Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

EKONOMIA ETA ENPRESA ZIENTZIEN FAKULTATEA

MATEMATIKA AKTUARIALA: SARRERA

Ana Herrera Cabezón
Aitor Barañano Abasolo

EKONOMIA ETA ENPRESA ZIENTZIEN FAKULTATEA

MATEMATIKA AKTUARIALA: SARRERA

Ana Herrera Cabezón
Aitor Barañano Abasolo

INDIZEA

1. GAIA

1. SARRERA

Biziarteko errenta baloratzeko beharrarengatik eta haren garapena sustatzeko oinarrizko erramintak aurkitzen direnean sortu zen. Erabilitako erramintak honako hauek dira:

- Interes konposatua
- Probabilitate teoriak
- Hilkortasun taulak

Definizio zehatz bat bilatzen badugu, honako hau aurkituko dugu: matematika aktuariala gizarte eta ekonomi irizpideak erabilita eta erraminta matematiko eta estadistikoak erabilita, bai aseguru eragiketa batean parte hartzen duten partaide guztien kompromesuak eta haiengatik emandako ondorioak eta baita aseguru erakundearen erabakiek eraginako arazoen iragarpenaren bidez eredu matematikoen eraikuntza eta aplikazioaren balorapena ikertzen duen zientzia da.

Matematika aktuarialaren objetu materiala, eragiketa aktuarialak osatzen dituzte, aurreikuspen edo aseguru eragiketak ere deituak gizarte-ekonomi ingurune batean garatzen direnak eta aseguru agentzia batek egindakoak eta haren helburua arriskuen aurrean estaldura ekonomiko bat ematea da.

Haren objetu formala, eragiketa aktuarialen ezaguera zientifiko, kuantitatiboa osatzen dute probabilitate teoria eta matematika ereduak erabilita.

Eragiketa aktuarial bat osatzen duten elementuak honako hauek dira:

- Gertaerak: ustekabeko gertaerak, ez direnak benetakoak, ausazkoak kontsidera dezakegunak. Prima eta dirulaguntzen ordainketa baldintzatzen dute.

- Ekonomi balioak: Eragiketa aktuarialen elementu erreal edo materiala osatzen dute. Gertaerei baldintzatutako kapitalak dira eta denbora tarte derberdinetan eskudiru bihurtzen dira.

- Subjektuak: Eragiketa akturialen elementu pertsonalak osatzen dute. Honako hauek dira: aseguru konpainia, aseguruduna, aseguru izenpetzailea eta onuraduna.

- Denbora: arriskua estaltzen den denbora tarteari erreferentzia egiten dio. Unitatea osatzen duen espazio baten multiplo edo submultiploei egiten dio erreferentzia.

Matematika aktuariala banatzen dugu honako hiru alderditan:

- matematika aktuariala: bizitza.
  Denbora luzerako operazioak dira eta prestazioaren diru kopurua aldez aurretik dakigu, gainera gertakizunaren balorakuntza subjetiboa egiten da eta prestazioaren ordainketari dagokion gertakizuna ez da beti gaitz bat.

- matematika aktuariala: ez dena bizitza
  Denbora laburreko eragiketak dira eta prestazioaren diru kopurua ezezaguna da, honetik aparte, istripuen kopurua baita ezezaguna da eta prestazioaren diru kopurua egindako kaltearen balorakuntza objetibo bat da.

- egonkortasun eta kaudimenaren matematika aktuariala
  Kontuan izan behar dugu matematika aktuariala zientzia bezala, beste zientzia batzuekin ere erlazio estua duela, hala nola: objetu material bera duten zientziak, zientzia ekonomikoak, tresnak ematen dioten zientziak edota informatika.

Gu matematika aktuariala, bizitzan, zentratuko gara eta bertan honako prestazioak ematen dira: biziraupenerako aseguruak, heriotzarako aseguruak edota aseguru mixtoak. Baina aipatu behar dugu aurkitzen ditugula pertsonaren bizitzaren gaineko beste aseguru batzuk, ez bizitzaren alderdian barneratuta daudenak: istripuak, gaizotasunak eta heriotza.

Matematika aktuariala ondo ulertzeko lehenengo eta behin barneratuko ditugu bi kontzeptu garrantzitsu. Lehenengoa kapitalizazio aktuariala da:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n \cdot \frac{1}{{}_n p_x}$$

$$C_n = C_0 \cdot e^{\int_0^n [\rho(t)+\mu_{x+t}]dt}$$

Eta bigarrenez, aktualizazio akturiala:

$$C_0 = C_n \cdot v^n \cdot {}_n p_x$$

$$C_0 = C_n \cdot e^{-\int_0^n [\rho(t)+\mu_{x+t}]dt}$$

Bizitzaren adar honetan, Alberdi garrantzitzuenetarikoa honako hau da, kapital geroratuko asegurua. Biziraupenaren asegurua adierazten du eta zehatz mehatz esanda, kontratua egiterakoan x adina duen pertsona batek n urte barru bizirik irauten badu ordaintzeko den unitate baten gaurko balio aktuariala adierazten du:

$${}_n E_x$$

$${}_n E_x = v^n \cdot {}_n p_x$$

$\rho(t) = \delta$

${}_nE_x = e^{-\int_0^n [\delta + \mu_{x+t}]dt}$

${}_nE_x = E_x \cdot E_{x+1} \cdot E_{x+2} \cdot - \cdot E_{x+n-1}$

${}_nE_x = {}_tE_x \cdot {}_{n-t}E_{x+t}$

Konmutazio sinboloetan adierazita:

$D_x = l_x v^x$

$${}_nE_x = \frac{v^{x+n}}{v^x} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

2. GAIA

2. ERRENTA KONSTANTEAK

2.1. URTEKO ERRENTAK

Errenta bat ordainketa segida bat da zeinetan zenbatekoa aldizka asetzen den bai denbora tarte zehatz batean edota denbora tarte zehaztugabe batean. Ez dagoenean lotua ausazko gertaera bati egiazko errenta deitzen zaio eta lotua dagoenean errenta kontingentea, ausazkoa edo aktuariala deitzen zaio.

Errenta aktuarialak honako hauetan sailkatzen dira:
- Konstanteak edo aldakorrak
- Urtekoak edo zatikiarra
- Aurrez ordaindutakoa edo ondoren ordaindutakoa
- Berehalakoa edo geroratua
- denborazkoa edo mugarik gabekoa (bizitza osorako)

Eta egin daitezkeen konbinazio guztiak errenta posible batzuk izango dira.

2.1.1. GAURKO BALIO AKTUARIALA

Ezarriko dugu urteroko errenta unitario baten gaurko balio aktuariala kalkulatzen lagunduko digun adierazpena. Horretarako erabiltzen dugu aktualizazio aktuarial faktorea.

Hasiiko gara Alberdi diskretuan, <u>mugarik gabeko berehalako errenta</u> baten gaurko balio aktuarialaren

Ondoren ordaindutakoa,

$$a_x = E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_x$$

Aldez aurretik ordaindutakoa,

$$\ddot{a}_x = 1 + E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x$$

<u>Mugarik gabeko eta Geraratutakoerrenta</u>

Ondoren ordaindutakoa,

$${}_{d/}a_x = {}_{d+1}E_x + {}_{d+2}E_x + {}_{d+3}E_x + \ldots = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{d+t}E_x$$

$$ {}_{d/}a_x = {}_dE_x\, a_{x+d} $$

Aldez aurretik ordaindutakoa,

$$ {}_{d/}\ddot{a}_x = {}_dE_x + {}_{d+1}E_x + {}_{d+2}E_x + \ldots = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{d+t}E_x $$

$$ {}_{d/}\ddot{a}_x = {}_dE_x\, \ddot{a}_{x+d} $$

<u>Berehalako eta denborazko errenta</u>

Ondoren ordaindutakoa,

$$ a_{x:\overline{n}|} = E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots + {}_nE_x = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x $$

Aldez aurretik ordaindutakoa,

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + E_x + {}_2E_x + \ldots + {}_{n-1}E_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x $$

<u>Geroratutako eta denborazko errenta</u>

Ondoren ordaindutakoa,

$$ {}_{d/}a_{x:\overline{n}|} = {}_{d+1}E_x + {}_{d+2}E_x + {}_{d+3}E_x + \ldots + {}_{d+n}E_x = \sum_{t=1}^{n} {}_{d+t}E_x $$

$$ {}_{d/}a_{x:\overline{n}|} = {}_dE_x\, a_{x+d:\overline{n}|} $$

Aldez aurretik ordaindutakoa,

$$ {}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_dE_x + {}_{d+1}E_x + {}_{d+2}E_x + \ldots + {}_{d+n-1}E_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{d+t}E_x $$

$$ {}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_dE_x\, \ddot{a}_{x+d:\overline{n}|} $$

<u>**Aldez aurretik eta ondoren ordaindutako errenten arteko erlazioa**</u>

$$ \ddot{a}_x = 1 + a_x $$

$$ {}_{d/}\ddot{a}_x = {}_dE_x + {}_{d/}a_x $$

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x $$

$$ {}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_dE_x + {}_{d/}a_{x:\overline{n}|} - {}_{d+n}E_x $$

<u>Konmutazio sinboloak</u>

Jakinda $\mathrm{D}_x = v^x l_x$ eta $\mathrm{N}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \mathrm{D}_{x+t}$ dela, adieraz dezakegu konstate eta urteko errenta ezberdinen gaurko balio aktuarialen expresioa honela:

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t E_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t E_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_t E_x = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t E_x = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$${}_{d/}a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{d+t} E_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{x+d+t}}{D_x} = \frac{N_{x+d+1}}{D_x}$$

$${}_{d/}\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{d+t} E_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_{x+d+t}}{D_x} = \frac{N_{x+d}}{D_x}$$

$${}_{d/}a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{d+t} E_x = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x+d+t}}{D_x} = \frac{N_{x+d+1} - N_{x+d+n+1}}{D_x}$$

$${}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{d+t} E_x = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x+d+t}}{D_x} = \frac{N_{x+d} - N_{x+d+n}}{D_x}$$

<u>Errenta aktuarialak, errenta finanzieroen menpe adierazita</u>

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t/}q_x a_{\overline{t}|i}$$
$$\ddot{a}_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t-1/}q_x \ddot{a}_{\overline{t}|i}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n-1} {}_{t/}q_x a_{\overline{t}|} + {}_n p_x a_{\overline{n}|i}$$
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n-1} {}_{t-1/}q_x \ddot{a}_{\overline{t}|} + {}_{n-1}p_x \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

$${}_{d/}a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{d+t/}q_x \, {}_{d/}a_{\overline{t}|i}$$
$${}_{d/}\ddot{a}_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{d+t-1/}q_x \, {}_{d/}\ddot{a}_{\overline{t}|i}$$

$${}_{d/}a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n-1} {}_{d+t/}q_x \, {}_{d/}a_{\overline{t}|i} + {}_{d+n}p_x \, {}_{d/}a_{\overline{n}|i}$$
$${}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n-1} {}_{d+t-1/}q_x \, {}_{d/}\ddot{a}_{\overline{t}|i} + {}_{d+n-1}p_x \, {}_{d/}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

2.1.2. AMAIERAKO BALIO AKTUARIALA

Errenta aktuariala amaitzen den unean daukan balio lortzea da helburu, eta horretarako erabiliko dugu kapitalizazio aktuarialaren faktorea. Kasun honetan bakarrik lan egingo dugu denborazko errentekin.

Hasiko gara $x+n$ adinean, eremu diskretuan, <u>berehalako eta denborazko errenta</u> baten amaierako balio aktuarialarekin ,

Ondoren ordaindutakoa,

$$s_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{n-1}E_{x+1}} + \frac{1}{{}_{n-2}E_{x+2}} + \frac{1}{{}_{n-3}E_{x+3}} + \ldots + \frac{1}{E_{x+n-1}} + 1$$

${}_nE_x$ izendatzaile bezala hartzen badugu, ondorengo erlaziora iritziko gara,

$$s_{x:\overline{n}|} = \frac{a_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x}$$

Aldez aurretik ordaindutako,

$${}_{/n}\ddot{s}_x = \frac{1}{{}_nE_x} + \frac{1}{{}_{n-1}E_{x+1}} + \frac{1}{{}_{n-2}E_{x+2}} + \ldots + \frac{1}{E_{x+n-1}}$$

<u>Geroratutako eta denborazko errenta,</u> orduan emen amaierako balio aktuariala $x+d+n$ adinean izango da
Ondoren ordaindutakoa,

$${}_{d/}s_{x:\overline{n}|} = s_{x+d:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{n-1}E_{x+d+1}} + \frac{1}{{}_{n-2}E_{x+d+2}} + \ldots + \frac{1}{E_{x+d+n-1}} + 1$$

r ${}_nE_{x+d}$ izendatzaile komun bezala hartuta, ondorengo expresioa lortzen dugu gaurko balio aktuarialetan adierazita,

$${}_{d/}s_{x:\overline{n}|} = s_{x+d:\overline{n}|} = \frac{{}_{d/}a_{x:\overline{n}|}}{{}_{d+n}E_x}$$

Aldez aurretik ordaindutakoa,

$${}_{d/}\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \ddot{s}_{x+d:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_nE_{x+d}} + \frac{1}{{}_{n-1}E_{x+d+1}} + \ldots + \frac{1}{E_{x+d+n-1}} = \frac{{}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_{d+n}E_x}$$

2.2. ERRENTA ZATIKIARRAK

2.2.1. GAURKO BALIO AKTUARIALA, URTEKO ERRENTETAN ADIERAZITA

Atal honetan kalkulatuko dugu gaurko balio aktuariala errenta batzuetan zeintzuk, urteko terminoa zatikatzen den hainbeste partetan unitatea osatzen duen denbora tartea banatu den zatietan.

