ARIKETAK.2 GAIA: MULTZO TEORIA. APLIKAZIOAK

Ariketa 1. *Izan bitez X, EHUko Zientzi eta Teknologia Fakultateko ikasleen multzoa, H gizonen multzoa, M emakumeen multzoa, C Unibertsitatera kotxez joaten diren ikasleen multzoa, A Unibertsitatera autobusez joaten diren ikasleen multzoa, E Matematikako ikasleen multzoa eta F Fisikako ikasleen multzoa. Zehaztu ondoko multzoak:* $X-H$, $X-M$, $X-C$, $X-A$, $X-E$, $X-F$, $H\cap C$, $H\cap A$, $H\cap E$, $H\cap F$, $M\cap C$, $M\cap A$, $M\cap E$, $M\cap F$, $C\cap A$, $C\cap E$, $C\cap F$, $A\cap E$, $A\cap F$, $E\cap F$, $M\cup H$, $H-M$, $H-C$, $H-A$, $H-E$, $H-F$, $H-M$, $M-H$, $M-C$, $M-A$, $M-E$, $M-F$, $C-A$, $C-E$, $C-F$, $A-C$, $A-M$, $A-H$, $A-E$, $A-F$, $E-H$, $E-M$, $E-C$, $E-A$ *eta* $E-F$.

Ariketa 2. 40 *pertsonek osatzen duten multzo batetatik, izan bitez E ingelesa ikasten duten pertsonen multzoa, F frantsesa ikasten duten pertsonen multzoa, eta C gaztelaina ikasten duten pertsonen multzoa. Badakigu horretariko* 3 *pertsonek ez dutela hizkuntzarik ikasten,* 2*-k hiru hizkuntzak ikasten dituztela,* 8*-k ingelesa eta frantsesa,* 10*-rek ingelesa eta gaztelania,* 6*-k frantsesa eta* 28*-k ingelesa. Zenbat pertsonek gaztelaina bakarrik ikasten dute? Adieraz ezazu multzo hori modu sinbolikoan?*

Ariketa 3. *Laburtu ondoko adierazpenak:*

$$a)(A\cup B)\cup(A\cap(C\cup B))$$

$$b)(A\cap B)\cup(C\cap A)\cup(A^c\cap B^c)^c$$

Ariketa 4. *Izan bedi $A=\{a,b\}$ multzoa. Egia al dira ondoko baieztapenak?*
(i) $a\in A$; *(ii)* $\{a\}\in A$; *(iii)* $\emptyset\in A$; *(iv)* $\{a\}\in\mathcal{P}(A)$; *(v)* $\emptyset\in\mathcal{P}(A)$.

Ariketa 5. *Ondokoak eskatzen dira:*

(i) *Kalkulatu $\mathcal{P}(X)$ (hurrenez hurren), baldin eta $X=\{1,2\}$, $X=\{\emptyset\}$ eta $X=\{1,2,3,4\}$ badira;*

(ii) *Baldin eta $A\subset B$ bada, frogatu $\mathcal{P}(A)\subset\mathcal{P}(B)$ dela. Alderantzizkoa egia al da?*

(iii) $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A\cup B)$ *al da? Eta* $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A\cap B)$*?*

Ariketa 6. *Izan bedi A,* 4*-ren multiploak diren zenbaki arrunten multzoa eta $B\subset\mathbb{N}$,* 4 *zenbakian bukatzen diren zenbakien multzoa. Frogatu $A\not\subseteq B$ eta $B\not\subseteq A$ direla.*

Ariketa 7. *Kalkulatu ondoko multzoen arteko operaketak:*

(i) $\bigcup_{n=1}^{7}[\frac{1}{n}, 1]$

(ii) $\bigcap_{n=2}^{60}[\frac{1}{n}, 1]$

(iii) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}]$

(iv) $\bigcup_{n\geq 2}[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$

Ariketa 8. *Ondoko I indizeen multzoetarako eta emandako multzoen familia bakoitzarako, aurkitu eskatutako multzo berriak:*

