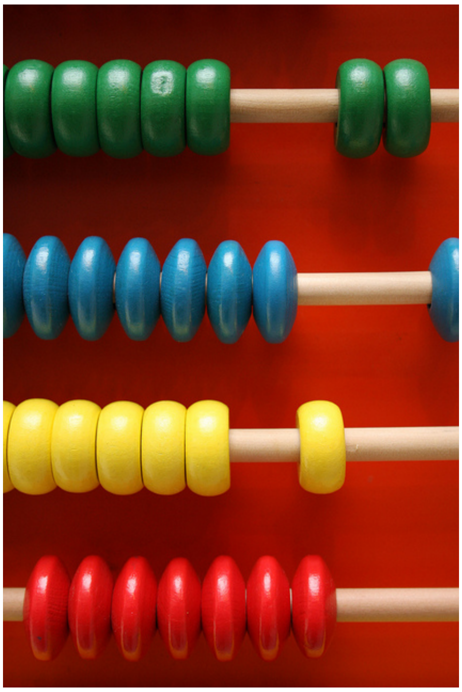
MATEMATIKARAKO SARRERA

OCW 2015



Mathieu Jarry iturria: Flickr CC-BY-NC-ND-2.0
https://www.flickr.com/photos/impactmatt/4581758027

Leire Legarreta Solaguren
EHU-ko Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Matematika Saila

7 GAIA: ZENBAKI KONPLEXUAK

Eragiketak zenbaki konplexuekin. Konjokazioa. Era polarra. Erroen bilaketa eta unitatearen erroak. Aljebrako oinarrizko teorema.

Jakina da $x^2 + 1 = 0$ ekuazioak ez dituela erro errealik. Baldin eta i ikurraren bidez denotatzen badugu $i^2 = -1$ erlazioa betetzen duen zenbakia, definizioz *zenbaki konplexua* deitzen diogu $z = a+ib$ adierazpenari, non $a, b \in \mathbb{R}$ izanik, $a = \mathrm{Re}(z)$, z zenbaki konplexuaren *alde erreala*, eta $b = \mathrm{Im}(z)$, z zenbaki konplexuaren *alde irudikaria* diren.

Nabaria da $a \in \mathbb{R}$ zenbaki erreala, $a = a + i0$ zenbaki konplexuarekin identifika daitekeela. Beraz, erraz konturatzen gara $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ dela. Batzutan $z = a + ib$ zenbaki konplexua (modu honi *zenbaki konplexuaren forma binomikoa* deitzen zaio), $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ bikotearekin identifika daiteke, eta horregatik *planu konplexuetaz* hitz egin daiteke.

1 Eragiketak zenbaki konplexuekin

Izan bitez $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Batuketa

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

Kenketa

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

Biderketa

Nola $i^2 = -1$ den, ondokoa ondoriozta daiteke,

$$(a + ib).(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Zatiketa

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

2 Konjokazioa

Baldin eta $z = a + ib$ zenbaki konplexua bada, bere *konjokatua* deitzen zaio ondoko zenbaki konplexuari, $\overline{z} = a-ib$. Baldin eta $|z|$ bidez, $\mathbb{R}^2$-n, koordenatuen jatorritik (a, b) puntura dagoen distantzia adierazten bada, orduan Pitagoras-en Teorema aplikatuz, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ dugu, eta hain zuzen ere, $z.\overline{z} = |z|^2$ da.

3 Era polarra

Baldin eta $z = a + ib$ bada, $0X$ ardatza eta z, koordenatuen jatorriarekin lotzen duen zuzena artean dagoen θ angeluri, z zenbaki konplexuaren *argumentua* deitzen zaio, eta $arg(a+ib)$ bidez denotatzen da. Hau da, trigonometriako oinarrizko kontzeptuak erabiliz, $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$ eta $\arg(a+ib) = \text{arctag}\frac{b}{a}$ lortzen dira, $r = |z|$ izanik.

z zenbaki konplexua ondoko eran ere idatz daiteke,

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right).$$

Ohartu argumentuaren $-\pi < \theta \leq \pi$ balio bakarra existitzen dela, eta honi $\arg(z)$ *argumentu nagusia* deitzen zaio. Gainera $a + ib = a + bi$ zenbaki konplexuaren *era polarra* deitzen zaio r_θ adierazpenari, non $r = |z|$, $a + bi$-ren modulua eta θ, $a + ib$-ren argumentua diren.

Adibidea. $3i = 3_{\pi/2}; 1 + i = (\sqrt{2})_{\pi/4}$ *eta* $-1 - i = (\sqrt{2})_{5\pi/4}$.

Teorema. ***(De Moivre.)*** *Baldin eta* $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ *eta* $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$ *badira, orduan* $z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$.