Kontsideratzen badugu <u>mugarik gabeko eta berehalako errenta</u> bat, zein haren urteko zenbatekoa moneta unitate bat den, eta m zatitan banatzen badugu, amaitze epe bakoitzean izango dugun errenta balio $\frac{1}{m}$ izango da eta haren gaurko balio aktuariala:

Ondoren ordaindutako errenta,

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\left[{}_{\frac{1}{m}}E_x + {}_{\frac{2}{m}}E_x + \ldots + {}_{\frac{m}{m}}E_x + {}_{1+\frac{1}{m}}E_x + {}_{1+\frac{2}{m}}E_x + \ldots + {}_{1+\frac{m}{m}}E_x + {}_{2+\frac{1}{m}}E_x + \ldots \right]$$
$$= \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x$$

Aldez aurretik ordaindutakoa,

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\left[1 + {}_{\frac{1}{m}}E_x + {}_{\frac{2}{m}}E_x + \ldots + {}_{\frac{m-1}{m}}E_x + E_x + {}_{1+\frac{1}{m}}E_x + {}_{1+\frac{2}{m}}E_x + \ldots + {}_{1+\frac{m-1}{m}}E_x + {}_2E_x + \ldots \right]$$
$$= \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x$$

Orain adieraziko dugu errenta zatikiarren gaurko balio aktuarialaren espresioa urteko errenten terminoetan, interpolazio lineala erabilita:

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\left[{}_tE_x(1-\tfrac{k}{m}) + {}_{t+1}E_x \tfrac{k}{m} \right]$$
$$= \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x\left(m - \frac{1+m}{2m}m\right) + \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty} {}_{t+1}E_x \frac{1+m}{2m}m$$

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x \frac{m-1}{2m} + a_x \frac{m+1}{2m} = a_x + \frac{m-1}{2m}$$

Prosezu bera jarraituz, aldez aurretik ordaindutako errente espresioa honako hau da:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x \frac{m+1}{2m} + a_x \frac{m-1}{2m} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

Era berean lortzen ditugu ondorengo adierazpenak gaurko balio aktuarialerako.

<u>Geroratutako eta mugarik gabeko errenta</u>

Ondoren ordaindutako errenta,

$${}_{d/}a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=d}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x = {}_{d/}\ddot{a}_x \frac{m-1}{2m} + {}_{d/}a_x \frac{m+1}{2m} = {}_{d/}a_x + \frac{m-1}{2m}\,{}_dE_x$$

Aldez aurretik ordaindutakoa,

$${}_{d/}\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=d}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x = {}_{d/}\ddot{a}_x \frac{m+1}{2m} + {}_{d/}a_x \frac{m-1}{2m} = {}_{d/}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\,{}_dE_x$$

Berehalako eta denborazko errenta

Ondoren ordaindutako errenta,

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{m} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\frac{m-1}{2m} + a_{x:\overline{n}|}\frac{m+1}{2m} = a_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left[{}_nE_x - 1\right]$$

Aldez aurretik ordaindutako errenta,

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\frac{m+1}{2m} + a_{x:\overline{n}|}\frac{m-1}{2m} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}\left[{}_nE_x - 1\right]$$

Geroratutako eta denborazko errenta

Ondoren ordaindutakoa,

$$\begin{aligned} {}_{d/n}a_x^{(m)} &= \frac{1}{m}\sum_{t=d}^{d+n-1}\sum_{k=1}^{m} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x = {}_{d/n}\ddot{a}_x\frac{m-1}{2m} + {}_{d/n}a_x\frac{m+1}{2m} = \\ &= {}_{d/n}a_x - \frac{m-1}{2m}\left[{}_{d+n}E_x - {}_dE_x\right] \end{aligned}$$

Aldez aurretik ordaindutakoa,

$$\begin{aligned} {}_{d/n}\ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{m}\sum_{t=d}^{d+n-1}\sum_{k=0}^{m-1} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x = {}_{d/n}\ddot{a}_x\frac{m+1}{2m} + {}_{d/n}a_x\frac{m-1}{2m} \\ &= {}_{d/n}\ddot{a}_x + \frac{m-1}{2m}\left[{}_{d+n}E_x - {}_dE_x\right] \end{aligned}$$

Interpolaziorako erabilitako beste formula bat Woolhouse-na da,

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{nm-1} F\left(\frac{k}{m}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} F(k) + \frac{m-1}{2m}\left[F(t)\right]_0^n - \frac{m^2-1}{12m^2}\left[F'(t)\right]_0^n + \dots$$

Zeinetik lortzen dugun ondoren adierazpenak, <u>berehalako eta mugarik gabeko errentarako</u>

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x + \frac{m-1}{2m}\left[{}_tE_x\right]_0^\infty - \frac{m^2-1}{12m^2}\left[-{}_tE_x(\delta + \mu_{x+t})\right]_0^\infty$$

Geroratutako eta denborazko errentarako

$$ {}_{d/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = {}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}\left[{}_{t}E_{x}\right]_{d}^{d+n} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left[-{}_{t}E_{x}(\delta+\mu_{x+t})\right]_{d}^{d+n} $$

2.2.2. ZATIKA ORDAINDUTAKO ERRENTEN BALIOEN HANDITZEA EDO TXIKITZEAREN ANALISIA URTEKO ERRENTEKIKO:

Ondoren ordaindutako errenta , urte osoaren amaieran ordaintzetik, hilabetero ordaintzera, hau da, hilabete amanera bakoitzean ordaintzean edo hiruhilero amanera bakoitzean, o era orokorrean esanda, *m*- esimo zatitan hitzeginda, urteko errenta baten $\frac{1}{m}$ parte bat ordaintzea, urte baten $\frac{1}{m}$ zaitaren amaieran , errenta zatikiar hauetan gaurko balioen gehikuntza lortzen dugu bi arrazoi direla medio: ordainketaren aurrerapena eta hiltzen den urtean jada ordainduta jaso dituen errenta terminoak.

Kontuan hartzean errenta, aseguru urte osoaren amaieran ordaindutako errenta jasoko du urte osoan bizirik irauten duen heinean, al *k*-ésimo urtean jasotako kopuruaren gaurko balioa $v^k\,{}_kp_x$ bezala adierazten dugu. Era berean, ordainketa m zaitutan banatzen badugu, ordaintzen den lehenengo $\frac{1}{m}$ zatia, urte horretan $\frac{m-1}{m}$ aldiz aurreratu du haren ordainketa. Horrela jarraituz ordaintzen den bigarren $\frac{1}{m}$ -a aurreratu egin du haren ordainketa urteko errentarekiko $\frac{m-2}{m}$ eta horrela bestelako zatiekin.

Suposatzen badugu aseguruduna *k* urte osoan bizirik irauten duele, ${}_{k-1}p_x = 1$, eta errenta urte amaieran baloratzean lortuko dugu:

$$ \frac{1}{m}\left[r^{\frac{m-1}{m}} + r^{\frac{m-2}{m}} + \ldots + r^{\frac{1}{m}} + 1\right] = \frac{1}{m}\left[\frac{r-1}{r^{\frac{1}{m}}-1}\right] = \frac{i}{j^{(m)}} $$

Suposatzen badugu berehalako eta mugarik gabeko errenta bat, lortuku dugun balioa, urte amaiera guztien errenta terminoen balioei egokitzen zaie baina noski aseguruduna bizirik irauten duen urte osoetan. Baloratzen badugu kontratuaren hasieran, asseguraduna bizirizik iruan duen urte osoetan ordaindutako urteko errenta terminuen amaierako balioa, honako hau lortzen dugu,

$$\frac{i}{j^{(m)}}\sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_x = \frac{i}{j^{(m)}} a_x$$

Aseguraduna hiltzen den urteari dagokionez, errenta ondoren ordaindutako urteko errenta bada, ez du jasoko urte horretan dagokion errenta terminua eta zatikiarra bada jaso izan ditu $\frac{1}{m}$ terminu errentaria bizirik iraun dituuen zatien kopuru bera. Horregatik errenta jasoko du haren gaurko balioaren handikuntza bat hildako urtean jaso ditzakeen m-esimo errentei dagokionez .

Suposatzen badugu aseguraduna k urtean hiltzen dela, ${}_{k-1/}q_x = 1$, jasoko du lehenengo urte horretako $\frac{1}{m}$ errenta aseguraduna bizirik irauten badu $x+k-1+\frac{1}{m}$ adinean eta haren amaierako urteko balioa $\frac{1}{m}(1-\frac{1}{m})r^{\frac{m-1}{m}}$ da , honela adierazita : $(1-\frac{1}{m})$ izango da k urtearen lehenengo $\frac{1}{m}$ zatiaren amaieran bizizik jarraitzeko probabilitatea, urte osoan hildakoen banaketa uniformearen hipotesia jarraituz. Bigarren $\frac{1}{m}$ zatia kobratuko da pertsonak $x+k-1+\frac{2}{m}$ adinean bizirik jarraitzen badu , eta haren balioa urte amaneran honako hau izango da $\frac{1}{m}(1-\frac{2}{m})r^{\frac{m-2}{m}}$ adieraziz $(1-\frac{2}{m})$ -rekin pertsona baten k urtearen bigarren $\frac{1}{m}$ -aren amaieran bizirik irautearen probabilitatea urtean zehar hildakoen banaketa uniformearen hipotesia erabilita. Baloratzen badugu, k urtean eman daitzekeen ordainketa ezberdinak, urte horren amaieran ondorengoa lortzen dugu,

$$\frac{1}{m}\left[r^{\frac{m-1}{m}}(1-\frac{1}{m})+r^{\frac{m-2}{m}}(1-\frac{2}{m})+\ldots+r^{\frac{2}{m}}(1-\frac{m-2}{m})+r^{\frac{1}{m}}(1-\frac{m-1}{m})\right]$$

$$=\frac{1}{m^2}\left[r^{\frac{m-1}{m}}(m-1)+r^{\frac{m-2}{m}}(m-2)+\ldots+r^{\frac{2}{m}}2+r^{\frac{1}{m}}\right]$$

Biderkatuz eta zatituz honetaz $r^{\frac{1}{m}}-1$

$$\frac{1}{m^2\left(r^{\frac{1}{m}}-1\right)}\left[\left(r^{\frac{m}{m}}-r^{\frac{m-1}{m}}\right)(m-1)+\left(r^{\frac{m-1}{m}}-r^{\frac{m-2}{m}}\right)(m-2)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(r^{\frac{1}{m}}-r^{\frac{2}{m}}\right)2+\left(r^{\frac{2}{m}}-r^{\frac{1}{m}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{m^2\left(r^{\frac{1}{m}}-1\right)}\left[rm-r-r^{\frac{m-1}{m}}-r^{\frac{m-2}{m}}-\ldots-r^{\frac{2}{m}}-r^{\frac{1}{m}}\right]=\frac{r}{j^{(m)}}-\frac{r^{\frac{1}{m}}(r-1)}{\left(j^{(m)}\right)^2}$$

Adierazpen hau *k* urtean aseguradun gizabanakoa hiltzen den urtea izanda eman daitezkeen ordainketa posibleen amaierako balioari egiten dio erreferentzia. Baina kotsideratzen badugu heriotza edozein urtean gerta daitekeela kontuan izanda hilkortasun probabilitatea eta eragiketaren sorreran baloratuta, ondorengo adierazpena dugu:

$$\left[\frac{r}{j^{(m)}}-\frac{r^{\frac{1}{m}}i}{\left(j^{(m)}\right)^2}\right]\sum_{t=1}^{\infty}v^t\, {}_{t-1/}q_x=\left[\frac{r}{j^{(m)}}-\frac{r^{\frac{1}{m}}i}{\left(j^{(m)}\right)^2}\right]\left(v\ddot{a}_x-a_x\right)$$

Lortutako adierazpenetatik ondorioztatzen dugu:

$$a_x^{(m)}=\frac{i}{j^{(m)}}a_x+\left[\frac{r}{j^{(m)}}-\frac{r^{\frac{1}{m}}i}{\left(j^{(m)}\right)^2}\right]\left(v\ddot{a}_x-a_x\right)$$

$$=\frac{i-j^{(m)}v^{\frac{1}{m}}}{\left(j^{(m)}\right)^2v^{\frac{1}{m}}}a_x+\frac{j^{(m)}v^{\frac{1}{m}}-vi}{\left(j^{(m)}\right)^2v^{\frac{1}{m}}}\ddot{a}_x$$

Aldez aurretik ordaindutako errentetan, lortzen dugu berriz errentararen balorazio aktuarialaren txikitze bat errenta zatikiarra izatetik, urteroko errenta izatera, bi kausa dela medio, ordainketaren atzerapena eta aseguradunaren hilkortasun urtean jasi gabe uzten diren terminoak direla eta.

