

ARIKETAK.6 GAIA: POLINOMIOAK

Ariketa 1. (i) Izan bedi $g(x) = g \in K[x]$ polinomio finkoa, bere maila $n \geq 1$ izanik. Frogatu $f(x) \in K[x]$ edozein polinomio, non $dg(f(x)) \geq n$ den, $f(x) = \alpha_r(x)g^r + \alpha_{r-1}(x)g^{r-1} + \dots + \alpha_1(x)g + \alpha_0(x)$ moduan idatz daitekeela, $dg(\alpha_i(x)) < n$ izanik, i guztietarako. Gainera frogatu deskonposizio hori bakarra da.

(Laguntza: Arrazoitu $f(x)$ -ren mailaren gaineko indukzioz eta erabili zatiketaren algoritmoa.)

(ii) Deskonposatu $f(x) = x^7 + 1$ polinomioa $g(x) = x^2 + 1$ polinomioaren berreduren arabera.

Ariketa 2. Izan bitez $d, n \in \mathbb{N}$. Frogatu $x^d - 1 \mid x^n - 1$ dela baldin eta soilik baldin $d \mid n$ bada. (Iradozkizuna: \Rightarrow) inplikaziorako, $n = qd + r$ bada, kontuan izan $x^n - 1 = (x^{qd} - 1)x^r + x^r - 1$ dela.)

Ariketa 3. Kasu bakoitzean, kalkulatu (f, g) zatitzaile komunetako handiena eta deskonposatu $\alpha f + \beta g$ moduan.

(i) $f(x) = x^2 + x + 2$, $g(x) = x^3 + 2x + 1$;

(ii) $f(x) = x^{10} - 1$, $g(x) = x^6 - 1$;

(iii) $f(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

Ariketa 4. Aurkitu ondorengo polinomioen erro arrazional guztiak: $x^n - 1$, $x^n + 1$, $3x^3 + x - 5$, $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

Ariketa 5. Frogatu $x^4 + 4$ polinomioak ez duela errorik \mathbb{Q} gorputzean, baina hala ere, ez dela irreduziblea \mathbb{Q} -ren gainean. (Iradozkizuna: Batu eta kendu $4x^2$.)

Ariketa 6. Izan bitez $a, b \in K$, $a \neq 0$ eta $f(x) \in K[x]$. Frogatu $f(x)$ polinomioa $K[x]$ -n polinomioa irreduziblea dela baldin eta soilik baldin $f(ax + b)$ irreduziblea bada $K[x]$ -n.

Ariketa 7. Izan bitez $f, g \in K[x]$ bi polinomio, hauen maila $\leq n$ izanik. Existitzen badira $n + 1$ balio desberdin, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in K$, halakoak non $f(\lambda_i) = g(\lambda_i)$ den, frogatu $f = g$ dela.

Ariketa 8. Deskonposatu honako polinomio hauek irreduzibleen biderkadura gisa \mathbb{Q} eta \mathbb{R} gorputzen gainean.

(i) $f(x) = x^3 - 1$

(ii) $f(x) = x^4 + 1$

(iii) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

(iv) $f(x) = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$

Ariketa 9. Aurkitu $f(x) = x^6 + 10x^3 - 12x + 5$ polinomioaren erro anizkoitz guztiak eta erabili informazio hori $f(x)$ irreduzibleen biderkadura gisa faktorizatzeko \mathbb{Q} eta \mathbb{R} gorputzen gainean.

Ariketa 10. Deskonposatu batugai soiletako zatikien batuketa gisa ondoko zatikiak:

(i) $\frac{x-1}{(x-2)(x+1)^2}$

(ii) $\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^2}$