ARIKETA EBATZIAK. 6 GAIA: POLINOMIOAK

Ariketa 1. *Frogatu* $f(x) = x^3 - 1$ *polinomioak erro bakarra duela* $\mathbb{R}$ *gorputzean.*

Ohartu $f(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ dela, eta x^2+x+1 polinomioak ez dituela errorik $\mathbb{R}$ gorputzean.

Ariketa 2. *Kalkulatu zkh*$(x^5 - 1, x^3 + x - 2)$

Iradokizina: $\text{zkh}(x^5-1, x^3+x-2) = \text{zkh}(x^3+x-2, 2x^2+x-3) =$
$\text{zkh}(2x^2+x-3, \frac{11x}{4} - \frac{11}{4}) = \text{zkh}(\frac{11x}{4} - \frac{11}{4}, 0)$.
Beraz $\text{zkh}(x^5-1, x^3+x-2) = x-1$ da.

Ariketa 3. *Baldin eta* $f(x) \in K[x]$ *bada, dg*$(f(x)) = 2$ *edo 3 izanik, frogatu* $f(x)$*,* K *gainean irreduziblea dela baldin eta soilik baldin* $f(x)$ *polinomioak ez baditu errorik* K*-n.*

Iradokizuna: Egin froga norabide bietan absurdura eramanez, kontutan harturik $\text{dg}(f(x)) = 2$ edo 3 dela.

Ariketa 4. *Izan bedi* $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ *eta demagun dg*$(f(x)) \geq 2$ *dela. Orduan,* $\mathbb{Q}$ *gorputzaren gainean* $f(x)$ *polinomioaren erroren bat egotekotan, erro hori* $\frac{r}{s}$ *motatakoa da, non* $r \mid a_0, s \mid a_n$*,* $r, s \in \mathbb{Z}$ *eta zkh*$(r,s) = 1$ *diren.*

Iradokizuna: Suposatu $\frac{r}{s}$ motatako zatiki bat $f(x)$ polinomioaren erroa dela, hau da, $f(\frac{r}{s}) = 0$ dela, eta ondorioztatu erlazio horretatik, zeintzuk diren r eta s zenbakiek bete behar dituzten baldintzak.

Ariketa 5. *Frogatu* $f(x) = 2x^3 - x^2 + 8x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ *polinomioak ez dituela erro arrazionalik.*

$f(x) = 2x^3 - x^2 + 8x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomioak erro arrazional bat izatekotan, aurreko 4. Ariketa erabiliz erro hori, $1, -1, 1/2$ eta/edo $-1/2$ izan beharko litzateke, eta nola $f(1) \neq 0$, $f(-1) \neq 0, f(1/2) \neq 0, f(-1/2) \neq 0$ diren, $f(x)$-k ez duela erro arrazionalik ondorioztatzen da.

Ariketa 6. *Deskonposatu* $f(x) = x^4 - 2x^2 + 8x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ *polinomioa.*

Lehenengo eta behin aurreko ariketan erabilitako metodoarekin ohartu $f(x) = x^4 - 2x^2 + 8x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomioak ez duela onartzen erro arrazionalik. Bestalde, $f(x)$ polinomioak $\mathbb{Z}[x]$-ko bigarren mailako bi polinomioen deskonposaketa onartuko balu, $f(x) = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ deskonposaketa onartuko luke, ondoko baldintzak betez,

$$bd = 1, bc + da = 8, d + b + ac = -2 \text{ eta } a + c = 0.$$

Azkenik, nola aurreko sistema bateraezina den, $f(x)$, $\mathbb{Q}$ gorputz gainean laburtezina edo irreduziblea dela ondorioztatzen da.

Ariketa 7. *Deskonposatu* $f(x) = x^6 - 25x^5 + 3x^2 + 12 \in \mathbb{Z}[x]$ *polinomioa.*

Kontsidera ditzagun $f(x) = x^6 - 25x^5 + 3x^2 + 12 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomioa, eta $p = 3$ zenbaki lehena ondoko baldintzak betetzen dituena,

(i) $3 \mid 12, 3 \mid 0, 3 \mid 3, 3 \mid 0, 3 \mid 0,$

(ii) $9 \nmid 12$

(iii) $3 \nmid -25.$

Beraz, Einseinstein-en irizpidea aplikatuz $f(x)$ polinomioak onartzen du $\mathbb{Z}[x]$ multzoan 5 edo 6 mailako faktore irreduzible bat. Bestalde, 5 mailako faktore irreduzible bat onartuko balu, orduan $f(x)$ polinomioak erroren bat izango luke $\mathbb{Q}$-n, baina froga daitekeela $f(x)$-k ez duela erro arrazionalik. Ondorioz, $f(x)$-k 6 mailako faktore irreduzible bat onartzen du, hau da, $f(x)$ irreduzible da $\mathbb{Q}$ gainean.