Kontsideratzen badugu *k* edozein urtea eta suposatzen badugu aseguraduna urte osoa bizirik irauten duela, aldez aurretik ordaindutako urteroko errentan, errenta terminua urte hasieran ordaintzen dela baina errenta zatikiarra bada lehenengo $\frac{1}{m}$ -a ordaintzen da *k* urte horren hasieran eta bestelako ordainketak atzeratuko dira *k* urtearen abiapuntutik. Kontsidera dezakegu beraz aldez aurretik ordaindutako zatikiar errenten balioaren gutxitzea aldez aurretik ordandutako urteko errentekiko, ordainketak jasotako atzerapena dela medio.

Aseguradunaren hildako urtean, errenta urterokoa eta aldez aurretik ordaindutakoa bada, jasoko du terminu osoa, baina errenta zatikiarra eta aldez aurretik jasotakoa bada, jasoko ditu hainbat $\frac{1}{m}$ urteko terminuen zati, bizirik iraun dituen urte zati bezala. Horregatik gaurko balio aktuarialaren errenta balio txikitze bat jasoko du, hildako urtean jaso gabe utz dezakeen errentaren *m*-garren zatiak direla eta.

Urteko errentekiko zatikiar errenten balio txikitzearen kasuak aztertuta, ondoren ordaindutako errenten prosezu antzeko bat jarraituz, ondorengo adierazpenak lortzen ditugu,

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{i r^{\frac{1}{m}}}{j^{(m)}} a_x + \left[\frac{r^{1+\frac{1}{m}}}{j^{(m)}} - \frac{r^{\frac{1}{m}} i}{(j^{(m)})^2} \right] (v\ddot{a}_x - a_x)$$

$$= \frac{i - j^{(m)}}{(j^{(m)})^2 v^{\frac{1}{m}}} a_x + \frac{j^{(m)} - vi}{(j^{(m)})^2 v^{\frac{1}{m}}} \ddot{a}_x$$

2.3. ERRENTA JARRAITUAK

Hasiko gara mugarik gabeko eta berehalako errenta baten adierazpenarekin Alberdi jarraian,

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\int_0^t [\rho(z)+\mu_{x+z}]dz} dt = \int_0^\infty {}_t\bar{E}_x dt$$

Errenta jarrai baten gaurko balio aktuariala honela defiini dezakegu: zatikazko errenta baten limitea m infinitura doanean.

Euler-Woolhouse-n formula praktikoa hartuko dugu hurbilketa handiena ematen duelako, eta ondorengoa lortzen dugu:

$$\bar{a}_x = \lim_{m\to\infty} \ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x + \frac{1}{2}\left[{}_tE_x\right]_0^\infty - \frac{1}{12}\left[-{}_tE_x(\delta + \mu_{x+t})\right]_0^\infty$$

Errenta jarraituen adierazoena errenta finantzieroen menpe

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty {}_tp_x \mu_{x+t} \bar{a}_{\overline{t|}} dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n {}_tp_x \mu_{x+t} \bar{a}_{\overline{t|}} dt + \bar{a}_{\overline{n|}}\, {}_np_x$$

$${}_{d/}\bar{a}_x = \int_d^\infty {}_tp_x \mu_{x+t}\, {}_{d/}\bar{a}_{\overline{t-d|}} dt$$

$${}_{d/n}\bar{a}_x = \int_d^{d+n} {}_tp_x \mu_{x+t}\, {}_{d/}\bar{a}_{\overline{t-d|}} dt + {}_{d/}\bar{a}_{\overline{n|}}\, {}_{d+n}p_x$$

Errenta finantzieron gaurko balio aktuarialen adierazpenetik abiatuta, eta zatitakako integrala ebatziz, egiaztatuko dugu lortzen dugula expresio geroratutako kapitaletan,

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty {}_tp_x \mu_{x+t} \bar{a}_{\overline{t|}} dt = -\int_0^\infty {}_t\bar{E}_x dt$$

3. GAIA

3. ERRENTA ALDAKORRAK

3.1. URTEKO ERRENTAK

3.1.1. PROGREZIO ARITMETIKOKO URTEKO ERRENTAK

Progrezio aritmetikoko urteko errenten artean hainbat kasu berezi jorratuko ditugu, zeren nazioarteko nomenklaturak ez ditu jasotzen sinbolorik progrezio aritmetikoko errentak adierazteko. Aztertuko ditugun errentekin adieraz daiteke edozein progrezio aritmetikoko errenta.

Increasing errenten gaurko balio aktuariala

Hasiko gara Increasing edo unitateko errentekin. Honek adierazten du handituz doan errenta, progrezio arimetikko terminu aldakorrekin zeinek haren lehenengo terminua 1 unitatea de eta handitzearen arrazoia unitatea ere. Nomenklatura aktuariala erabilita, planteatuko dugu errenta mota ezberdinen gaurko balio akturiala geroratukoa kapitalen eta urteko errenta konstanteen menpe,

$$(Ia)_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_x t = a_x + {}_{1/}a_x + {}_{2/}a_x + \ldots = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}a_x$$

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x (t+1) = \ddot{a}_x + {}_{1/}\ddot{a}_x + {}_{2/}\ddot{a}_x + \ldots = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}\ddot{a}_x$$

$$(Ia)_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x t = a_{x:\overline{n|}} + {}_{1/}a_{x:\overline{n-1|}} + {}_{2/}a_{x:\overline{n-2|}} + \ldots = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}a_{x:\overline{n-t|}}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x (t+1) = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} + {}_{1/}\ddot{a}_{x:\overline{n-1|}} + {}_{2/}\ddot{a}_{x:\overline{n-2|}} + \ldots = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}\ddot{a}_{x:\overline{n-t|}}$$

$${}_{d/}(Ia)_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{d+t}E_x t = {}_{d/}a_x + {}_{d+1/}a_x + {}_{d+2/}a_x + \ldots = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{d+t/}a_x$$

$${}_{d/}(I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{d+t}E_x (t+1) = {}_{d/}\ddot{a}_x + {}_{d+1/}\ddot{a}_x + {}_{d+2/}\ddot{a}_x + \ldots = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{d+t/}\ddot{a}_x$$

$$ {}_{d/}(Ia)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{d+t}E_x t = {}_{d/}a_{x:\overline{n}|} + {}_{d+1/}a_{x:\overline{n-1}|} + {}_{d+2/}a_{x:\overline{n-2}|} + \ldots = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{d+t/}a_{x:\overline{n-t}|} $$

$$ {}_{d/}(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{d+t}E_x (t+1) = {}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_{d+1/}\ddot{a}_{x:\overline{n-1}|} + {}_{d+2/}\ddot{a}_{x:\overline{n-2}|} + \ldots = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{d+t/}\ddot{a}_{x:\overline{n-t}|} $$

<u>aldez aurretik ordaindutako eta ondoren ordaindutako Errenta increasing-en erlazioa</u>

$$ (Ia)_x = (I\ddot{a})_x - \ddot{a}_x $$

$$ (Ia)_{x:\overline{n}|} = (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + n\, {}_nE_x $$

$$ {}_{d/}(Ia)_x = {}_{d/}(I\ddot{a})_x - {}_{d/}\ddot{a}_x $$

$$ {}_{d/}(Ia)_{x:\overline{n}|} = {}_{d/}(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} - {}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + n\, {}_{d+n}E_x $$

<u>Errenta increasing-ak konmutazio sinboloetan adierazita</u>

Increasing errentak konmutazio sinboloetan adierazteko, lehenengo eta behin ondorengo símbolo berria definituko dugu $S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t}$

$$ (Ia)_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_{x+t+1}}{D_x} = \frac{S_{x+1}}{D_x} $$

$$ (I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_{x+t}}{D_x} = \frac{S_x}{D_x} $$

$$ (Ia)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(N_{x+t+1} - N_{x+t+n-t+1})}{D_x} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - nN_{x+n+1}}{D_x} $$

$$ (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(N_{x+t} - N_{x+t+n-t})}{D_x} = \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x} $$

$$ {}_{d/}(Ia)_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_{x+d+t+1}}{D_x} = \frac{S_{x+d+1}}{D_x} $$

$$ {}_{d/}(I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_{x+d+t}}{D_x} = \frac{S_{x+d}}{D_x} $$

$$ {}_{d/}(Ia)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(N_{x+d+t+1} - N_{x+d+t+n-t+1})}{D_x} = \frac{S_{x+d+1} - S_{x+d+n+1} - nN_{x+d+n+1}}{D_x} $$

$$ {}_{d/}(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(N_{x+d+t} - N_{x+d+t+n-t})}{D_x} = \frac{S_{x+d} - S_{x+d+n} - nN_{x+d+n}}{D_x} $$

Increasing errenten amaierako balio aktuariala

$$ (Is)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{n-1}E_{x+1}} + \frac{2}{{}_{n-2}E_{x+2}} + \ldots + \frac{n-1}{E_{x+n-1}} + n = \frac{(Ia)_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x} $$

$$ (I\ddot{s})_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_nE_x} + \frac{2}{{}_{n-1}E_{x+1}} + \ldots + \frac{n-1}{{}_2E_{x+n-2}} + \frac{n}{E_{x+n-1}} = \frac{(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x} $$

$$ {}_{d/}(Is)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{n-1}E_{x+d+1}} + \frac{2}{{}_{n-2}E_{x+d+2}} + \ldots + \frac{n-1}{E_{x+d+n-1}} + n = \frac{(Ia)_{x+d:\overline{n}|}}{{}_nE_{x+d}} = \frac{{}_{d/}(Ia)_{x:\overline{n}|}}{{}_{d+n}E_x} $$

$$ {}_{d/}(I\ddot{s})_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_nE_{x+d}} + \frac{2}{{}_{n-1}E_{x+d+1}} + \ldots + \frac{n-1}{{}_2E_{x+d+n-2}} + \frac{n}{E_{x+d+n-1}} = \frac{(I\ddot{a})_{x+d:\overline{n}|}}{{}_nE_{x+d}} = \frac{{}_{d/}(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}{{}_{n+d}E_x} $$

Decreasing errenten gaurko balio aktuarila

Beste kasu berezi bat progrezio aritmetikoko errentetan, decreasing errentak dira, ezaugarritzen dira errenta beherakor eta denbora zehatzekoak izateagatik, haren hasierako zenbatekoa errentaren denboralitatearekin bat etortzen da eta progrezioaren arrazoia -1 da. Ondoren adierazten ditugu decreasing errenta ezberdinen gaurko balio aktuariala:

$$ (Da)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x(n+1-t) = a_{x:\overline{n}|} + a_{x:\overline{n-1}|} + \ldots + a_{x:\overline{1}|} = \sum_{t=1}^{n} a_{x:\overline{t}|} $$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{n-1}{}_{t}E_x(n-t)=\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+\ddot{a}_{x:\overline{n-1}|}+...+\ddot{a}_{x:\overline{1}|}=\sum_{t=1}^{n}\ddot{a}_{x:\overline{t}|}$$

$$_{d/}(Da)_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=1}^{n}{}_{d+t}E_x(n+1-t)={}_{d/}a_{x:\overline{n}|}+{}_{d/}a_{x:\overline{n-1}|}+...+{}_{d/}a_{x:\overline{1}|}=\sum_{t=1}^{n}{}_{d/}a_{x:\overline{t}|}$$

$$_{d/}(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{n-1}{}_{d+t}E_x(n-t)={}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+{}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n-1}|}+...+{}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{1}|}=\sum_{t=1}^{n}{}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{t}|}$$

Decreasing errenten adierazpena konmutazio sinboloetan

$$(Da)_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=1}^{n}\frac{(N_{x+1}-N_{x+t+1})}{D_x}=\frac{nN_{x+1}-S_{x+2}+S_{x+n+2}}{D_x}$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=1}^{n}\frac{(N_{x}-N_{x+t})}{D_x}=\frac{nN_{x}-S_{x+1}+S_{x+n+1}}{D_x}$$

$$_{d/}(Da)_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=1}^{n}\frac{(N_{x+d+1}-N_{x+d+t+1})}{D_x}=\frac{nN_{x+d+1}-S_{x+d+2}+S_{x+d+n+2}}{D_x}$$

$$_{d/}(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=1}^{n}\frac{N_{x+d}-N_{x+d+t}}{D_x}=\frac{nN_{x+d}-S_{x+d+1}+S_{x+d+n+1}}{D_x}$$

3.1.2. ERRENTA ALDAKORRAK PROGREZIO GEOMETRIKOAN

Nazioarteko nomenklaturan ez daude sinbolorik azaltzen dituztenak progresio geometrikoko errenta aldakorren gaurko balio aktuariala, horregatik, erabiliko ditugu errenta horiek adierazteko nazioartean aitortzen ez diren símbolo batzuk.
Kontsideratuko dugu hasierako zenbatekoa 1 dela eta progrezioaren arrazoia β. Ondoren erakusten dizuegu nola adierazten ditugun gaurko balio aktuariala errenta mota ezberdinetan geroratuko kapitalen menpe.

