ARIKETA EBATZIAK. 5 GAIA: KONGRUENTZIAK

Ariketa 1. *Kalkulatu ondoko n zenbakiaren hondarra 12 zenbakiagatik zatitzerakoan.*

$$n = 1! + 2! + 3! + \cdots + 99! + 100!.$$

Kongruentzia lengoaian, 0 eta 12 artean dagoen r zenbaki oso bat aurkitu behar da, zeinentzat $n \equiv r(\text{mod } 12)$, hau da, n erreduzitu behar da 12 modulura. Lehenengo eta behin ohartu $4! = 24 \equiv 0(\text{mod } 12)$ dela, eta ondorioz $k \geq 4$ bada,

$$k! = k(k-1)\ldots 6 \cdot 5 \cdot 4! \equiv k(k-1)\ldots 6 \cdot 5 \cdot 0 \equiv 0(\text{mod } 12).$$

Beraz, $n \equiv 1! + 2! + 3!(\text{mod } 12)$, eta ondorioz $n \equiv 9(\text{mod } 12)$.

Ariketa 2. *Frogatu edozein $k \geq 1$-rako, $7 \mid (5^{2k} + 3 \cdot 2^{5k-2})$ dela.*

$5^{2k} + 3 \cdot 2^{5k-2}$, 7-gatik zatitzerakoan hondarra 0 ematen duela frogatu behar da. Ondoko kongruentziak 7 moduluarekiko ditugu,

$$5^{2k} + 3 \cdot 2^{5k-2} \equiv 5^{2k} + (-2^2) \cdot 2^{5k-2} \equiv 5^{2k} - 2^{5k} \equiv 25^k - 32^k(\text{mod } 7),$$

$3 \equiv -2^2(\text{mod } 7)$ izateagatik eta kongruentzien propietateak aplikatuz.

Nola orain $25 \equiv 4(\text{mod } 7)$ eta $32 \equiv 4(\text{mod } 7)$ diren, kongruentzien propietateak aplikatuz,

$$5^{2k} + 3 \cdot 2^{5k-2} \equiv 25^k - 32^k \equiv 4^k - 4^k \equiv 0(\text{mod } 7)$$

lortzen da.

Ariketa 3. *Frogatu zenbaki oso bat era hamartarrean 9-gatik zatigarria dela baldin eta soilik baldin bere digitu guztien batura 9-gatik zatigarria bada.*

Hain zuzen ere, idatzi n era hamartarrean,

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_k \cdot 10^k,$$

non a_i-k, $0 \leq a_i \leq 9$ tartean dauden. Nola $10 \equiv 1(\text{mod } 9)$ den, kongruentzien propietateagatik, $10^i \equiv 1(\text{mod } 9)$ dugu, eta ondorioz $a_i \cdot 10^i \equiv a_i(\text{mod } 9)$. Beraz, $n \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n(\text{mod } 9)$.

Ariketa 4. *Kalkulatu 614^{6943} zenbakia 17 zenbakiagatik zatitzerakoan lortzen den hondarra.*

Nola $614 \equiv 2 (\text{mod } 17)$ den, $(614 = 36{\cdot}17{+}2)$, orduan $614^{6943} \equiv 2^{6943} (\text{mod } 17)$ dugu. Orain nola $17 \nmid 2$, Fermat-en Teorema txikiagatik, $2^{16} \equiv 1 (\text{mod } 17)$ dugu. Orain, $6943 = 433 \cdot 16 + 15$ denez,

$$2^{6943} \equiv 2^{433 \cdot 16+15} \equiv (2^{16})^{433} 2^{15} \equiv 1^{433} 2^{15} \equiv 2^{15} (\text{mod } 17).$$

Azkenik, $2^4 \equiv 16 \equiv -1 (\text{mod } 17)$ denez, orduan

$$2^{15} \equiv 2^{4 \cdot 3+3} \equiv (2^4)^3 2^3 \equiv (-1)^3 2^3 \equiv -8 \equiv 9 (\text{mod } 17).$$

Beraz, bilatzen genuen hondarra 9 da.

Ariketa 5. *Ebatzi* $4x \equiv 2(mod\ 28)$ *kongruentzia lineala.*

Baldin eta $x \in \mathbb{Z}$ kongruentziaren emaitza bat bada, orduan $4x = 2 + 28q$ da, $q \in \mathbb{Z}$ batentzako, eta nabaria da hau ezinezkoa dela, berdintzaren ezker aldea 4-gatik zatigarria delako, baina eskuma partekoa ez ordea.

Ariketa 6. *Ebatzi* $13x \equiv 2(mod\ 31)$ *kongruentzia lineala.*

Baldin eta $x \in \mathbb{Z}$ kongruentziaren emaitza bat bada, orduan $13x = 2 + 31q$ dugu, $q \in \mathbb{Z}$ batentzako. Ohartu $\text{zkh}(13, 31) = 1$ dela, eta orain Bezòuten identitateagatik, existitzen dira s, t zenbaki osoak, zeinentzat $1 = 13s + 31t$ den. Beraz, $13s \equiv 1 (\text{mod } 31)$ dugu, eta kongruentzia hori 2-gatik biderkatuz, $13(2s) \equiv 2 (\text{mod } 31)$ dugu. Hau da, $x = 2s$ ($s \in \mathbb{Z}$) hasierako kongruentziaren emaitza bat da.