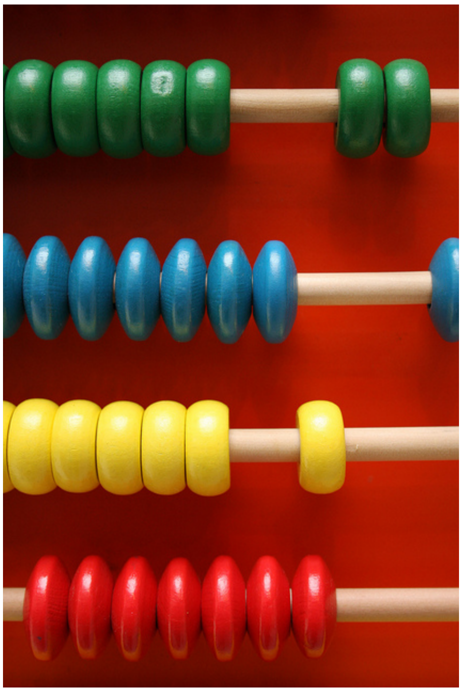
MATEMATIKARAKO SARRERA

OCW 2015



Leire Legarreta Solaguren
EHU-ko Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Matematika Saila

3 GAIA: KONBINATORIA

Printzipio batukorra eta biderkakorra. Konbinazioak eta permutazioak. Pascalen hirukia, Newtonen binomioa.

1 Historia pixka bat

Konbinatoriaren sorrera eta garapena, matematikako beste adar batzuen, hain zuzen ere, Aljebra, Zenbakizko teoria eta Probabilitatearen garapenekin batera joan dira. Aintzinatik matematikarien arreta deitu izan duten konbinatoriako problemak existitu dira; adibidez, karratu magikoen problema edo, zein zenbakitaz osatuta dagoen edozein zutabe, lerro edo diagonal, horietan agertzen diren elementuen batura zenbaki berdina izan dadin, Kristo aurretik 2200 urteko liburu txinatar zahar batetan agertzen dira.

Bestalde $(a+b)^n$ garapeneko koefiziente osoak, koefiziente binomialak deitzen direnak, XII. mendean ezagutuak izan ziren eta Pascalen hirukia, XIII. mendean garatua izan zen.

Onar daiteke Mendebaldean Konbinatoria XVII. mendean sortu zela, Blaise Pascal eta de Pierre Fermaten lanekin, zorizko jokoen teoriari buruzkoekin. Lan horiekin, probabilitate teoriaren oinarriak osatu zituztenekin, multzo finitu bateko elementuen konbinazio kopurua zehazteko printzipioak barneratu ziren, eta hori dela eta, gaur eguneko ohiko lotura osatu zen, konbinatoria eta probabilitatearen artean.

2 Konbinatoriaren sarrera

Definizioa. *Konbinatoriak edo Analisi Konbinatorioak, modu orokorrean, elementuen bilduma batzuen propietateak eta eraikuntzak ikasten eta aztertzen ditu, kontutan harturik edo kontutan hartu gabe, elementuen kokatzeko ordena, eraikuntza lege zehatzak jarraituz.*

Oinarrizko hiru multzo daude,

(i) *Aldakuntzak*

(ii) *Permutazioak*

(iii) *Konbinazioak*

Kontaketa. Askotan beharrezkoa da kalkulatzea zenbat modu desberdinetan agertzen den, edo ager daitekeen gertaera bat. Beste batzutan, garrantzitsua da zehaztea gertaera espezifiko baten gertatzeko probabilitatea. Kasu bi horietan, pentsaera logikoan oinarritzen gara, edo kalkulu horiek sistematizatzea posible egiten dituzten metodoak ezartzen dira.

Ondoren kontaketaren printzipio biderkakorra eta batukorra azalduko ditugu:

(i) **Kontaketaren printzipio batukorra**. Izan bitez A eta B aldi berean betetzen ez diren bi gertaera. Baldin eta A gertaera a modu desberdinetan betetzen bada, eta B gertaera b modu desberdinetan gertatzen bada, A edo B gerta daitekeen modu desberdinen kopurua $a + b$ da.

(ii) **Kontaketaren printzipio biderkakorra**. Baldin eta A gertaera bat a modu desberdinetan gertatzen bada eta independenteki, bigarren B gertaera, b modu desberdinetan gertatzen bada, orduan A eta B gerta daitezkeen modu desberdinen kopurua ab da.