(i) *Baldin eta $I = \mathbb{R}^2$ eta $p \in I$ bakoitzarako, $S_p = \{p\}$ bada, kalkulatu $\displaystyle\bigcup_{p\in I} S_p$.*

(ii) *Baldin eta $I = (0, \infty)$ eta $x \in I$ bakoitzarako, $C_x = [0, x]$ bada, kalkulatu $\displaystyle\bigcup_{x\in I} C_x$ eta $\displaystyle\bigcap_{x\in I} C_x$.*

(iii) *Baldin eta $I = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ eta $r \in I$ bakoitzarako, B_r, r erradio eta $(0,0)$ erdigunea duen zirkulua bada, aurkitu $\displaystyle\bigcup_{r\in I} B_r$ eta $\displaystyle\bigcap_{r\in I} B_r$.*

(iv) *Baldin eta $I = \mathbb{N}$ eta edozein $n \in I$ baliorako $C_n = (-n, n)$ bada, kalkulatu $\displaystyle\bigcup_{n\in I} C_n$ eta $\displaystyle\bigcap_{n\in I} C_n$.*

Ariketa 9. *Baldin eta $f : X \longrightarrow Y$ eta $g : Y \longrightarrow Z$ bi aplikazio badira frogatu ondoko emaitzak,*

(i) *baldin eta f eta g supraiektiboak badira, orduan $g \circ f$ ere supraiektiboa da, baina alderantzizkoa ez da egia,*

(ii) *baldin eta $g \circ f$ supraiektiboa bada, orduan g ere supraiektiboa da, baina alderantzizkoa ez da egia,*

(iii) *baldin eta $g \circ f$ supraiektiboa eta g injektiboa badira, orduan f supraiektiboa da,*

(iv) *baldin eta f eta g injektiboak badira, orduan $g \circ f$ ere injektiboa da, baina alderantzizkoa ez da egia;*

Ariketa 10. *Izan bedi $f : X \longrightarrow Y$ aplikazioa. Frogatu,*

(i) *baldin eta existitzen bada $g : Y \longrightarrow X$ aplikazioa, non $g \circ f = 1_X$ den, orduan f injektiboa da,*

(ii) *baldin eta existitzen bada* $h : Y \longrightarrow X$ *aplikazioa, non* $f \circ h = 1_Y$ *den, orduan* f *supraiektiboa da,*

(iii) f *bijektiboa da baldin eta soilik baldin existitzen badira* $g, h : Y \longrightarrow X$ *aplikazioak, zeinentzat* $g \circ f = 1_X$, $f \circ h = 1_Y$ *diren, eta kasu honetan* $h = f^{-1} = g$ *den.*

Ariketa 11. *Izan bitez* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *aplikazioak, ondoko adierazpeneen bidez definituak:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{baldin} \quad x \geq 0 \\ 2 & \text{baldin} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{eta} \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{baldin} \quad x \geq 0 \\ x & \text{baldin} \quad x < 0 \end{cases}$$

Ondokoa eskatzen da:

(i) *Aurkitu, zentzua baldin badute, ondoko funtzioak,* $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$.

(ii) *Aztertu* f, g, $f \circ g$ *eta* $g \circ f$ *funtzioen subraiektibotasuna eta injektibotasuna.*

(iii) *Kalkulatu* $f((-5, 5])$, $g((-5, 5])$, $f^{-1}((-5, 5])$ *eta* $g^{-1}((-5, 5])$.

Ariketa 12. *Aurreko ariketan eskatzen den berdina egin ondoko funtzioentzako:* $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ *eta* $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$, *ondoko adierazpenen bitartez emanda daudelarik:* $f(x, y) = x^2 + y$ *eta* $g(x) = (x, -2x)$.