Progrezio geometrikoaren errenta aldakorren gaurko balio aktuariala

$$Va(1;\beta)_x=\sum_{t=1}^{\infty}{}_{t}E_x\beta^{t-1}$$

$$V\ddot{a}(1;\beta)_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x \beta^t$$

$$Va(1;\beta)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x \beta^{t-1}$$

$$V\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x \beta^t$$

$${}_{d/}Va(1;\beta)_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{d+t}E_x \beta^{t-1} = {}_dE_x Va(1;\beta)_{x+d}$$

$${}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{d+t}E_x \beta^{t} = {}_dE_x V\ddot{a}(1;\beta)_{x+d}$$

$${}_{d/}Va(1;\beta)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{d+t}E_x \beta^{t-1} = {}_dE_x Va(1;\beta)_{x+d:\overline{n}|}$$

$${}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{d+t}E_x \beta^{t} = {}_dE_x V\ddot{a}(1;\beta)_{x+d:\overline{n}|}$$

<u>Ondoren ordaindutako errenten eta aldez aurretik ordaindutako errenten arteko erlazioa:</u>

$$Va(1;\beta)_x = \frac{1}{\beta} V\ddot{a}(1;\beta)_x - \frac{1}{\beta}$$

$$Va(1;\beta)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\beta} V\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{\beta} + \beta^{n-1} {}_nE_x$$

$${}_{d/}Va(1;\beta)_x = \frac{1}{\beta} {}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_x - \frac{1}{\beta} {}_dE_x$$

$${}_{d/}Va(1;\beta)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\beta} {}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{\beta} {}_dE_x + \beta^{n-1} {}_{d+n}E_x$$

Konmutazio sinboloetan adierazita

Definituz $VD_x = v^x l_x \beta^x$ eta $VN_x = \sum_{t=0}^{\infty} VD_{x+t}$

$$Va(1;\beta)_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}\beta^{t-1} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{v^{x+t} l_{x+t}\beta^{x+t-1}}{v^x l_x \beta^x} = \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{VD_{x+t}}{VD_x} = \frac{1}{\beta}\frac{VN_{x+1}}{VD_x}$$

$$V\ddot{a}(1;\beta)_x = \frac{VN_x}{VD_x}$$

$$Va(1;\beta)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\beta}\frac{VN_{x+1} - VN_{x+n+1}}{VD_x}$$

$$V\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n}|} = \frac{VN_x - VN_{x+n}}{VD_x}$$

$$_{d/}Va(1;\beta)_x = \frac{1}{\beta^{d+1}}\frac{VN_{x+d+1}}{VD_x}$$

$$_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_x = \frac{1}{\beta^{d}}\frac{VN_{x+d}}{VD_x}$$

$$_{d/}Va(1;\beta)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\beta^{d+1}}\frac{VN_{x+d+1} - VN_{x+d+n+1}}{VD_x}$$

$$_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\beta^{d}}\frac{VN_{x+d} - VN_{x+d+n}}{VD_x}$$

3.2. ERRENTA ZATIKIARRAK

Kontsideratuko dugu errentaren terminua konstantea dela urtean zehar eta beraz soilik aldatzen da urtetik urtera..

3.2.1. PROGREZIO ARITMETIKOKO ERRENTA ALDAKORRAK

Ondoren azaltzen ditugu increasing errenta mota ezbirdinak geroratutako kapitelatan adierazita eta interpolazio lineala erabilita, agertuko zaigu urteko errenten menpe.

Increasing errenten gaurko balio aktuariala

$$(Ia)_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x\,(t+1) = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}a_x^{(m)} \approx \sum_{t=0}^{\infty}\left[{}_{t/}a_x\,\frac{m+1}{2m} + {}_{t/}\ddot{a}_x\,\frac{m-1}{2m}\right]$$

$$= (Ia)_x\,\frac{m+1}{2m} + (I\ddot{a})_x\,\frac{m-1}{2m} = (Ia)_x + \frac{m-1}{2m}\,\ddot{a}_x$$

$$(I\ddot{a})_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x\,(t+1) \approx (I\ddot{a})_x\,\frac{m+1}{2m} + (Ia)_x\,\frac{m-1}{2m} = (I\ddot{a})_x - \frac{m-1}{2m}\,\ddot{a}_x$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{m} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x\,(t+1) \approx (Ia)_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - n\,{}_nE_x)$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x\,(t+1) \approx (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - n\,{}_nE_x)$$

$${}_{d/}(Ia)_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} {}_{d+t+\frac{k}{m}}E_x\,(t+1) \approx {}_{d/}(Ia)_x + \frac{m-1}{2m}\,{}_{d/}\ddot{a}_x$$

$${}_{d/}(I\ddot{a})_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1} {}_{d+t+\frac{k}{m}}E_x\,(t+1) \approx {}_{d/}(I\ddot{a})_x - \frac{m-1}{2m}\,{}_{d/}\ddot{a}_x$$

$${}_{d/}(Ia)_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{m} {}_{d+t+\frac{k}{m}}E_x\,(t+1) \approx {}_{d/}(Ia)_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}({}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - n\,{}_{d+n}E_x)$$

$$ {}_{d/}(I\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{d+n-1}\sum_{k=0}^{m-1} {}_{d+t+\frac{k}{m}}E_x\,(t-d+1) \approx {}_{d/}\left(I\ddot{a}\right)_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left({}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - n\,{}_{d+n}E_x\right) $$

<u>Decreasing errenten urteko balio aktuariala</u>

$$ (Da)^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{m} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x\,(n-t) = \sum_{t=1}^{n} a^{(m)}_{x:\overline{t}|} \approx \sum_{t=1}^{n}\left[a_{x:\overline{t}|}\frac{m+1}{2m} + \ddot{a}_{x:\overline{t}|}\frac{m-1}{2m}\right] $$
$$ = \left(Da\right)_{x:\overline{n}|}\frac{m+1}{2m} + (D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}\frac{m-1}{2m} = \left(Da\right)_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}(n - a_{x:\overline{n}|}) $$

$$ (D\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x\,(n-t) = \sum_{t=1}^{n} \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{t}|} \approx \sum_{t=1}^{n}\left[\ddot{a}_{x:\overline{t}|}\frac{m+1}{2m} + a_{x:\overline{t}|}\frac{m-1}{2m}\right] $$
$$ = \left(D\ddot{a}\right)_{x:\overline{n}|}\frac{m+1}{2m} + (Da)_{x:\overline{n}|}\frac{m-1}{2m} = \left(D\ddot{a}\right)_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(n - a_{x:\overline{n}|}) $$

$$ {}_{d/}(Da)^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{d+n-1}\sum_{k=1}^{m} {}_{d+t+\frac{k}{m}}E_x\,(d+n-t) = \sum_{t=1}^{n} {}_{d/}a^{(m)}_{x:\overline{t}|} \approx \sum_{t=1}^{n}\left[{}_{d/}a_{x:\overline{t}|}\frac{m+1}{2m} + {}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{t}|}\frac{m-1}{2m}\right] $$
$$ = {}_{d/}\left(Da\right)_{x:\overline{n}|}\frac{m+1}{2m} + {}_{d/}(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}\frac{m-1}{2m} = {}_{d/}\left(Da\right)_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}(n\,{}_{d}E_x - {}_{d/}a_{x:\overline{n}|}) $$

$$ {}_{d/}(D\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{d+n-1}\sum_{k=0}^{m-1} {}_{d+t+\frac{k}{m}}E_x\,(d+n-t) = \sum_{t=1}^{n} {}_{d/}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{t}|} \approx \sum_{t=1}^{n}\left[{}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{t}|}\frac{m+1}{2m} + {}_{d/}a_{x:\overline{t}|}\frac{m-1}{2m}\right] $$
$$ = {}_{d/}\left(D\ddot{a}\right)_{x:\overline{n}|}\frac{m+1}{2m} + {}_{d/}(Da)_{x:\overline{n}|}\frac{m-1}{2m} = {}_{d/}\left(D\ddot{a}\right)_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(n\,{}_{d}E_x - {}_{d/}a_{x:\overline{n}|}) $$

3.2.2. PROGREZIO GEOMETRIKOKO ERRENTA ALDAKORRAK

$$Va(1;\beta)_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x \beta^t \approx Va(1;\beta)_x \frac{m+1}{2m} + V\ddot{a}(1;\beta)_x \frac{m-1}{2m}$$

$$= Va(1;\beta)_x (\frac{m+1}{2m} + \frac{m-1}{2m}\beta) + \frac{m-1}{2m}$$

$$V\ddot{a}(1;\beta)_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x \beta^t \approx V\ddot{a}(1;\beta)_x \frac{m+1}{2m} + Va(1;\beta)_x \frac{m-1}{2m}$$

$$= V\ddot{a}(1;\beta)_x (\frac{m+1}{2m} + \frac{m-1}{2m\beta}) - \frac{m-1}{2m\beta}$$

$$Va(1;\beta)_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{m} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x \beta^t \approx Va(1;\beta)_{x:\overline{n}|} \frac{m+1}{2m} + V\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n}|} \frac{m-1}{2m}$$

$$= Va(1;\beta)_{x:\overline{n}|} (\frac{m+1}{2m} + \frac{m-1}{2m}\beta) + \frac{m-1}{2m}(1-\beta^n {}_nE_x)$$

$$V\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} {}_{t+\frac{k}{m}}E_x \beta^t \approx V\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n}|} \frac{m+1}{2m} + Va(1;\beta)_{x:\overline{n}|} \frac{m-1}{2m}$$

$$= V\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n}|} (\frac{m+1}{2m} + \frac{m-1}{2m\beta}) - \frac{m-1}{2m\beta}(1-\beta^n {}_nE_x)$$

$${}_{d/}Va(1;\beta)_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} {}_{d+t+\frac{k}{m}}E_x \beta^{t-d} \approx {}_{d/}Va(1;\beta)_x \frac{m+1}{2m} + {}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_{x:} \frac{m-1}{2m}$$

$$= {}_{d/}Va(1;\beta)_x (\frac{m+1}{2m} + \frac{m-1}{2m}\beta) + \frac{m-1}{2m} {}_dE_x$$

$${}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1} {}_{d+t+\frac{k}{m}}E_x \beta^{t-d} \approx {}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_x \frac{m+1}{2m} + {}_{d/}Va(1;\beta)_{x:} \frac{m-1}{2m}$$

$$= {}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_x (\frac{m+1}{2m} + \frac{m-1}{2m\beta}) - \frac{m-1}{2m\beta} {}_dE_x$$

$$ {}_{d/}Va(1;\beta)^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{d+n-1}\sum_{k=1}^{m} {}_{d+t+\frac{k}{m}}E_x\beta^{t-d} \approx {}_{d/}Va(1;\beta)_{x:\overline{n|}}\frac{m+1}{2m} + {}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n|}}\frac{m-1}{2m} $$

$$ = {}_{d/}Va(1;\beta)_{x:\overline{n|}}\left(\frac{m+1}{2m} + \frac{m-1}{2m}\beta\right) + \frac{m-1}{2m}\left({}_{d}E_x - \beta^n\, {}_{d+n}E_x\right) $$

$$ {}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{d+n-1}\sum_{k=0}^{m-1} {}_{d+t+\frac{k}{m}}E_x\beta^{t-d} \approx {}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n|}}\frac{m+1}{2m} + {}_{d/}Va(1;\beta)_{x:\overline{n|}}\frac{m-1}{2m} $$

$$ = {}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n|}}\left(\frac{m+1}{2m} + \frac{m-1}{2m\beta}\right) - \frac{m-1}{2m\beta}\left({}_{d}E_x - \beta^n\, {}_{d+n}E_x\right) $$

3.3. ERRENTA JARRAITUAK

Progrezio aritmetikoko errenta aldakorren gaurko balio aktuariala

$$ (\bar{I}\bar{a})_x = \int_0^\infty {}_tE_x t\,dt $$

$$ (I\bar{a})_x = \lim_{m\to\infty}(Ia)^{(m)}_x \approx (Ia)_x + \frac{1}{2}\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}\bar{a}_x $$

$$ {}_{d/}(I\bar{a})_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{d+t/}\bar{a}_{x:\overline{n-t|}} \approx \sum_{t=0}^{n-1} {}_{d+t/}a_{x:\overline{n-t|}} - \frac{1}{2}\left[n\, {}_{d+n}E_x - {}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}\right] $$

Progrezio geometrikoko errenta aldakorren gaurko balio aktuariala

$$ V\bar{a}(1;\beta) = \int_0^\infty {}_tE_x\beta^t\,dt $$

$$ {}_{d/}V\bar{a}(1;\beta)_{x:\overline{n|}} = \int_d^{d+n} {}_tE_x\beta^{t-d}\,dt = \frac{1}{\beta^d}\int_d^{d+n} {}_tE_x\beta^t\,dt $$