Adibidea. *Demagun seinaleztapen* 6 *bandera ditugula, bi gorri, bi berde eta bi urdin, hain zuzen ere. Zenbat seinale desberdin egin daitezke bat edo bi banderekin, aldi berean?*

Emaitza. *Denota ditzagun bandera gorriak, berdeak eta urdinak,* G, B *eta* U *ikurren bidez, hurrenez hurren. Argi dago bandera bakar batekin* 3 *seinale desberdin baino ezin daitezkeela egin.*

$$G, B, U$$

Bi banderekin aldi berean (adibidez, lehenengo, bandera bat aterata eta gero bestea) ondoko seinaleak egin daitezke:

$$GG, GB, GU, BG, BB, BU, UG, UB, UU$$

Hau da, baldin eta bi bandera erabiltzen badira, 9 *seinale desberdin egin daitezke. Beraz, bandera batekin edo bi banderekin,* $3 + 9 = 12$ *seinale desberdin egin daitezke. Aurreko definizioan ezartzen den moduan, ohartu* A *eta* B *bi gertaera daudela, ondoko eran definiturik:* A *'Bandera bakar batekin egiten dira seinaleak" eta* B *"Bi bandereekin egiten dira seinaleak", eta argi dago* A *eta* B *gertaera biak ezin daitezkeela aldi berean bete, zeren eta bandera bakar batekin seinaleak egitea erabakitzen bada, bigarren aukera alboratzen da, eta alderantziz.*

Adibidea. *Zenbat futboleko kiniela desberdin egin daitezke? Kontutan hartzen dugu partidu bakoitzean* 3 *emaitza posible eman daitezkeela:* $1, X$ *edo* 2*;* 14 *partidu daudela eta partidu bakoitzaren emaitza besteen independentea dela. Beraz, kiniela betetzeko ditugun aukera kopurua* $3.3.\dots\dots 3 = 3^{14}$ *da.*

2.1 Aldakuntzak

I) **n *ordenako aldakuntzak***

Izan bedi $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, m elementutako multzoa. **n ordenako aldakuntzak** deitzen dira, bakoitzean E multzoko n elementuekin egin daitezkeen azpimultzo posible guztien kopurua, non azpimultzo bat beste batengandik desberdina da, elementuren bat desberdina bada, edo kokatzeko ordena desberdina baldin badute.

Notazioa: $V_{m,n} =$ n-ka hartutako m elementuen aldakuntzak.

Honela kalkulatzen dira: $V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$ (ohartu n biderkagai agertzen dirella).

Kalkulu hori diagrama batekin argudiatuz egin daiteke, zuhaitzaren diagrama deitzen dena, ondoko eran: lehenengo elementua, hasierako E multzoko m elementuetatik edozein izan daiteke. Aurreko aukera bakoitzarentzat, bigarren elementua, gertatzen diren $m-1$ elementuetatik edozein izan daiteke. Modu berdinean, honetariko aukera bakoitzarentzat, hirugarren elementua $m-2$ elementu artean aukera daiteke, eta honela, hurrenez hurren, azkeneko, n-garren elementurako, zeinentzat aurretik $n-1$ elementu aukeratuak izan diren, geratzen diren $m-(n-1)$ elementuetatik baino ezin daiteke aukeratu.

Adibideak. (i) *52 pertsonek, 60 pertsona onar ditzakeen autobus bat (gidaria barne) alokatzen dute. Zenbat modu desberdinetan koka daitezke 52 pertsona, gidaria, horietako 52 pertsonetariko bat baldin bada? $V_{59,51} = 59.58\ldots 9$. (Gidariaren jesarlekua, dauden 60 jesarlekuetariko bat da eta nola gidaria, dauden 52 pertsonetariko bat den, 51 pertsona geratzen dira kokatzeko, libre geratzen diren 59 jesarleku artean.)*

(ii) *Zenbat bi zifra desberdinetako zenbaki desberdin eraiki daitezke $5, 7$ eta 9 digituak erabiliz? Zuhaitzaren diagramaren bidez argudiatzen baldin badugu, 3 aukera ditugu lehenengoko zifrarentzat, eta horietariko bakoitzarentzat bi aukera bigarren zifrarentzat. Guztiz, $3.2 = 6$ aukera.*

(iii) *Gaztelako alfabetoarekin (25 hizki), zenbat 6 hizki desberdinetako hitz (zentzua dutenak edo zentzu gabekoak) lor daitezke? $V_{25,6}$. Honetariko, zenbat hasten dira bokal bategatik? $5V_{24,5}$.*

II) ***Aldakuntzak errepikapenarekin***

Elementuak errepika daitezkeen aldakuntzak dira. $VR_{m,n}$ bidez denotatzen dira, eta $VR_{m,n} = m^n$ moduan kalkulatzen dira. Zuhaitzetako diagramaren argudio ondokoa izango litzateke: lehenengo elementua, hasierako E multzoko edozein m elementuetariko bat izan daiteke. Aurreko aukera bakoitzagatik, bigarren elementua izan daiteke ere, hasierako edozein m elementuetariko bat (elementuak errepika daitezkeelako), eta honela, hurrenez hurren, azkeneko elementua ere (n-garren elementua), edozein E multzoko m elementuetariko bat izan daiteke.

