ARIKETA EBATZIAK. 2 GAIA: MULTZO TEORIA ETA APLIKAZIOAK

Ariketa 1. *Izan bedi* $A = \{1, 2, 3\}$. *Esan zein erlazio betetzen dute* $\{1, 2\}$ *eta* $\{1, 4\}$ *multzoak* A *multzoarekiko, eta kalkulatu* A*-ren azpimultzo guztiak.*

Nabaria da $\{1, 2\} \subseteq A$ eta $\{1, 4\} \not\subseteq A$ betetzen dela. Honako hauek dira A-ren azpimultzo guztiak:

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \text{ eta } \{1, 2, 3\}.$$

Beraz, A-k 8 azpimultzo ditu.

Ariketa 2. *Izan bitez* $A = \{1, 2, 3\}$ *eta* $B = \{x, y\}$ *multzoak, kalkulatu* $A \times B$.

$$A \times B = \{(1, x), (2, x), (3, x), (1, y), (2, y), (3, y)\}.$$

Ariketa 3. *Izan bedi* $f(x) = x^2$ *aplikazioa,* $\mathbb{R}$*-tik* $\mathbb{R}$*-ra doan aplikazioa. Kalkulatu ondoko irudi multzoak eta alderantzizko irudiak:*

$imf, f([0, 2]), f([2, +\infty)), f((-\infty, -1) \cup [2, +\infty)), f^{-1}(1), f^{-1}(-1), f^{-1}([-1, 0])$ *eta* $f^{-1}((1, +\infty))$.

Ondokoa dugu, $\text{im}f = [0, +\infty)$, $f([0, 2]) = [0, 4]$, $f([2, +\infty)) = [4, +\infty)$, $f((-\infty, -1) \cup [2, +\infty)) = (1, +\infty)$, $f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}(-1) = \emptyset$, $f^{-1}([-1, 0]) = \{0\}$ eta $f^{-1}((1, +\infty)) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Ariketa 4. *Aztertuko zein eremutan eta koeremutan* $f(x) = x^2$ *aplikazioa bijektiboa den ala ez, eta posible denean, zein den aplikazio horren alderantzizko aplikazioa.*

1) Har dezagun $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ aplikazioa non $f(x) = x^2$ den $\forall x \in \mathbb{R}$. Garbi dago f ez dela bijektiboa (supraiektiboa da, baina ez injektiboa), beraz ez da f^{-1} alderantzizkoa existitzen.

2) Izan bedi $g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, \infty)$ berriro ere $g(x) = x^2$ formularen bidez emanda. Beraz, g, f-ren murrizketa da $[0, \infty)$ tartera eta g bijektiboa da. Beraz, existitzen da $g^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$. Zein formularen bidez dago emanda? Gogoratu $g^{-1}(y) = x$ dela baldin eta soilik baldin $g(x) = y$ bada. Beraz, $y \in [0, +\infty)$ elementu baten irudia kalkulatzeko g^{-1}-en bitartez, $g(x) = y$ ekuazioa askatu behar da, x ezezagunarekiko. Hau supraiektibotasuna aztertzerakoan egiten da, eta $x = \sqrt{y}$ lortzen da. Beraz, $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$ dugu edo, aldagaiaren izena aldatuz, $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in [0, +\infty)$.

3) Izan bedi $h : (-\infty, 0] \longrightarrow [0, \infty)$ non $h(x) = x^2$ den, hau da, f-ren murrizketa $(-\infty, 0]$ tartera. Aurreko ataleko prozedura bera jarraituz h bijektiboa dela ikus daiteke eta $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ dela $x \in [0, -\infty)$ guztietarako.

Ariketa 5. *Izan bitez* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *eta* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ *eta* $g(x) = x + 2$ *formulen bidez emanda. Kalkulatu, posible baldin bada,* $f \circ f, f \circ g, g \circ f$ *eta* $g \circ g$ *lau konposizioak.*

Konposizio horien formulak honako hauek dira:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2) = \left(x^2\right)^2 = x^4,$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4,$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2,$$
$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x+2) = (x+2) + 2 = x + 4.$$

Ikusten denez, $f \circ g \neq g \circ f$ dugu. Beraz, konposizioa egiterakoan garrantzitsua da zein ordenatan idazten diren aplikazioak.

Ariketa 6. *Izan bedi* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *multzoan definitutako ondoko baliokidetasun erlazioa,*

$$(a, b)\Re(c, d) \Longleftrightarrow ad = cb.$$

Esan zein den (a, b) *bikote bakoitzaren baliokidetasun klasea eta kalkulatu zatikien multzoa.*

$\overline{(a, b)} = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\}$, eta zatikien multzoa $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\Re = \mathbb{Q}$ da.