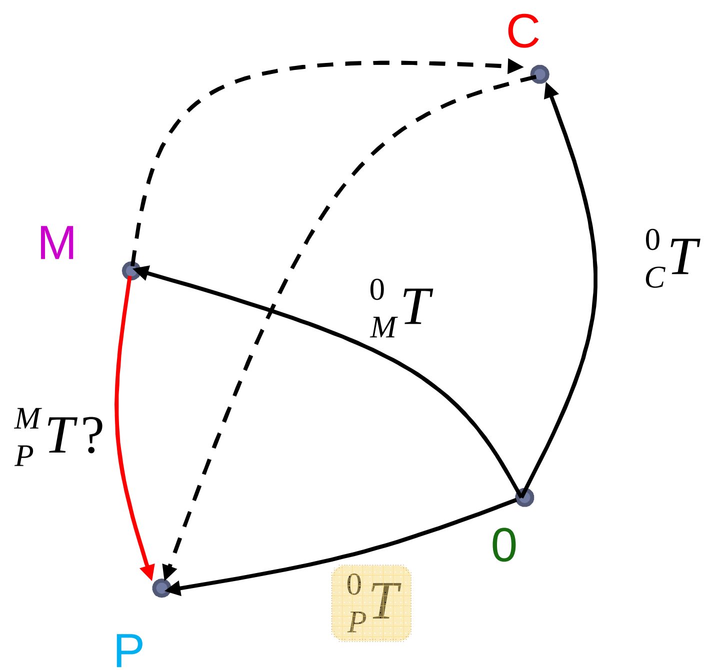


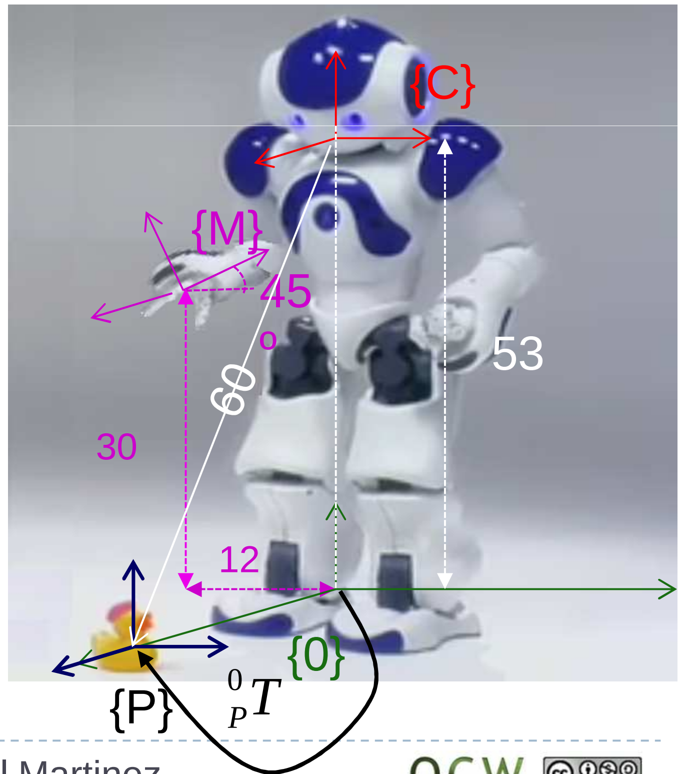
Jon Legarreta / Raquel Martinez

- **8. ARIKETA :**

$$ {}^{M}_{P}T = {}^{M}_{0}T \cdot {}^{0}_{P}T = ({}^{M}_{0}T)^{-1} \cdot {}^{0}_{P}T $$

$$ {}^{M}P? \Rightarrow {}^{M}P = {}^{M}_{0}T \cdot {}^{0}P $$





- **8. ARIKETA :**

$$^{M}P = {}^{M}_{0}T \cdot {}^{0}P$$

Ahatearen koordenatuak lortu {0} jatorriarekiko:

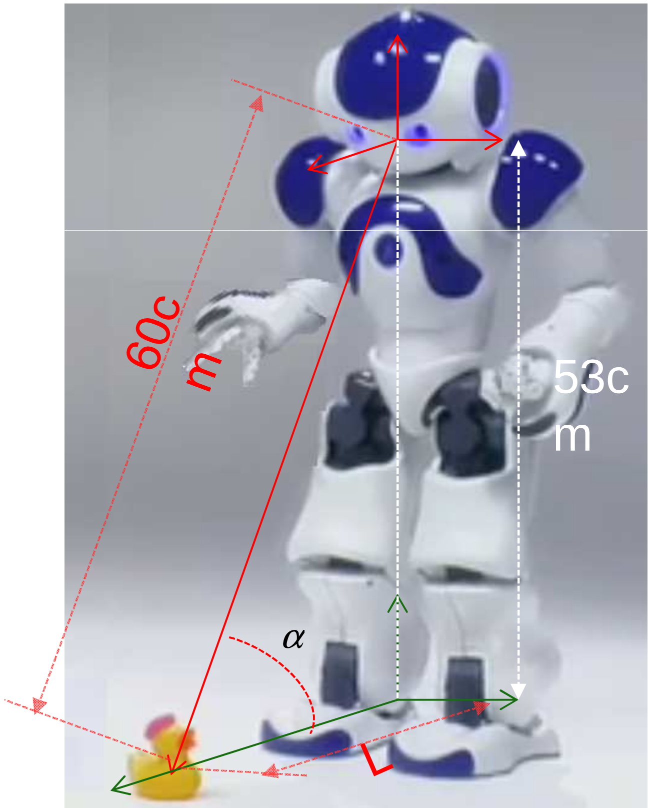
Eratzen duten angelua:

$$sen(\alpha) = \frac{53}{60} \rightarrow \alpha = 62^{o}$$

$$L = 60\cos(\alpha) = 28cm$$

$$L = \sqrt{60^2 - 53^2} = 28cm$$

$$^{0}P = (28,0,0)$$



- **8. ARIKETA :**

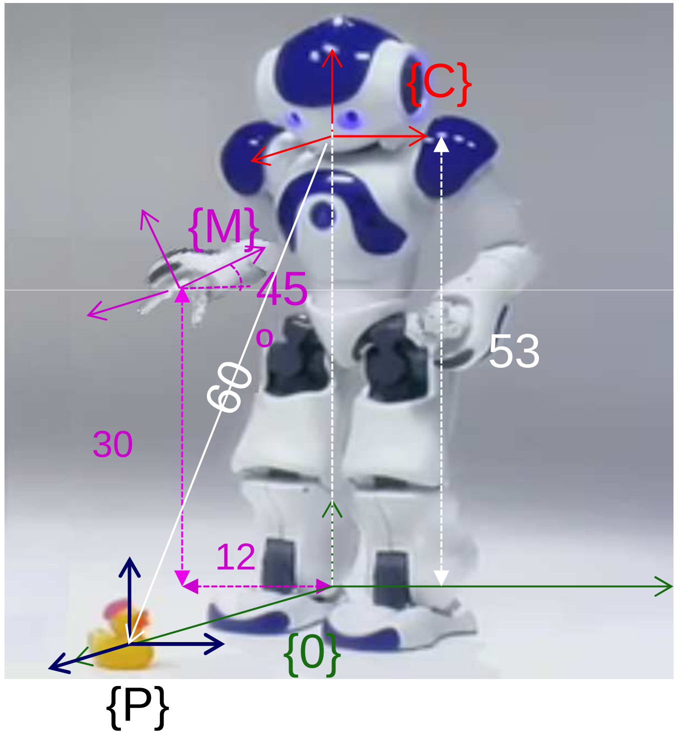
{0} sistema kokatzen duen matrizea kalkulatu {M} eskuarekiko

$$ {}^{M}_{0}T = ({}^{0}_{M}T)^{-1} $$

$$ {}^{0}_{M}T = T(p)T(x,+45^{o}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C45 & -S45 & 0 \\ 0 & S45 & C45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & -0.7 & -12 \\ 0 & 0.7 & 0.7 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{M}_{0}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.7 & -12.72 \\ 0 & -0.7 & 0.7 & -29.69 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



- **8. ARIKETA :**

$$ {}^{M}P = {}^{M}_{0}T \cdot {}^{0}P $$

$$ {}^{0}P = (28,0,0) $$

$$ {}^{M}_{0}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.7 & -12.72 \\ 0 & -0.7 & 0.7 & -29.69 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{M}P = {}^{M}_{0}T \cdot {}^{0}P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.7 & -12.72 \\ 0 & -0.7 & 0.7 & -29.69 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -12.72 \\ -29.69 \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ \boxed{{}^{M}P = (28,-12.72,-29.69)} $$