4. GAIA

4. HERIOTZAKO ASEGURUAK

4.1. HERIOTZARAKO ASEGURUEN GAURKO BALIO AKTUARIALA

Nazioarteko nomenklatura jarraituz, heriotz urtearen amaeeran jasotako kapital unitatea gaurko balio aktuarialean honela adierazten dugu, A_x , bizitza osorako asegurua eta haren balioa, eremu diskretuan, ondorengo adierazpenetik lortzen dugu:

$$A_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; {}_{t-1/}q_x$$

Denborazko asegurua deitzen diogu, kapital unitatea bermatzen denean asegurudunaren heriotza n urte pasa baino lehen gertatzen bada. Gaurko balio aktuarialaren kalkulua, eremu diskretuan eta suposatuz kapitala ordaintzen dela heriotzaren urte amaieran

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t \; {}_{t-1/}q_x$$

Heriotzaren ondoriozko kapitala bermatzen bada bakarrik heriotza sorreratik *d* urte pasa ondoren gertatzen bada. Gaurko balio aktuariala honela adierazten da:

$${}_{d/}A_x = \sum_{t=d+1}^{\infty} v^t \; {}_{t-1/}q_x$$

Azkenik kontsideratzen badugu heriotzaren ondoriozko kapitala soilik ordainduko dela heriotza, sorreratik d urte pasata eta hurrengo n urteetan ematen bada:

$${}_{d/}A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=d+1}^{d+n} v^t \; {}_{t-1/}q_x$$

Urtea *m* ataletan zatitetzen badugu eta kontsideratzen badugu kapitalaren ordainketa heriotza suertatzen den subperiodo edo *m*-garrenaren amaieran ematen dela, gaurko balio aktuariala honela adierazten da:

$$A_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} v^{t+\frac{k}{m}} \; {}_{t+\frac{k-1}{m}/\frac{1}{m}}q_x$$

Heriotz aseguruaren izaera berezia haren ordainketa eskubidea gertaera suertatzen den berehalako momentuan ematen dela da, horregatik haren definizio zehatza eremu jarraian aurkitzen dugu.

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty {}_t\overline{E}_x \mu_{x+t} dt$$

Kontuan izanda urtean zehar heriotzen banaketa uniformea,hau da, heriotz guztiak urte erdian ematen direla kontsideratzearen berdina dena, lortzen dugu eremu diskretua eta eremu jarraia erlazionatzen duen adierazpena:

$$\overline{A}_x \approx -\sum_{k-1}^{\infty} v^{k-\frac{1}{2}} \int_{k-1}^{k} d\,{}_t p_x = r^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} v^k \,{}_{k-1/}q_x = r^{\frac{1}{2}} A_x$$

Beste alde batetik aurkitzen dugu bizitza aseguru mota klasikoa, <u>aseguru mixto</u> bezala ezagutzen dena, zeinek bermatzen du kapital bat heriotza suertatzen denean eta kapital bera kontratua amaitzean aseguraduna bizirik jarraitzen badu. Kapital uintate baten gaurko balio aktuariala aurreko bietako bat gertatuz hau da, *x* aren heriotza *n* denbora pasa baino lehen edo *n* denbora pasatzea *x* hil gabe, honela adierazten dugu:

$$A_{x:\overline{n}|} = \overline{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + {}_nE_x$$

<u>Konmutazio sinboloetan adierazita</u>. Heriotzarako prestazioen kalkuluak egiteko ondorengo konmutazio sinboloak erabiltzen ditugu, $C_x = v^{x+\frac{1}{2}} d_x$ eta $M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$

$$\overline{A}_x \approx r^{\frac{1}{2}} A_x = r^{\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{\infty} v^t \frac{d_{x+t-1}}{l_x} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{C_{x+t-1}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}$$

$$\overline{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} \approx r^{\frac{1}{2}} \overline{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = r^{\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{n} v^t \frac{d_{x+t-1}}{l_x} = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_{x+t-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$${}_{d/}\overline{A}_x \approx r^{\frac{1}{2}} {}_{d/}A_x = r^{\frac{1}{2}} \sum_{t=d+1}^{\infty} v^t \frac{d_{x+t-1}}{l_x} = \sum_{t=d+1}^{\infty} \frac{C_{x+t-1}}{D_x} = \frac{M_{x+d}}{D_x}$$

$${}_{d/}\overline{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} \approx r^{\frac{1}{2}} {}_{d/}\overline{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = r^{\frac{1}{2}} \sum_{t=d+1}^{d+n} v^t \frac{d_{x+t-1}}{l_x} = \sum_{t=d+1}^{d+n} \frac{C_{x+t-1}}{D_x} = \frac{M_{x+d} - M_{x+d+n}}{D_x}$$

4.2. HERIOTZARAKO ASEGURUEN GAURKO BALIO AKTUARIALA ERRENTA TERMINUETAN

$$A_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left({}_{t-1}p_x - {}_t p_x \right) = v\ddot{a}_x - a_x = v\left[1 - i a_x\right]$$

$$A_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \left({}_{t-1}p_x - {}_t p_x \right) = v\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}} = v\left[1 - {}_nE_x - i a_{x:\overline{n|}}\right]$$

$${}_{d/}A_x = \sum_{t=d+1}^{\infty} v^t \left({}_{t-1}p_x - {}_t p_x \right) = v\, {}_{d/}\ddot{a}_x - {}_{d/}a_x = v\left[{}_dE_x - i\, {}_{d/}a_x\right]$$

$${}_{d/}A_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = \sum_{t=d+1}^{d+n} v^t \left({}_{t-1}p_x - {}_t p_x \right) = v\, {}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - {}_{d/}a_{x:\overline{n|}} = v\left[{}_dE_x - {}_{d+n}E_x - i\, {}_{d/}a_{x:\overline{n|}}\right]$$

$$A_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} v^{t+\frac{k}{m}} \left({}_{t+\frac{k-1}{m}}p_x - {}_{t+\frac{k}{m}}p_x \right) = v^{\frac{1}{m}} m\ddot{a}_x^{(m)} - m a_x^{(m)} = v^{\frac{1}{m}}\left[1 - j_m a_x^{(m)}\right]$$

Erabiltzen badugu heriotza ematen den subperiodo amaieran ordaintzeko dagoen kapital unitarioaren gaurko balio aktuariala, heriotza *d* urte pasata ematen bada eta hurrengo *n* urteetan zehar eta kontuan izanda lortu dugun erlazioa aurreko gaietan, zeinetan, ondoren ordaindutako zatikiar errenten balio gehikuntza aztertu dugun urteko errentekiko, ondorengoa lortzen dugu,

$$
\begin{aligned}
{}_{d/}A^{(m)}_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} &= v^{\frac{1}{m}}\left[{}_dE_x - {}_{d+n}E_x - j_m\, {}_{d/}a^{(m)}_{x:\overline{n|}}\right] \\
&= v^{\frac{1}{m}}\left\{{}_dE_x - {}_{d+n}E_x - j_m\left[\frac{i}{j_m}\, {}_{d/}a_{x:\overline{n|}} + \left(\frac{r}{j_m} - \frac{r^{\frac{1}{m}} i}{j_m^2}\right) {}_{d/}A_{\overset{1}{x:\overline{n|}}}\right]\right\} \\
&= v^{\frac{1}{m}}\left\{\left(\frac{1}{v} - r + \frac{r^{\frac{1}{m}} i}{j_m}\right) {}_{d/}A_{\overset{1}{x:\overline{n|}}}\right\} = \frac{i}{j_m}\, {}_{d/}A_{\overset{1}{x:\overline{n|}}}
\end{aligned}
$$

Eremu jarraian,

$$\overline{A}_x = \int_0^{\infty} {}_t\overline{E}_x \mu_{x+t}\, dt = -\int_0^{\infty} v^t\, d\, {}_tp_x$$

Zatika integratuz ondorengo adierazpena lortzen dugu,

$$\overline{A}_x = 1 - \delta\, \overline{a}_x$$

Era berean lortzen dugu:

$$_{d/}\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} = {}_{d}E_x - {}_{d+n}E_x - \delta\, {}_{d/}\overline{a}_{x:\overline{n}|}$$

4.3. PROGREZIO ARITMETIKOKO HERIOTZARAKO ASEGURU ALDAKORRAK

Progrezio aritmetikoko prestazio aldakorren artean kontsideratzen dugu heriotz kasurako increasing prestazioen kasu partikularra zeinetan hasierako zenbatekoa unitatea den eta progrezioaren arrazoia ere unitatea da.

4.3.1. GAURKO BALIO AKTUARIALA

Unitate baten kapitalaren ordainketaren gaurko balio aktuariala aseguraduna lehenengo urtean zehar hiltzen bada, 2 unitate bigarren urtean zehar hiltzen bada eta horrela hurrenez hurren, honela adierazten dugu eremu diskretuan eta prestazioaren ordainketa hildako urtearen amaieran ematen delaren gaineko hipotesia kontuan izanda,

$$(IA)_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_{t-1/}q_x\, t = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}A_x$$

Kontratua *n* urteko iraupena badu

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_{t-1/}q_x\, t = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}A^{1}_{x:\overline{n-t}|}$$

Kapitala ordaintzen bada aseguraduna hiltzen bada *d* urte pasata

$$_{d/}(IA)_x = \sum_{t=d+1}^{\infty} v^t \, {}_{t-1/}q_x (t-d) = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{d+t/}A_x$$

$$_{d/}(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=d+1}^{d+n} v^t \, {}_{t-1/}q_x (t-d) = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{d+t/}A^{1}_{x:\overline{n-t}|}$$

Urtea m partetan zatituz eta kontsideratuz kapitala ordaintzen dela heriotza eman den subperiodi edo m-garren zatiaren amaneran, gaurko balio aktuariala honela adierazten da,

$$(IA)_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} v^{t+\frac{k}{m}}\ {}_{t+\frac{k-1}{m}/\frac{1}{m}}q_x(t+1) = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}A_x^{(m)}$$

$${}_{d/}(IA)^{(m)}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = \sum_{t=d}^{d+n-1}\sum_{k=1}^{m} v^{t+\frac{k}{m}}\ {}_{t+\frac{k-1}{m}/\frac{1}{m}}q_x(t+1-d) = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{d+t/}A^{(m)}_{\overset{1}{x:\overline{n-t}|}}$$

Progrezio aritmetikoko heriotz aseguru aldakorren gaurko balio aktuariala eremu jarraian honako hau da,

$$(\overline{IA})_x = \int_0^{\infty} t\ {}_t\overline{E}_x \mu_{x+t}\, dt$$

Aurreko adierazpenak une bakoitzean prestazioaren zenbatekoa aldatzen dela adierazten du. Horregatik, prestazioaren gaurko balio aktuariala adierazi nahi badugu zenbatekoa urtero unitate batean aldatzen dela, honela egin behar da,

$$(I\overline{A})_x = \sum_{k=1}^{\infty} k\int_{k-1}^{k} {}_t\overline{E}_x \mu_{x+t}\, dt$$

Urtean zehan hildakoen banaketa uniformea kontuan hartzen badugu, heriotz guztiak urte erdian ematen direlaren berdina dena,

$$(I\overline{A})_x = -\sum_{k=1}^{\infty} k\int_{k-1}^{k} v^t d\ {}_tp_x \approx -\sum_{k=1}^{\infty} kv^{k-\frac{1}{2}}\int_{k-1}^{k} d\ {}_tp_x = r^{\frac{1}{2}}(IA)_x$$

Eremu jarraia eta ereme diskretua erlazionatzen diguna.