Kasu honetan gerta daiteke, m elementu kopurua, errepikatzen diren n beste alditan baino txikiagoa izatea.

Adibideak. *(a) 1-etik 9 bitarteko zifreekin (biak barne), zenbat 3 zifretako zenbaki desberdin osa daitezke? $VR_{9,3} = 9^3$.*

(b) 3 txanponen jaurtiketan, zenbat emaitza posible ditugu?

b1) **Zuzenean aldakuntzak erabiliz***: 3 elementutako azpimultzoak osatu behar ditugu, ditugun bi elementuekin (aurpegia eta gurutzea), jakinda elementuak errepika daitezkeela, eta jakinda ere ordena aldatu ez gero emaitza desberdin bat lortzen dela. Beraz, 3-naka harturik 2 elementuko errepikapeneko aldakuntzak dira, hau da, $VR_{2,3} = 2^3 = 8$.*

b2) **Zuhaitzeko diagrama erabiliz***: Pentsa dezagun txanpon bakoitzarekin ditugun aukerak, aurreko txanponaren aukeraren araberan. Aukera guztiak idatziko ditugu:*

$$\{(a,a,a),(a,a,g),(a,g,a),(a,g,g),(g,a,a),(g,a,g),(g,g,a),(g,g,g)\},$$

guztiz $2.2.2 = 8$ aukera.

2.2 Permutazioak

I) **m *elementutako permutazioak***

Izan bedi $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, m elementutako multzoa. **E-ren permutazioak** deitzen zaie, m elementuekin egin daitezkeen ordenaketa desberdin posible guztiei.

Notazioa: $P_m =$ m elementutako permutazioak.

Kalkulatzen modua: $P_m = m!$

(Gogora dezagun, $m!$, m-ren faktoriala dela eta ondoko biderketaren bidez kalkulatzen dela: $m! = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1$)

Zuhaitzaren diagramaren bidez ere argudio daiteke: lehenengo elementua, hasierako edozein E multzoko m elementuetariko bat izan daiteke; bigarren elementuarentzat, $m-1$ elementu aukeratzeko baino ez dira geratzen; hirugarrenentzako $m-2$, etabar; $m-1$. postua okupatzen duen elementuarentzako bi elementu artean aukeratzeko baino ez da geratzen, eta m. postua okupatzen duen elementuarentzako, aukera bakar bat gelditzen da. Beraz, ordenaketa posibleen kopurua, $m(m-1)(m-2)\ldots.2.1$ da, eta hori definizioz $m!$ da.

Adibideak. (i) *Zenbat* 5 *zifra desberdinetako zenbaki osa daitezke* $1, 2, 3, 4$ *eta* 5 *digituekin?* $P_5 = 5! = 120$.

(ii) *Zenbat* 4 *zifra desberdinetako zenbaki osa daitezke* $0, 1, 2$ *eta* 3 *digituekin?* $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18$. *(*$P_3$ *zenbakia kentzen dugu, zeroz hasten diren zenbakiak baztertzeko, zenbaki horiek ez dituztelako lau zifra.)*

(iii) *Zenbat modu desberdinetan jesar daitezke* 7 *pertsona banku batetan?* $P_7 = 7!$.

II) ***Permutazioak errepikapenarekin***

Izan bedi $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ multzoa. Har ditzagun k_1 elementu a_1-ren berdinak, k_2 elementu a_2-ren berdinak,....., k_k elementu a_k-ren berdinak, $k_1 + k_2 + \cdots + k_k = m$ delarik. Orduan, m elementu horiekin egin daitezkeen ordenaketa posible desberdin guztiak, non horietariko bat k_1 aldiz agertzen den, beste bat k_2 aldiz, eta ondoz ondoren, beste bat k_k aldiz, ondokoa da:

$$PR_m^{k_1, k_2, \ldots, k_k} = \frac{m!}{k_1! k_2! \ldots k_k!}$$

Adibideak. (i) *Koadernaketa erreferentzia izanik, zenbat modu desberdinetan koka daitezke* 30 *liburu, honetariko* 10 *larruan egonik,* 9 *oihalean,* 6 *kartoian eta* 5 *paper-azalez?* $P_{30}^{10,9,6,5} = \frac{30!}{10!9!6!5!}$.

(ii) *Zenbat zenbaki* 6 *zifratakoak osa daitezke, baldin eta horietan beti badago bat* 1*, bi* 2 *eta hiru* 3*?* $P_6^{1,2,3} = \frac{6!}{1!2!3!} = 60$.