Ariketa 13. *Izan bedi* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *aplikazioa, ondoko adierazpenaren bidez emandakoa:*

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{baldin eta} \quad x < 0 \\ 1 & \text{baldin eta} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & \text{baldin eta} \quad x > 2 \end{cases}$$

Ondokoa eskatzen da:

(i) *Aztertu ea* f *injektiboa edo supraiektiboa den.*

(ii) *Kalkulatu* $f((1, 3))$, $f([-2, 2])$, $f^{-1}((0, 1))$, $f^{-1}([-4, 4])$.

(iii) *Baldin eta* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *aplikazioa,* $g(x) = |x|$ *bidez definituta badago, zehaztu* $f \circ g$ *eta kalkulatu* $(f \circ g)^{-1}((-2, 5])$.

Ariketa 14. *Izan bitez* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *eta* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *aplikazioak ondoko adierazpenen bidez emanda daudelarik,*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{baldin eta} \quad x \leq -1 \\ x + 2, & \text{baldin eta} \quad x > -1 \end{cases}$$

eta

$$g(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$$

(i) *Aztertu ea $f \circ g$ aplikazioa injektiboa edo/eta supraiektiboa den.*

(ii) *Posible baldin bada, kalkulatu $(f \circ g)^{-1}(1)$ eta $(f \circ g)^{-1}(2)$.*

Ariketa 15. *Izan bedi $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ aplikazioa, zeinentzat edozein $x \in \mathbb{R}$-rentzako $f(x) = 3x + 2$ den. Ba al da f injektiboa, supraiektiboa edo/eta bijektiboa? Adierazi grafikoki funtzio hori eta zehaztu ondoko multzoak: $f(\mathbb{Z})$, $T = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{Q}\}$ eta $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{N}\}$.*

Ariketa 16. *Izan bitez ondoko $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak:*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ x^2, & 2 \leq x \leq 5 \\ 2^x, & 5 < x \end{cases}$$

eta $g(x) = x+5$. Posible baldin bada, kalkulatu $f \circ g$ eta $g \circ f$ funtzioak. Baita ere kalkulatu aurreko funtzio konposatu berdinak, baldin eta

$$g(x) = \begin{cases} x+5, & x \geq 0 \text{ denean} \\ x, & x < 0 \text{ denean} \end{cases}$$

bada.

Ariketa 17. *Frogatu $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ aplikazioa, $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ adierazpenaren bidez definituta dagoena, aplikazio bijektiboa dela, eta kalkulatu f^{-1} aplikazioa.*

Ariketa 18. *Kalkulatu $f(A_i)$ eta $f^{-1}(B_i)$ ($i \in \{1,2\}$), ondoko eratan definituta dauden $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ aplikazioetarako:*

(i) *$f(x) = x^2$, $A_1 = (0,2)$, $B_1 = (0,4)$ eta $B_2 = (-1,0)$;*

(ii) *$f(x) = x^4$, $A_1 = (0,2)$, $A_2 = \emptyset$, $B_1 = (0,16]$ eta $B_2 = (-1,0]$;*

(iii) *$f(x) = \frac{1}{x}$ (edozein $x > 0$ baliorako), $A_1 = \mathbb{N}$, $B_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ eta $B_2 = \mathbb{N}$;*

(iv) *$f(x) = x^3 - 3x$, $A_1 = [0,\infty)$, $B_1 = (0,2)$ eta $B_2 = \{2\}$.*

Ariketa 19. *Baldin eta $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$ eta $h(x) = \cos(x)$, adierazpenen bidez definituta dauden funtzioak badira, idatzi ondoko adierazpenak aurreko funtzioen konposaketa gisa:*

$2^{\cos(x)}$, $\cos(2^{x+\cos(x)})$, $\cos(2^x)$, $\cos(\cos(x)^2)$, $(\cos(x))^2$, $\cos(x^2)$, $2^{2\cos(x)}$, $(\cos(2^{\cos(x)}))^2$, $\cos^2(x)$, $2^{x^2+2(\cos(2^x)^2)}$.