<u>Konmutazio sinboloetan adierazita</u>. Konmutazio símbolo berri bat definitzen dugu: $\overline{R}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \overline{M}_{x+t}$

$$(I\overline{A})_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}\overline{A}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\overline{M}_{x+t}}{\overline{D}_x} = \frac{\overline{R}_x}{\overline{D}_x}$$

$$(I\overline{A})_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}\overline{A}_{\overset{1}{x:\overline{n-t}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(\overline{M}_{x+t} - \overline{M}_{x+n})}{\overline{D}_x} = \frac{\overline{R}_x - \overline{R}_{x+n} - n\overline{M}_{x+n}}{\overline{D}_x}$$

$${}_{d/}(I\overline{A})_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{d+t/}\overline{A}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\overline{M}_{x+d+t}}{\overline{D}_x} = \frac{\overline{R}_{x+d}}{\overline{D}_x}$$

$$_{d/}(\overline{IA})^{\;1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{d+t/}\overline{A}^{\;1}_{x:\overline{n-t}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(\overline{M}_{x+d+t} - \overline{M}_{x+d+n})}{D_x} = \frac{\overline{R}_{x+d} - \overline{R}_{x+d+n} - n\overline{M}_{x+d+n}}{D_x}$$

4.3.2. ERRENTA TERMINUETAN ADIERAZITAKO ESPRESIOAK

$$\begin{aligned}(IA)_x &= \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}A_x = \sum_{t=0}^{\infty} (v\,{}_{t/}\ddot{a}_x - {}_{t/}a_x) = v(I\ddot{a})_x - (Ia)_x \\ &= v\left[\ddot{a}_x - i(Ia)_x\right]\end{aligned}$$

Era berean lortzen dugu:

$$(IA)^{\;1}_{x:\overline{n}|} = v(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} - (Ia)_{x:\overline{n}|} = v\left[\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - n\,{}_nE_x - i(Ia)_{x:\overline{n}|}\right]$$

$$_{d/}(IA)_x = v\,{}_{d/}(I\ddot{a})_x - {}_{d/}(Ia)_x = v\left[{}_d a_x - i\,{}_{d/}(Ia)_x\right]$$

$$_{d/}(IA)^{\;1}_{x:\overline{n}|} = v\,{}_{d/}(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} - {}_{d/}(Ia)_x = v\left[{}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - n\,{}_{d+n}E_x - i\,{}_{d/}(Ia)_{x:\overline{n}|}\right]$$

$$(IA)^{(m)}_x = v^{\frac{1}{m}} m(I\ddot{a})^{(m)}_x - m(Ia)^{(m)}_x = v^{\frac{1}{m}}\left[\ddot{a}_x - j_m(Ia)^{(m)}_x\right]$$

$$(IA)^{(m)\,1}_{x:\overline{n}|} = v^{\frac{1}{m}} m(I\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|} - m(Ia)^{(m)}_{x:\overline{n}|} = v^{\frac{1}{m}}\left[\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - n\,{}_nE_x - j_m(Ia)^{(m)}_{x:\overline{n}|}\right]$$

$$_{d/}(IA)^{(m)}_x = v^{\frac{1}{m}} m\,{}_{d/}(I\ddot{a})^{(m)}_x - m\,{}_{d/}(Ia)^{(m)}_x = v^{\frac{1}{m}}\left[{}_{d/}\ddot{a}_x - j_m\,{}_{d/}(Ia)^{(m)}_x\right]$$

$$_{d/}(IA)^{(m)\,1}_{x:\overline{n}|} = v^{\frac{1}{m}} m\,{}_{d/}(I\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|} - m\,{}_{d/}(Ia)^{(m)}_{x:\overline{n}|} = v^{\frac{1}{m}}\left[{}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - n\,{}_{d+n}E_x - j_m(Ia)^{(m)}_{x:\overline{n}|}\right]$$

Heriotza ematen den subperiodoaren amaieran ordaindutako aseguruen adierazpena heriotza ematen den urte amaieran ordaindutako aseguruen menpe,

$$_{d/}(IA)^{(m)\,1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{d+t/}A^{(m)\,1}_{x:\overline{n-t}|} \approx \sum_{t=0}^{n-1} \frac{i}{j^{(m)}}\,{}_{d+t/}A^{\;1}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{j^{(m)}}\,{}_{d/}(IA)^{\;1}_{x:\overline{n}|}$$

4.4. PROGREZIO GEOMETRIKOKO HERIOTZ ASEGURU ALDAKORRAK

Hasiko gara hasierako zenbatekoa unitate bat eta progrezioaren arrazoia β duen heriotz aseguruaren kasu partikularraren gaurko balio aktuariala kalkulatzen.

4.4.1. GAURKO BALIO AKTUARIALA

Eremu diskretuan eta prestazioaren ordainketa hildako urte amaieran ematen delaren hipotesiarekin,

$$VA(1;\beta)_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; {}_{t-1/}q_x \beta^{t-1}$$

$$VA(1;\beta)_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \; {}_{t-1/}q_x \beta^{t-1}$$

$${}_{d/}VA(1;\beta)_x = \sum_{t=d+1}^{\infty} v^t \; {}_{t-1/}q_x \beta^{t-d-1}$$

$${}_{d/}VA(1;\beta)_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = \sum_{t=d+1}^{d+n} v^t \; {}_{t-1/}q_x \beta^{t-d-1}$$

Urtea *m* partetan zatitzen bada eta kontsideratuz heriotza ematen den *m*-garrenean egiten dela kapitalaren ordainketa gaurko balio aktuariala honela jarrito dugu:

$$VA(1;\beta)_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} v^{t+\frac{k}{m}} \; {}_{t+\frac{k-1}{m}/\frac{1}{m}}q_x \beta^t$$

$${}_{d/}VA(1;\beta)_{\overset{1}{x:\overline{n|}}}^{(m)} = \sum_{t=d}^{d+n-1}\sum_{k=1}^{m} v^{t+\frac{k}{m}} \; {}_{t+\frac{k-1}{m}/\frac{1}{m}}q_x \beta^{t-d}$$

Progrezio geometrikoko heriotz aseguru aldakorren adierazpena eremu jarraian honako hau da,

$$\overline{VA}(1;\beta)_x = \int_0^{\infty} {}_t\overline{E}_x \mu_{x+t} \beta^t \, dt$$

Aurreko adierazpenak adierazten du zenbatekoa une bakoitzean aldatzen dela. Horregatik, prestazioaren gaurko balio aktuariala adierazi nahi badugu zenbatekoa urtero unitate batean aldatzen dela, honela egin behar da,

$$V\overline{A}(1;\beta)_x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} \int_{k-1}^{k} {}_t\overline{E}_x \mu_{x+t}\, dt$$

Urtean zehan hildakoen banaketa uniformea kontuan hartzen badugu, heriotz guztiak urte erdian ematen direlaren berdina dena,

$$V\overline{A}(1;\beta)_x = -\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} \int_{k-1}^{k} v^t\, d\,{}_tp_x \approx -\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} v^{k-\frac{1}{2}} \int_{k-1}^{k} d\,{}_tp_x = r^{\frac{1}{2}} VA(1;\beta)_x$$

Eremu jarraia eta eremu diskretua erlazionatzen duen adierazpena delarik.

<u>Konmutazio sinboloetan adierazita</u>. Progrezio geométrikoko heriotzengatiko prestazioak konmutazio sinboloetan adierazteko hurrengo sinboloa definituko dugu,

$$VC_x = \beta^x C_x$$

$$VM_x = \sum_{t=0}^{\infty} VC_{x+t}$$

Sinboloak adierazita ondorengo espresioak lortzen ditugu:

$$V\overline{A}(1;\beta)_x \approx \sum_{t=1}^{\infty} \frac{VC_{x+t-1}}{VD_x} = \frac{VM_x}{VD_x}$$

$$VA(1;\beta)_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} \approx \sum_{t=1}^{n} \frac{VC_{x+t-1}}{VD_x} = \frac{VM_x - VM_{x+n}}{VD_x}$$

$${}_{d/}V\overline{A}(1;\beta)_x \approx \frac{1}{\beta^d} \sum_{t=d+1}^{\infty} \frac{VC_{x+t-1}}{VD_x} = \frac{1}{\beta^d} \frac{VM_{x+d}}{VD_x}$$

$${}_{d/}VA(1;\beta)_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} \approx \frac{1}{\beta^d} \sum_{t=d+1}^{d+n} \frac{VC_{x+t-1}}{VD_x} = \frac{1}{\beta^d} \frac{VM_{x+d} - VM_{x+d+n}}{VD_x}$$

4.4.2. ERRENTA TERMINUETAN ADIERAZITA

$$VA(1;\beta)_x = vV\ddot{a}(1;\beta)_x - Va(1;\beta)_x$$

$$VA(1;\beta)_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} = vV\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n}|} - Va(1;\beta)_{x:\overline{n}|}$$

$${}_{d/}VA(1;\beta)_x = v\,{}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_x - {}_{d/}Va(1;\beta)_x$$

$$ {}_{d/}VA(1;\beta)_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} = v\, {}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)_{x:\overline{n}|} - {}_{d/}Va(1;\beta)_{x:\overline{n}|} $$

$$ {}_{d/}VA(1;\beta)^{(m)}_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} = v^{\frac{1}{m}}\, m\, {}_{d/}V\ddot{a}(1;\beta)^{(m)}_{x:\overline{n}|} - m\, {}_{d/}Va(1;\beta)^{(m)}_{x:\overline{n}|} $$

Aurreko erlazioetatik ondorioztatzen dugu heriotza ematen den subperiodo amaieran ordaintzeko aseguruen adierazpena heriotza ematen den urte amaieran ordaintzeko dauden seguruen menpe,

$$ {}_{d/}VA(1;1{,}02)^{(m)}_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} \approx \frac{i}{j^{(m)}}\, {}_{d/}VA(1;1{,}02)_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} $$

5. GAIA

5. HAINBAT PERTSONA PARTE HARTZEN DUTEN ERAGIKETAK

5.1. GERORATUTAKO KAPITALA ZEINETAN BI EDO PERTSONA GEHIAGO PARTE HARTZEN DUTEN

kapital baten ordainketa hainbat pertsonen biziraupenarekin erlazionatuta dagoenean, kontuan hartu behar dugu taldearen biziraupenaren probabilitatea.

Unitate bateko kapitalaren gaurko balio akturiala n urte barru m pertsonetako taldearen partaide guztiek bizirik irauten badute edo berdina dena, n urte barru taldea desegitetik bizirik ateratzea, ondorengo adierazpenetik lortzen dugu,

$$ {}_nE_{x_1:x_2:\ldots:x_m} = v^n\,{}_np_{x_1:x_2:\ldots:x_m} = v^n\,{}_np_{x_1}\,{}_np_{x_2}\cdots{}_np_{x_m} $$

Unitate bateko kapitalaren gaurko balio akturiala n urte barru m pertsonetako taldetik gutxienez partaide bat bizirik irauten badu edo berdina dena, n urte barru taldea lortzen duela ez desagertzea , ondorengo adierazpenetik lortzen dugu,

$$ {}_nE_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = v^n\,{}_np_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} $$

Taldea bi pertsonataz osatuta badago,

$$ {}_nE_{\overline{x_1:x_2}} = v^n\,{}_np_{\overline{x_1:x_2}} = v^n\left[{}_np_{x_1} + {}_np_{x_2} - {}_np_{x_1:x_2}\right] = {}_nE_{x_1} + {}_nE_{x_2} - {}_nE_{x_1:x_2} $$

Unitate bateko kapitalaren gaurko balio aktuarialaren adierazpena m pertsonetako talde batetik zehazki r pertsona bizitzeko, honela adierazten da,

$$ {}_nE_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}^{[r]} = v^n\,{}_np_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}^{[r]} $$

Adibide bezala hiru gizabanako osatutako taldea hartzen badugu, eta kalkulatu nahi badugu ordaintzen den unitate bateko kapitalaren gaurko balio zehazki taldeko pertsona 1 bizirik irauten badu ondorengo erlazioa lortzen dugu,

$$ {}_nE_{\overline{x_1:x_2:x_3}}^{[1]} = v^n\,{}_np_{\overline{x_1:x_2:x_3}}^{[1]} = {}_nE_{x_1} + {}_nE_{x_2} + {}_nE_{x_3} - 2\left[{}_nE_{x_1:x_2} + {}_nE_{x_1:x_3} + {}_nE_{x_2:x_3}\right] + 3\,{}_nE_{x_1:x_2:x_3} $$

Baita plantea dezakegu unitate bateko kapitalaren gaurko balio aktuarialaren adierazpena n urte pasata *m* pertsonetako talde batetik gutxienez *r* pertsona bizitzeko,

$$ {}_nE_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}^{(r)} = v^n \, {}_np_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}^{(r)} $$

Adibide bezala hiru gizabanakok ostatutako taldea hartzen badugu, eta kalkulatu nahi badugu unitate bateko kapitalaren gaurko balio aktuarialaren adierazpena gutxienez *2* pertsona badaude, hurrengo erlazioa lortzen dugu,

$$ {}_nE_{\overline{x_1:x_2:x_3}}^{(2)} = v^n \, {}_np_{\overline{x_1:x_2:x_3}}^{(2)} = {}_nE_{x_1:x_2} + {}_nE_{x_1:x_3} + {}_nE_{x_2:x_3} - 2\,{}_nE_{x_1:x_2:x_3} $$

5.2. ERRENTAK ZEINETAN BI EDO PERTSONA GEHIAGO PARTE HARTZEN DUTEN

m pertsonetako talde batetik abiatuta jarriko ditugu adierazpen ezberdinak, según eta bizirik ateratzen diren gizbanako kopurua, unitate bateko zenbatekoa duen gaurko balio akturialeko ondoren ordaindutako, d urte geroratutako eta n urte denborazko errentatik.