Froga 3.1.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right) =$$

$$= r_1 r_2\left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\right) =$$

$$= r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right).$$

Korolarioa. *Baldin eta* $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ *bada, orduan* $z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$ *da eta* $z^{-n} = r^{-n}\left(\cos n\theta - i\sin n\theta\right)$.

Froga 3.2. *Nahikoa da ohartzea,*

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r} \textit{ dela.}$$

Adibidea. $(2_{\pi/3})^3 = 8_\pi$, $\frac{2_{\pi/3}}{\sqrt{3}_{\pi/4}} = (\frac{2}{\sqrt{3}})_{\pi/3-\pi/4} = (\frac{2}{\sqrt{3}})_{\pi/12}$.

Adibidea. *Kalkulatu* $(-\sqrt{3}+i)^7$. *Ohartu* $z = -\sqrt{3}+i$, $z = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$ *adierazpena ere onartzen duela. Beraz,*

$$z^7 = 2^7(\cos\frac{35\pi}{6} + i\sin\frac{35\pi}{6}) = 2^7(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}) = 2^7(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1}{2}) = 2^6(\sqrt{3}-i).$$

Adibidea. *Aurkitu* $\cos(3\theta)$*-ren formula* $\cos\theta$*-ren arabera.*

Lehenengo eta behin $\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$ *ekuazioa betetzen da. Ber hiru eginez eta alde errealak eta irudikariak berdinduz, ondokoa ondorioztatzen da,* $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

4 Erroen bilaketa eta unitatearen erroak

Erraztasunagatik askotan notazio exponentzial konplexua erabiltzen da, hau da, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ adierazpena. Notazio honekin, baldin eta $z = re^{i\theta}$ bada, $\overline{z} = re^{-i\theta}$ da. Eta gainera $z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} = z_2$ da baldin eta soilik baldin $r_1 = r_2$ eta $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ badira, $k \in \mathbb{Z}$ izanik.

Adibidez, $z^3 = 1$ ekuazioa ebatzi nahi baldin badugu, ondoko deskonposaketa erabil genezake,

$$0 = z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1),$$

$1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ eta $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ erroak dituena, hau da, 1, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ eta $e^{i\frac{4\pi}{3}}$, eta horiek *unitatearen erro kubikoak* deitzen dira.

Orokorrean, z zenbaki konplexu batek $z^n = 1$ ekuazioa betetzen badu, *unitatearen n-garren erroa* deitzen zaio.

Proposizioa. *Baldin eta $n \in \mathbb{N}$ eta $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ badira, orduan unitatearen n-garren erroak $1, w, w^2, \ldots$ eta w^{n-1} dira.*

Froga 4.1. *Izan bedi $z = re^{i\theta}$ unitatearen n-garren erroetako bat. Orduan, $z^n = r^n e^{in\theta} = 1$ da, eta hemendik $r = 1$ eta $n\theta = 2k\pi$ direla ondorioztatzen da ($k \in \mathbb{Z}$ izanik). Beraz, $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ eta $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = w^k$ dira. Beraz, unitatearen n-garren erroetariko bakoitza w-ren berredura bat da. Eta alderantziz, w-ren berredura bakoitza, unitatearen n-garren erro bat da, $(w^k)^n = w^{kn} = (e^{i\frac{2\pi}{n}})^{kn} = (e^{i2\pi})^k = 1$ delako.*

Adibidea. *Unitatearen 4garren erroak, $1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}$ eta $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ dira, hain zuzen ere, $1, i, -1, -i$. Unitatearen 6garren erroak $1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, -1, e^{i\frac{4\pi}{3}}$ eta $e^{i\frac{5\pi}{3}}$ dira, eta horiek zirkulu batetan inskribituta dagoen hexagono erregular baten erpinak dira.*

Bestalde unitatearen n-garren erroak erabil daitezke edozein zenbaki konplexu baten n-garren erroak kalkulatzeko.

Adibidea. *Ebatzi $z^5 = -\sqrt{3} + i$ ekuazioa. Hau da, kalkulatu $-\sqrt{3} + i$ zenbaki konplexuaren bostgarren erroak. Idatzi $z_0 = -\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ moduan. Orduan z_0-ren bostgarren erro bat, $\alpha = 2^{\frac{1}{5}} e^{i\frac{\pi}{6}}$ izan daiteke. Baldin eta w unitatearen bostgarren erro bat bada, orduan $(\alpha.w)^5 = \alpha^5 w^5 = \alpha^5 = z_0$ da. Beraz, $\alpha.w$ baita ere z_0-ren bostgarren erro bat da. Beraz, $-\sqrt{3} + i$-ren bostgarren erroak ondokoak dira,*

$$\alpha, \alpha e^{i\frac{2\pi}{5}}, \alpha e^{i\frac{4\pi}{5}}, \alpha e^{i\frac{6\pi}{5}}, \alpha e^{i\frac{8\pi}{5}}.$$

