ARIKETA EBATZIAK. 1 GAIA: LENGOAIA MATEMATIKOA

Ariketa 1. *Baldin eta S zenbaki lehenen multzoa bada, frogatu S multzo infinitua dela. ($p \Longrightarrow q$).*

Demagun aurreko emaitza ez dela egia, hau da, demagun S, zenbaki lehenen multzoa dela eta multzo hori finitua dela. ($p \wedge \urcorner q$). Jar dezagun $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. S multzo finitua denez, S-ko zenbaki lehen guztien biderkadura $p_1, p_2, \ldots, p_k$ kalkula daiteke, eta $b = (p_1.p_2 \ldots p_k) + 1$ zenbakia eraiki daiteke ere. Orduan, existitzen da p' zenbaki lehen bat, b zenbakia zatitzen duena. (r). Nola p' zenbaki lehena den, eta S multzoa zenbaki lehen guztietaz osatuta dagoenez, p', S multzo barne dagoela ondorioztatzen da. Bestalde, S-ko zenbaki lehen batek ere ez du b zatitzen. Ondorioz, p'-k ez du b zenbakia zatitzen. ($\urcorner r$).

Beraz, kontraesan batetara heldu gara ($r \wedge \urcorner r$), zeren eta S multzoa ez dela infinitua ezartzen duen hipotesiarekin, kontraesan batetara heltzen gara, alegia, $(p \wedge \urcorner q) \Longrightarrow (r \wedge \urcorner r)$, faltsua dena.

Orduan, baldin eta S zenbaki lehenen multzoa bada, derrigorrez S multzo infinitua da.

Ariketa 2. *Izan bitez p proposizioa: n, zenbaki osoa 6 eta 4-gatik zatigarria da, eta q proposizioa: n, zenbaki osoa 24-gatik zatigarria da. Egia al da p-k q ondorioztatzen duela?*

Ez, zeren eta adibidez, 12 zenbakiak, aldi berean p eta $\urcorner q$ egiak direla adierazten du, 12 zenbakia 6 eta 4-gatik zatigarria delako, baina ez da zatigarria 24-gatik. Beraz, p-k ez du q ondorioztatzen.

Ariketa 3. *Frogatu ondoko baieztapena:*

$$\forall n, 2^n \leq 2^{n+1}$$

(i) Oinarrizko pausua. Lehenengo eta behin, ohartu $p(1)$ egia dela: $2^1 \leq 2^{1+1}$, zeren eta $2^1 = 2$, $2^{1+1} = 4$, eta $2 \leq 4$ dira.

(ii) Indukziozko pausua. Frogatu $\forall k[p(k) \Longrightarrow p(k+1)]$. Demagun $p(k)$ egia dela, hau da, demagun $2^k \leq 2^{k+1}$ egia dela (hipotesia). Froga dezagun orain $p(k+1)$ dela, hau da, froga dezagun $2^{k+1} \leq 2^{k+1+1} = 2^{k+2}$ dela. Horretarako, gure hipotesiaren desberdintzaren alde biak 2 zenbakiagatik biderkatzen ditugu, eta $2^k.2 \leq 2^{k+1}.2$ lortzen dugu, hau da, $2^{k+1} \leq 2^{k+2}$, nahi genuen bezala.