2.3 Konbinazioak eta zenbaki konbinatorioak

I) ***n ordenako konbinazioak***

Izan bedi $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ multzoa. **n ordenako konbinazioak** deitzen zaie, E multzoko n elementu dituzten azpimultzo guztien kopuruari, non azpimultzo bat beste baten desberdina den, elementu batetan behintzat desberdina baldin bada.

Notazioa: $C_{m,n} =$ m elementutako konbinazioak n-naka hartuta.

Honela kalkulatzen dira:

$$C_{m,n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Gainera, $C_{m,n} P_n = V_{m,n}$ da.

Erraz ondoriozta dezakegu azken adierazpen hori, zeren eta m tamainuko multzo batetik, bilatzen ari garen n elementutako azpimultzo bakoitzarentzat, ordenaketa posible guztiak kontutan hartzen baldin baditugu, orduan, ordena kontutan harturik, m elementurekin lor genitzakeen n tamainuko azpimultzoen kopuruaren berdina da, hau da, m elementu horiekin n-naka harturik lor daitezkeen aldakuntza guztiak. Beraz, $C_{m,n}P_n = V_{m,n}$ da.

Orduan,

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} =$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))(m-n)!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Aurreko adierazpenari **m-ren n gaineko zenbaki konbinatorioa** deitzen zaio eta $\binom{m}{n}$ bidez adierazten da. Hau da,

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

Adibideak. (i) *Zenbat biderketa desberdin egin daitezke* 3 *zenbakitik* 17 *zenbaki bitartera dauden zenbaki arruntekin, horiek barne,* 4*-naka biderkatuz eta bat ere errepika gabe?*

Ditugun 15 *zenbakien artean* 4 *aukeratu behar dira (*3*-tik* 17*-ra* 15 *zifra daudelako), eta biderketa trukakorra denez, ez dugu kontutan hartzen aukeratutako biderkagaien kokatzeko ordena:*

$$C_{15,4} = \binom{15}{4} = \frac{15.14.13.12}{4.3.2} = 1365$$

(ii) *Zenbat apustu posible egin daitezke Primitiba loterian laukian agertzen diren* 49 *zenbakien artean* 6 *zenbaki markatuz?*

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = 13983816$$

(iii) *Lan iragarki bati erantzunez, administratibo hiru lanpostu betetzeko* 12 *pertsona aurkezten dira. Zenbat pertsonazko multzo desberdin aukera daitezke?*

12 *pertsonen artean* 3*-nako multzoak aukeratu behar dira, ordenak inporta gabe.*

$$C_{12,3} = \binom{12}{3} = \frac{12!}{9!3!} = 220$$

(iv) *Zenbat hiruki desberdin osa daitezke planuan, planuko* 8 *punturekin, baldin eta horietariko hiru puntu ez badaude inoiz lerro berdinean?*

Bi hiruki desberdinak izateko, behintzat erpin bat desberdina izan behar dute. Bestalde, kasu honetan hartzen ditugun erpinen ordenak ez du eraginik aukeraketan. Beraz,

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

II) ***Konbinazioak errepikapenekin.*** Elementuak errepika daitezkeen konbinazioak dira.

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n}.$$

Adibideak. *(a) Aurreko (i) adibidea errepikapenarekin. ($m = 15$ eta $n = 4$). Hauek dira, $CR_{15,4} = \binom{18}{4} = \frac{18!}{14!4!} = 3060$.*

(b) Zenbat multzo hiru hizkiekin osa daitezke a, b, c, d, e, f, g hizkiekin, multzo bakoitzean berdina den hizki bat, baten baino gehiagotan ager badaiteke?

Kontutan hartu adibidez, $\{a, b, c\}$ eta $\{b, c, a\}$ multzoak berdinak direla, eta elementuak errepika daitezkeela, hau da, $\{a, a, b\}$ hiru hizkitako multzo gisa kontsidera daitekeela. Orduan $CR_{7,3} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{6!3!} = 84$ aukera daude.

III) ***Zenbaki konbinatorioaren propietateak***

(i) $0! = 1$

(ii) Baldin eta $m < n$ bada, orduan $C_{m,n} = \binom{m}{n} = 0$

(iii) $\binom{m}{0} = 1$

(iv) $\binom{m}{1} = m$

(v) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

(vi) $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$

Zenbaki konbinatorioaren definizioaren ondorio gisa, **Newtonen binomioaren** garapena lortzen da.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k,$$

edozein n zenbaki arruntarentzat.

Baita ere aurreko propietateetatik, **Tartagliaren hirukia** lortzen da.

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5} \\
\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6},
\end{array}$$

ondokoaren baliokidea dena,

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}$$