ARIKETA EBATZIAK. 7 GAIA: ZENBAKI KONPLEXUAK

Ariketa 1. *Idatzi era polarrean ondoko zenbaki konplexuak:* $3i, 1+i$ *eta* $-1-i$.

$3i = 3_{\pi/2}; 1+i = (\sqrt{2})_{\pi/4}$ eta $-1-i = (\sqrt{2})_{5\pi/4}$.

Ariketa 2. *Egin ondoko eragiketak:* $(2_{\pi/3})^3$ *eta* $\frac{2_{\pi/3}}{\sqrt{3}_{\pi/4}}$.

$(2_{\pi/3})^3 = 8_\pi$,
$\frac{2_{\pi/3}}{\sqrt{3}_{\pi/4}} = (\frac{2}{\sqrt{3}})_{\pi/3-\pi/4} = (\frac{2}{\sqrt{3}})_{\pi/12}$.

Ariketa 3. *Kalkulatu* $(-\sqrt{3}+i)^7$.

Ohartu $z = -\sqrt{3}+i$, $z = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$ adierazpena ere onartzen duela. Beraz,

$$z^7 = 2^7(\cos\frac{35\pi}{6} + i\sin\frac{35\pi}{6}) = 2^7(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}) = 2^7(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1}{2}) = 2^6(\sqrt{3}-i).$$

Ariketa 4. *Aurkitu* $\cos(3\theta)$*-ren formula* $\cos\theta$*-ren arabera.*

Lehenengo eta behin ohartu $\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$ ekuazioa betetzen dela. Ber hiru eginez eta alderdi bietako alde errealak eta irudikariak berdinduz, $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ ondorioztatzen da.

Ariketa 5. *Eman unitatearen* 4*garren erroak eta unitatearen* 6*garren erroak.*

Unitatearen 4garren erroak, $1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}$ eta $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ dira, hain zuzen ere, $1, i$, $-1, -i$.

Bestalde, unitatearen 6garren erroak $1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, -1, e^{i\frac{4\pi}{3}}$ eta $e^{i\frac{5\pi}{3}}$ dira, eta horiek zirkulu batetan inskribituta dagoen hexagono erregular baten erpinak dira.

Ariketa 6. *Ebatzi* $z^5 = -\sqrt{3}+i$ *ekuazioa.*

Hau da, kalkulatu behar dira $-\sqrt{3}+i$ zenbaki konplexuaren bostgarren erroak. Horretarako idatzi $z_0 = -\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ moduan. Orain z_0-ren bostgarren erro bat, $\alpha = 2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{\pi}{6}}$ izan daiteke. Baldin eta w unitatearen bostgarren erro bat bada, orduan $(\alpha.w)^5 = \alpha^5 w^5 = \alpha^5 = z_0$ da. Beraz, $\alpha.w$ baita ere, z_0-ren bostgarren erro bat da. Beraz, $-\sqrt{3}+i$-ren bostgarren erroak ondokoak dira,

$$\alpha, \alpha e^{i\frac{2\pi}{5}}, \alpha e^{i\frac{4\pi}{5}}, \alpha e^{i\frac{6\pi}{5}}, \alpha e^{i\frac{8\pi}{5}}.$$

Hain zuzen ere, z_0-ren bostgarren erroak diren bost erro daude. Baldin eta β, z_0-ren beste bostgarren erro bat bada, orduan $\beta^5 = \alpha^5 = z_0$ da, eta hemendik $\frac{\beta^5}{\alpha^5} = 1$ dugu eta honek, $\frac{\beta}{\alpha} = w$ unitatearen bostgarren erro bat dela esan nahi du, eta $\beta = \alpha w$ adierazpena jadanik aurreko zerrendan dagoela.

Beraz, $(-\sqrt{3}+i)$-ren bostgarren erro guztiak ondokoak dira,

$$2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{\pi}{6}}, 2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{17\pi}{30}}, 2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{29\pi}{30}}, 2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{41\pi}{30}}, 2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{53\pi}{30}}.$$