Hasierako taldea osatzen duten taldekide guztiek bizirik irautea ordainketarako baldintza izanda, hau da, taldea deusestapenetik bizirik ateratzen dela, adierazpena homako hau da,

$$ {}_{d/}a_{x_1:x_2:\ldots:x_m:\overline{n}|} = \sum_{t=d+1}^{d+n} {}_tE_{x_1:x_2:\ldots:x_m} $$

Hasierako taldea osatzen dutek taldekideetatik bat gutxienez bizirik irautea ordainketarako baldintza izanda, hau da, taldea desagertzetik bizirik ateratzea,

$$ {}_{d/}a_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}:\overline{n}|} = \sum_{t=d+1}^{d+n} {}_tE_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} $$

Errenta ordaintzen bada hasierako taldetik zehazki *r* pertsona bizirik badaude,

$$ {}_{d/}a_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}:\overline{n}|}^{[r]} = \sum_{t=d+1}^{d+n} {}_tE_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}^{[r]} $$

Errenta ordaintzen bada gutxienez hasierako taldetik *r* pertsona bizirik badaude,

$$ {}_{d/}a_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}:\overline{n}|}^{(r)} = \sum_{t=d+1}^{d+n} {}_tE_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}^{(r)} $$

Adibide moduan ondorengo erlazioak azaltzen ditugu,

$$_{d/}a_{x_1:x_2:\ldots:x_m:\overline{n}|} = {}_{d}E_{x_1:x_2:\ldots:x_m}\, a_{x_1+d:x_2+d:\ldots:x_m+d:\overline{n}|}$$

$$_{d/}a_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}:\overline{n}|} \neq {}_{d}E_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}\, a_{\overline{x_1+d:x_2+d:\ldots:x_m+d}:\overline{n}|}$$

m pertsoneko talde bati erlazionatutako zatikiar errenten edo/eta errenta aldakorren gaurko balio aktuariala pertsona batekin lortu dugun era berean lortzen da, kontuan izanda kasu bakoitzean taldearen probabilitateen garapena.

5.3. HERIOTZ ASEGURUAK ZEINETAN BI EDO PERTSONA GEHIAGO PARTE HARTZEN DUTEN

Hasierako taldeko *m* gizabanakoetatik, pertsona kopuru zehatz baten heriotza dela eta, heriotzaren urte amaiera ordaintzeko dagoen unitateko kapitalaren gaurko balio aktuarialerako kontuan hartu behar dugu pretazioaren ordainketarekin erlazioanatuta dagoen probabilitatea.

Prestazioa lehenengo heriotzarekin ematen bada, edo berdina dena, taldearen deusetapenarekin, gaurko balio aktuariala ondorengo adierazpenari dagokio,

$$A_{x_1:x_2:\ldots:x_m} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\, {}_{t-1/}q_{x_1:x_2:\ldots:x_m}$$

Errenta terminuetan azaltzen badugu gaurko balio aktuariala,

$$A_{x_1:x_2:\ldots:x_m} = v\ddot{a}_{x_1:x_2:\ldots:x_m} - a_{x_1:x_2:\ldots:x_m} = v\left[1 - i a_{x_1:x_2:\ldots:x_m}\right]$$

Prestazioaren ordainketa azkenengo heriotzarekin ematen bada(taldearen desagertzearekin),

$$A_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\, {}_{t-1/}q_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}$$

Errenta terminuetan eta *d* urte geroratutako eta *n* urteko asegururako,

$$_{d/}A^{\ \ 1}_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}\ \overline{n}|} = v\, {}_{d/}\ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}\,\overline{n}|} - {}_{d/}a_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}\,\overline{n}|} = v\left[{}_{d}E_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} - {}_{d+n}E_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} - i\, {}_{d/}a_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}\,\overline{n}|}\right]$$

Eremu jarraian,

$$\bar{A}_{x_1:x_2:\ldots:x_m} = \int_0^{\infty} {}_{t}\bar{E}_{x_1:x_2:\ldots:x_m}\, \mu_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t}\, dt$$

5.4. BIZIRAUPENERAKO GERORATUTAKO KAPITALA

Hainbat pertsona parte hartzen dutenean biziraupen eragiketa bezala deitzen diegu, ezartzen denean gizabanako edo gizabanakoen taldea zeintzuk diren aseguradunak eta onuradun bezala ateratzen den pertsona edo pertsona taldea ezartzen denean.

x eta *y* adineko 2 gizabanakoetako taldetik abiatuta, kapitale unitate baten ordainketaren gaurko balio aktuariala *y* adineko pertsona *n* urteko kontratuaren amaieran bizirik irauten badu, denbora tarte horretan *x* adineko pertsona hil delarik, ondorengo adieazpenetik lortzen dugu,

$$ {}_{n}E_{x/y} = v^{n}\,{}_{n}p_{y}\,{}_{n}q_{x} = {}_{n}E_{y} - {}_{n}E_{x:y} $$

Era berean platea dezakegu bi gizabanakoen talderako. Ondoren hainbat adibide azaltzen ditugu,

$$ {}_{n}E_{x_1:x_2/y_1:y_2} = {}_{n}E_{y_1:y_2} - {}_{n}E_{x_1:x_2:y_1:y_2} $$

$$ {}_{n}E_{\overline{x_1:x_2}/y_1:y_2} = {}_{n}E_{y_1:y_2} - {}_{n}E_{\overline{x_1:x_2}y_1:y_2} = {}_{n}E_{y_1:y_2} - {}_{n}E_{x_1:y_1:y_2} - {}_{n}E_{x_2:y_1:y_2} + {}_{n}E_{x_1:x_2:y_1:y_2} $$

$$ {}_{n}E_{\overline{x_1:x_2}/\overline{y_1:y_2}} = {}_{n}E_{\overline{y_1:y_2}} - {}_{n}E_{\overline{x_1:x_2}\,\overline{y_1:y_2}} $$

5.5. BIZIRAUPEN ERRENTAK

Biziraupen errente artean bi multzo handi aurki ditzakegu: bizirauken errenta sinpleak, zeinetan ezartzen den aseguradun eta onuradun bezala parte hartzen duten gizabanako edo gizabanako taldea eta biziraupen errenta konposatua, zeinetan aseguradun taldearen barnean ezartzen den heriotzen ordena.

Biziraupen errenta sinpleen artean kasu errezena aseguradun eta onuradun bezala pertsona bat agertzen denean da. Unitate bateko kapital ordainketaren gaurko balio aktuariala *y* onuradunari *x* aseguradunaren heriotzetik aurrera, eremu diskrtuan,

$$ a_{x/y} = \sum_{t=1}^{\infty} v^{t}\,{}_{t}p_{y}\,{}_{t}q_{x} = a_{y} - a_{x:y} $$

$$ \ddot{a}_{x/y} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t}\,{}_{t}p_{y}\,{}_{t}q_{x} = \ddot{a}_{y} - \ddot{a}_{x:y} = (a_{y}+1) - (a_{x:y}+1) = a_{x/y} $$

Ikusten dugunez ez dauka zentzurik aldez aurretik ordaindutako eta berehalako errenta bat kontratatzea zeren lehenengo terminoa ez dugu inoiz kobratzen, kontratuaren sorrerarekin bat etortzean, onuradun eta aseguraduna bizirik aurkitzen diren momentua.

Eremu jarraian adierazpena ondorengoa da,

$$\bar{a}_{x/y}=\int_0^{\infty} {}_t\bar{E}_{x:y}\mu_{x+t}\bar{a}_{y+t}dt=\bar{a}_y-\bar{a}_{x:y}$$

Planteatzen dugunean *d* urte geroratutako biziraupen errenta baten gaurko balio aktuariala interpreta dezakegu:

- Gerorapena kontratuaren sorreratik zenbatzen da eta beraz onuradunaren errentaren kobrantzataz dihardu. Beraz, aseguraduna gerorapen denboraren barnean hiltzen bada , onuraduna errenta kobratzen hasiko da kontratuaren sorreratik *d* urte pasata eta aseguraduna gerorapen denbora pasa ondoren hiltzen bada onuradunak errenta berehala jasoko du. Errenta horren gaurko balio aktuariala honako hau da,

$$,_{d/}a_{x/y}={}_{d/}a_{x/y}=\sum_{t=d+1}^{\infty}v^t\,{}_tp_y\,{}_tq_x={}_{d/}a_y-{}_{d/}a_{x:y}$$

$$,_{d/}\ddot{a}_{x/y}={}_{d/}\ddot{a}_{x/y}=\sum_{t=d}^{\infty}v^t\,{}_tp_y\,{}_tq_x={}_{d/}\ddot{a}_y-{}_{d/}\ddot{a}_{x:y}$$

Eremu jarraian

$$,_{d/}\bar{a}_{x/y}=\int_0^{d} {}_tE_{x:y}\mu_{x+t}\,{}_{d-t/}\bar{a}_{y+t}dt+\int_d^{\infty} {}_t\bar{E}_{x:y}\mu_{x+t}\bar{a}_{y+t}dt={}_{d/}\bar{a}_y-{}_{d/}\bar{a}_{x:y}$$

- Gerorapena aseguradunaren hiltzetik aurrera zenbatzen da eta beraz onuraduanren errentaren kobrantzataz dihardu. Beraz, aseguraduna edozein momentuan hil daiteke eta onuraduna errenta jasotzen hasiko da aseguraduna hil denetik *d* urte pasata. Errenta horren gaurko balio aktuariala honela kalkulatzen da,

$$,_{d*/}a_{x/y}=\sum_{t=1}^{\infty}v^{t+d}\,{}_{d+t}p_y\,{}_tq_x={}_dE_ya_{y+d}-{}_dE_ya_{x:y+d}={}_dE_ya_{x/y+d}$$

$$,_{d*/}\ddot{a}_{x/y}=\sum_{t=0}^{\infty}v^{t+d}\,{}_{d+t}p_y\,{}_tq_x={}_dE_y\ddot{a}_{y+d}-{}_dE_y\ddot{a}_{x:y+d}={}_dE_ya_{x/y+d}$$

Eremu jarraian

$$,_{d*/}\bar{a}_{x/y}=\int_o^{\infty} {}_t\bar{E}_{x:y}\mu_{x+t}\,{}_{d/}\bar{a}_{y+t}dt={}_dE_y\bar{a}_{y+d}-{}_dE_y\bar{a}_{x:y+d}$$

- Gerorapena aseguradunaren heriotzataz diahardu. Honek dakar onuraduna errenta jasoko duele aseguraduna hiltzen den momentuan eta heriotza kontratuaren sorreratik *d* urte pasata ematen bada. Gaurko balio aktuarila honako hau da,

$$_{d/,}a_{x/y} = {}_{d//}a_{x/y} = \sum_{t=d+1}^{\infty} v^t \,{}_t p_y \left({}_d p_x - {}_t p_x\right) = {}_d p_x \,{}_{d/}a_y - {}_{d/}a_{x:y}$$

$$_{d/,}\ddot{a}_{x/y} = {}_{d//}\ddot{a}_{x/y} = \sum_{t=d}^{\infty} v^t \,{}_t p_y \left({}_d p_x - {}_t p_x\right) = {}_d p_x \,{}_{d/}\ddot{a}_y - {}_{d/}\ddot{a}_{x:y} = {}_d p_x \,{}_{d/}a_y - {}_{d/}a_{x:y}$$

Eta kasu honetan, berehalako errentekin bezala ez dauka zentzurik aldez aurretik ordaintzen den errenta bat kontratatzea zeren lehenego terminoa ez da kobratuko.

Eremu jarraian

$$_{d/,}\bar{a}_{x/y} = \int_d^{\infty} {}_t \bar{E}_{x:y} \mu_{x+t} \bar{a}_{y+t} dt = {}_d p_x \,{}_{d/}\bar{a}_y - {}_{d/}\bar{a}_{x:y}$$

Biziraupen errenta baten n urteko denborazkotasunarekin ondorengo interpreta dezakegu:

- Denborazkotasuna kontratuaren sorreratik hasten da eta onuradunaren errenta kobratzataz dihardu. Kasu honetan onuraduna gehienez errenta jasoko du kontratuaren sorreratik n urte pasa direnerarte. Honekin esan nahi duguna da, aseguraduna n urte pasa baino lehen hil behar dela onuradunak terminuren bat kobratzeko. Gaurko balio aktuariala honako hau da,

$$_{,/n}a_{x/y} = \sum_{t=1}^{n} v^t \,{}_t p_y \,{}_t q_x = a_{y:\overline{n}|} - a_{x:y:\overline{n}|}$$

$$_{,/n}\ddot{a}_{x/y} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \,{}_t p_y \,{}_t q_x = \ddot{a}_{y:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:y:\overline{n}|} = {}_{,/n}a_{x/y} - {}_n E_{x/y}$$

Eremu jarraian

$$_{,/n}\bar{a}_{x/y} = \int_0^{n} {}_t E_{x:y} \mu_{x+t} \;\bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|} dt = \bar{a}_{y:\overline{n}|} - \bar{a}_{x:y:\overline{n}|}$$

- Denobroazkotasuna aseguraduna hiltzen den momentutik hasten da eta beraz, onuradunaren errentaren kobrantzataz dihardu. Esan nahi duena, aseguraduna edozein momentuan hil daitekeela eta onuraduna aseguradunaren heriotzetik aurrera errenta n urtez jasoko duela. Gaurko balio aktuariala honela kalkulatzen dugu,

$$_{,/n*}a_{x/y} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \,{}_t p_y \,{}_t q_x - \sum_{t=1}^{\infty} v^{t+n} \,{}_{t+n} p_y \,{}_t q_x = a_{y:\overline{n}|} - a_{x:y} + {}_n E_y a_{x:y+n}$$

$$_{,/n*}\ddot{a}_{x/y} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \,{}_t p_y \,{}_t q_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+n} \,{}_{t+n} p_y \,{}_t q_x = \ddot{a}_{y:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:y} + {}_n E_y \ddot{a}_{x:y+n}$$