Ariketa 20. *Idatzi* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1 + (1-x)^3\right)^{\frac{1}{3}}$ *funtzioa, lau funtzioen konposaketa gisa.*

Ariketa 21. *Aurkitu funtzio bijektibo zehatzak ondoko eremu eta koeremu artean:*

(i) $[0,1]$ *eta* $[1,2]$*;*

(ii) $(-1,1)$ *eta* $\mathbb{R}$*;*

(iii) $[0,1]$ *eta* $[0,1)$*;*

(iv) $[-1,1]$ *eta* $\mathbb{R}$.

Ariketa 22. *Frogatu ondoko* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funtzioa bijektiboa dela eta kalkulatu bere alderantzizko funtzioa:*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \textit{baldin eta} \quad x \geq 0 \\ x(2-x) & \textit{baldin eta} \quad x < 0 \end{cases}$$

Ariketa 23. *Izan bitez* $f : X \longrightarrow X$ *funtzioa eta* X *gaineko ondoko erlazio binarioa:* $x\Re y$ *baldin eta* $f(x) = y$ *bada. Frogatu:*

(i) $\Re$ *erreflexiboa dela baldin eta soilik baldin* $f = 1_X$ *bada.*

(ii) $\Re$ *simetrikoa dela baldin eta soilik baldin* $f^2 = 1_X$ *bada.*

(iii) $\Re$ *iragankorra dela baldin eta soilik baldin* $f^2 = f$ *bada.*

Ariketa 24. $\mathbb{Z}$*-n ondoko eran emanda dagoen* R *erlazioa definitzen da:* mRn *baldin eta soilik baldin* $m-n$, *3-ren multiploa bada . Esan daiteke* R *baliokidetasun erlazioa dela? Zeintzuk zenbaki osoak erlazionatuta daude* 3 *zenbakiarekin? Eta* 2013*-rekin? Eta* -11*-rekin?*

Ariketa 25. $\mathbb{Z}$*-n ondoko eran emanda dagoen* R *erlazioa definitzen da:* mRn *baldin eta soilik baldin* $m-n$ *bikoitia bada. Esan daiteke* R *baliokidetasun erlazioa dela? Zeintzuk osoak erlazionatuta daude* 2 *zenbakiarekin? Eta* 2008*-rekin? Eta* -11*-rekin?*

Ariketa 26. $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$ *espazioko puntuen multzoan ondoko* R *erlazioa definitzen da:* $(x,y,z)R(a,b,c) \iff z = c$ *bada. Deskribatu geometrikoki zeintzuk diren baliokidetasun klase guztiak.*

Ariketa 27. *X gainean definitutako ondoko erlazio binarioetatik, esan zeintzuk diren baliokidetasun erlazioak, eta baiezko kasuan, aurkitu erlazio horien adierazleen sistema oso bat (hau da, aurkitu $A \subset X$ azpimultzo bat zeinentzat, X-ko edozein elementu A-ko elementu bakar batekin erlazionatuta dagoen):*

(i) $X = \mathbb{Z}$ *eta* $x \sim y$ *edo* xRy *baldin eta soilik baldin* $x - y$ *bakoitia bada;*

(ii) $X = \mathbb{Z}$ *eta* $x \sim y$ *baldin eta soilik baldin* $x^2 + x = y^2 + y$ *bada;*

(iii) $X = \mathbb{Z}$ *eta* $x \sim y$ *baldin eta soilik baldin* $x - y \in \mathbb{Z}$ *bada;*

(iv) *d)* $X = \mathbb{R}$ *eta* $x \sim y$ *baldin eta soilik baldin* $xy \leq 0$ *bada;*

(v) $X = \mathbb{R}$ *eta* $x \sim y$ *baldin eta soilik baldin* $xy > 0$ *bada.*

Ariketa 28. $X = \{1, 2, 3\}$ *multzoaren gainean definitu hiru erlazio binario, non horietariko bakoitzak erreflexibo, simetriko eta iragankorretatik bi propietate baino ez dituen betetzen. (Honekin, hiru propietateak horiek independenteak direla frogatzen da.)*