Hain zuzen ere, z_0-ren bostgarren erroak diren bost erro daude. Baldin eta β, z_0-ren beste bostgarren erro bat bada, orduan $\beta^5 = \alpha^5 = z_0$ da, eta hemendik $\frac{\beta^5}{\alpha^5} = 1$ dugu eta honek, $\frac{\beta}{\alpha} = w$ unitatearen bostgarren erro bat dela esan nahi du, eta $\beta =$

αw adierazpena, aurreko zerrendan dagoela. Beraz, $(-\sqrt{3}+i)$-ren bostgarren erroak ondokoak dira,

$$2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{\pi}{6}}, 2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{17\pi}{30}}, 2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{29\pi}{30}}, 2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{41\pi}{30}}, 2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{53\pi}{30}}.$$

Orokorrean, aurreko metodoak esaten duena zera da: baldin eta zenbaki konplexu baten n-garren erroetariko bat β bada, beste n-garren erroak $\beta w, \beta w^2, \dots \beta w^{n-1}$ motatakoak dira, $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ izanik.

5 Aljebrako oinarrizko teorema

Ekuazio polinomiko bat, $p(x) = 0$ motatakoa da, non $p(x)$ koefiziente konplexuak dituen polinomio bat den, hau da,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{C}.$$

Teorema. *Gutxienez bat maila duen edozein ekuazio polinomikoak behintzat, erro bat du $\mathbb{C}$-n. (Ez dugu honen froga ematen.)*

Beraz, baldin eta $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, n mailako polinomioa bada, aljebrako oinarrizko teoremagatik, $p(x)$-k gutxienez erro bat du $\mathbb{C}$-n, adibidez α_1. Orduan,

$$p(x) = (x - \alpha_1)p_1(x),$$

non $p_1(x) \in \mathbb{C}[x]$, $n-1$ mailako polinomio bat den. Berriro ere aurreko teorema aplikatuz, $p_1(x)$ polinomioari, honek beste erro bat du $\mathbb{C}$-n, alegia α_2. Beraz, existitzen da $p_2(x) \in \mathbb{C}[x]$, $n-2$ mailako polinomio bat zeinentzat,

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)p_2(x).$$

Argudio hau errepika daiteke, 1 mailako polinomio bat lortu arte eta orduan ondoko faktorizazioa dugu,

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n).$$

Korolarioa. *n mailako edozein polinomio, polinomio linealetan faktorizatzen da eta zehatz mehatz n erro ditu $\mathbb{C}$-n (hauetako batzuk errepikatuak izan daitezke).*

Orain baldin $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ekuazio polinomiko errealak kontutan hartzen baditugu, hau da, $a_i \in \mathbb{R}$ izanik, orduan bere erroak ez dute zertan errealak izan behar. Baina horien erroei buruz propietate interesgarri bat ondoriozta genezake.

Baldin eta $\alpha \in \mathbb{C}$, $p(x) = 0$ ekuazioaren emaitza bada, $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ izanik, orduan $\overline{\alpha} \in \mathbb{C}$ ere $p(x)$-ren erroa da.

Froga 5.1. *Nola $\alpha \in \mathbb{C}$, $p(x) = 0$ ekuazioaren emaitza den,*

$$p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

Har dezagun α-ren konjokatua, $\overline{\alpha}$. Ikus dezagun hori ere hasierako ekuazioaren erroa dela. Lehenengo eta behin ohartu $\overline{\alpha}^n = \overline{\alpha^n}$ dela, eta nola $p(x)$-ren koefizienteak errealak diren, $\overline{a_k} = a_k$ ondorioztatzen dela. Beraz,

$$p(\overline{\alpha}) = a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\alpha} + a_0 =$$

$$a_n\overline{\alpha^n} + a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = \overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1\alpha} + a_0 = \overline{p(\alpha)} = 0.$$

Ondorioz, $p(x) = 0$ ekuazio polinomio erreal batetan, erro ez errealak binaka agertzen dira, zenbaki bat eta bere konjokatua, hain zuzen ere. Beraz,

$$p(x) = (x-\beta_1)\ldots(x-\beta_k)(x-\alpha_1)(x-\overline{\alpha_1})\ldots(x-\alpha_l)(x-\overline{\alpha_l}), \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R} \textit{ izanik}$$

Ohartu orain,

$$(x-\alpha_i)(x-\overline{\alpha_i}) = x^2 - (\alpha_i + \overline{\alpha_i})x + \alpha_i\overline{\alpha_i},$$

koefiziente errealak dituen kuadratiko bat dela.