Eremu jarraian

$$,_{/n*}\bar{a}_{x/y} = \int_o^\infty {}_t\bar{E}_{x:y}\mu_{x+t} \quad \bar{a}_{y+t:\overline{n}|} dt = \bar{a}_{y:\overline{n}|} - \bar{a}_{x:y} + {}_nE_y\bar{a}_{x:y+n}$$

- Denborazkotasuna aseguradunaren heriotzataz dihardu. Ekartzen duelarik onuraduna jasoko duela mugarik gabeko errenta bat aseguradunaren heriotzetik aurrera, heriotz hori kontratuaren sorreratik n urte barruko epearen barnean ematen bada. Kasu honetan gaurko balio aktuariala honela lortzen dugu,

$${}_{/n},a_{x/y} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_tp_y {}_tq_x + \sum_{t=n+1}^{\infty} v^t {}_tp_y {}_nq_x = a_y - a_{x:y:\overline{n}|} - {}_np_x {}_{n/}a_y$$

$${}_{/n},\ddot{a}_{x/y} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tp_y {}_tq_x + \sum_{t=n}^{\infty} v^t {}_tp_y {}_nq_x = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x:y:\overline{n}|} - {}_np_x {}_{n/}\ddot{a}_y$$

Eremu jarraian

$${}_{/n},\bar{a}_{x/y} = \int_0^n {}_t\bar{E}_{x:y}\mu_{x+t}\bar{a}_{y+t}dt = \bar{a}_y - \bar{a}_{x:y:\overline{n}|} - {}_np_x {}_{n/}\bar{a}_y$$

Biziraupen errenten kasu partikular bezala errenta kontingenteak aipa ditzakegu. Finantz erakude batekin prestamo eragiketa bat kontratatzen dugunean, erakunde hauek gehienetan eskatzen dute aseguru baten kontratua zeinetan heriotza suertatuz gero ordaintzeko geratzen diren terminuen ordainketa bermatzen den.
Errenta kontingentea bermatzen du denborazko errenta bat aseguradunaren heriotzetik aurrera.

n denbora amaitzen denerarte (kontratuaren sorreratik zenbatzen hasten da) aseguraduna hiltzen bada unitateko errenta baten ordainketaren gaurko balio aktuariala eremu diskretuan honela lotzen da,

$$a_{x/\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_tq_x = a_{\overline{n}|i} - a_{x:\overline{n}|}$$

Eremu jarraian,

$$\bar{a}_{x/\overline{n}|} = \int_0^n {}_t\bar{E}_x\mu_{x+t}\bar{a}_{\overline{n-t}|i}dt = \bar{a}_{\overline{n}|i} - \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

Baita azal dezakegu jada ikasitako biziraupen errenten terminuetan, adibidez,

$$a_{\overline{n}|/x} = a_x - a_{x:\overline{n}|} = {}_{n/}a_x$$

Orain azalduko ditugu hainbat biziraupen errenten erlazioa zeinetan bi pertsona baino gehiago parte hartzen duten,

$$a_{\overline{x_1 x_2}/y} = a_y - a_{x_1:y} - a_{x_2:y} + a_{x_1:x_2:y}$$

$$a_{x/\overline{y_1 y_2}} = a_{x/y_1} - a_{x/y_2} - a_{x/y_1:y_2}$$

$$a_{\overline{x\,\overline{n}|}/y} = a_y - a_{x:y} - a_{y:\overline{n}|} + a_{x:y:\overline{n}|} = {}_{n/}a_y - {}_{n/}a_{x:y} =, {}_{n/}a_{x/y}$$

Biziraupen errenta konposatuetan, aseguradun bezala, agertzen dira bi gizabanako edo gehiago eta ezartzen da onuraduna errenta jaso dezan eman beharreko heriotzen ordena.

$$a_{\overset{1}{x_1}:x_2/y} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\, {}_t p_y\, {}_{t-1/}q_{\overset{1}{x_1}:x_2}\, \ddot{a}_{y+t}$$

$$\bar{a}_{\overset{1}{x_1}:x_2/y} = \int_0^{\infty} {}_t\bar{E}_{x_1:x_2:y}\, \mu_{x_1+t}\, \bar{a}_{y+t}\, dt$$

$$a_{\overset{1}{x_1}:x_2/y} + a_{x_1:\overset{1}{x_2}/y} = a_{x_1:x_2/y}$$

$$a_{\overset{2}{x_1}:x_2/y} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\, {}_t p_y\, {}_{t-1/}q_{\overset{2}{x_1}:x_2}\, \ddot{a}_{y+t} = a_{x_1/y} - a_{\overset{1}{x_1}:x_2/y}$$

$$\bar{a}_{\overset{2}{x_1}:x_2/y} = \int_0^{\infty} (1 - {}_t p_{x_2})\, {}_t\bar{E}_{x_1:y}\, \mu_{x_1+t}\, \bar{a}_{y+t}\, dt$$

$$a_{\overset{2}{x_1}:x_2/y} + a_{x_1:\overset{2}{x_2}/y} = a_{\overline{x_1:x_2}/y}$$

5.6. BIZIRAUPEN ASEGURUAK

Aseguru mota bat da zeinetan kapital baten ordainketa bermatzen da, ezarritako gizabanako batek ego gehiagok bizirik irauten badute, aseguradun bat edo batzuen heriotza ematean.

x eta y adineko bi gizabanako hartuta, kapital unitate baten ordainketa x hiltzen den momentuan, hiltzen bada y bizirik egonda, haren gaurko balio aktuariala honela lortzen da,

$$\overline{A}_{\overset{1}{x}:y} \approx r^{1/2}\sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_{t-1/}q_{\overset{1}{x}:y}$$

$$\overline{A}_{\overset{1}{x}:y} = \int_0^{\infty} {}_t\overline{E}_{x:y}\,\mu_{x+t}\,dt$$

$$\overline{A}_{\overset{1}{x}:y} + \overline{A}_{x:\overset{1}{y}} = \overline{A}_{x:y}$$

Aurreko erlazioko kasu berezi bat aseguru mixto baten gaurko balio aktuariala da:

$$\overline{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} + \overline{A}_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \overline{A}_{x:\overline{n|}}$$

Unitateko kapitala x adineko gizabankoaren heriotzaren momentuan ematen bada, y adineko pertsona lehen hil delaren baldintzarekin,

$$\overline{A}_{\overset{2}{x}:y} \approx r^{1/2}\sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_{t-1/}q_{\overset{2}{x}:y} = \overline{A}_x - \overline{A}_{\overset{1}{x}:y}$$

$$\overline{A}_{\overset{2}{x}:y} = \int_0^{\infty} (1-{}_tp_y)\,{}_tE_x\,\mu_{x+t}\,dt = \overline{A}_x - \overline{A}_{\overset{1}{x}:y}$$

$$\overline{A}_{\overset{2}{x}:y} + \overline{A}_{x:\overset{2}{y}} = \overline{A}_{\overline{x:y}}$$

x, y, z adineko hiru pertsonatako taldea izanda, kalkula dezakegu ordaintzen den unitate kapital baten gaurko balio aktuariala x lehenengoa hiltzen bada,

$$\overline{A}_{\overset{1}{x}:y:z} \approx r^{1/2}\sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_{t-1/}q_{\overset{1}{x}:y:z}$$

$$\overline{A}_{\overset{1}{x}:y:z} = \int_0^{\infty} {}_t\overline{E}_{x:y:z}\,\mu_{x+t}\,dt$$

$$\overline{A}_{\overset{1}{x}:y:z} + \overline{A}_{x:\overset{1}{y}:z} + \overline{A}_{x:y:\overset{1}{z}} = \overline{A}_{x:y:z}$$

Kapital unitate baten gaurko balio aktuariala x bigarrengoa hiltzen bada,

$$\overline{A}_{\overset{2}{x}:y:z} \approx r^{1/2}\sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_{t-1/}q_{\overset{2}{x}:y:z}$$

$$\overline{A}_{\overset{2}{x}:y:z} = \int_0^{\infty} {}_t\overline{E}_x\,\mu_{x+t}\,({}_tq_y\,{}_tp_z + {}_tp_y\,{}_tq_z)\,dt = \overline{A}_{\overset{1}{x}:y} + \overline{A}_{\overset{1}{x}:z} - 2\overline{A}_{\overset{1}{x}:y:z}$$

Kapital unitate baten gaurko balio aktuariala x hirugarrengoa hiltzen bada,

$$\bar{A}^{\;3}_{x:y:z} \approx r^{1/2}\sum_{t=1}^{\infty} v^{t}\,{}_{t-1/}q^{\;3}_{x:y:z}$$

$$\bar{A}^{\;3}_{x:y:z} = \int_0^{\infty} {}_tq_y\,{}_tq_z\,{}_t\bar{E}_x\,\mu_{x+t}\,dt = \bar{A}_x - \bar{A}^{1}_{x:y} - \bar{A}^{1}_{x:z} + \bar{A}^{1}_{x:y:z}$$

$$\bar{A}^{\;3}_{x:y:z} + \bar{A}_{x:\overset{3}{y}:z} + \bar{A}_{x:y:\overset{3}{z}} = \bar{A}_{\overline{x:y:z}}$$

x, *y*, *z* adineko hiru gizabanakoen taldeak plantea dezaketen bestelako kasu batzuk

$$\bar{A}^{2\,1}_{x:y:z} = \int_0^{\infty} {}_tq_y\,{}_t\bar{E}_{x:z}\,\mu_{x+t}\,dt = \bar{A}^{1}_{x:z} - \bar{A}^{1}_{x:y:z}$$

$$\bar{A}^{2\,1}_{x:y:z} + \bar{A}^{1\,2}_{x:y:z} = \bar{A}_{\overset{1}{\overline{x:y}}:z}$$

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{y:z}} = \bar{A}^{1}_{x:y} + \bar{A}^{1}_{x:z} - \bar{A}^{1}_{x:y:z}$$

$$\bar{A}_{\overset{1}{\overbrace{x:y}}:z} = \bar{A}^{1}_{x:y:z} + \bar{A}_{x:\overset{1}{y}:z}$$

$$\bar{A}_{\overset{2}{\overbrace{x:y}}:z} = \bar{A}_{x:y} - \bar{A}_{\overset{1}{\overbrace{x:y}}:z}$$

$$\bar{A}_{\overset{2}{\overline{x:y}}:z} = \bar{A}^{2}_{x:z} + \bar{A}^{2}_{y:z} - \bar{A}_{\overset{2}{\overbrace{x:y}}:z}$$

6. GAIA

6. BALIOGABETASUNAREKIN ETA MENDEKOTASUNAREKIN ERLAZIONATUTAKO ERRENTAK ETA ASEGURUAK

6.1. EZAUGARRI OROKORRAK

Baliogabetasun eta ezintasun arriskuetan eragina izan dezake ez solik adina baizik eta baita istrupen inguruko faktoreak. Bizitzaren inguruko seguruen antzeko lege batzuk jarraitzen dituzte.

Legeak ezberdintzen ditu istripuen eta gaixotasunen seguruen artean baina ez du ezer zehazten baliogabetasunaren inguruan.

Plantea ditzazkegun geroratutako kapitalen mota ezberdinak, segun eta baliogabe edo pertsona aktibo batetaz abitzen garen ondorengoak dira

$${}_nE_x^i = v^n \, {}_np_x^i$$

$${}_nE_x^{aa} = v^n \, {}_np_x^{aa}$$

${}_nE_x^{ai} = v^n \, {}_np_x^{ai}$ kontuan izanda Schaertlin eta Galbrun adierazpenak hurrenez hurren.

$${}_nE_x^{ai} = {}_nE_x^i - {}_nE_x^{aa} + \frac{l_x}{l_x^{aa}}\left[{}_nE_x - {}_nE_x^i\right] = {}_nE_x - {}_nE_x^{aa} + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}\left[{}_nE_x - {}_nE_x^i\right]$$

$${}_nE_x^a = v^n \, {}_np_x^a = {}_nE_x^{aa} + {}_nE_x^{ai} = \frac{l_x}{l_x^{aa}}\, {}_nE_x - \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}\, {}_nE_x^i$$

Eszinbilitatearen propietatea,

${}_nE_x^i = {}_tE_x^i \, {}_{n-t}E_{x+t}^i$ propietatea betetzen du

${}_nE_x^{aa} = {}_tE_x^{aa} \, {}_{n-t}E_{x+t}^{aa}$ propietatea betetzen du.

${}_nE_x^{ai} = {}_tE_x^{aa} \, {}_{n-t}E_{x+t}^{ai} + {}_tE_x^{ai} \, {}_{n-t}E_{x+t}^i$ **ez** du propietatea betetzen.

${}_nE_x^a = {}_tE_x^{aa} \, {}_{n-t}E_{x+t}^a + {}_tE_x^{ai} \, {}_{n-t}E_{x+t}^i$ **ez** du propietatea betetzen.

$${}_nE_x^{aa} = {}_nE_x^a - {}_nE_x^{ai} = {}_tE_x^{aa}\left[{}_{n-t}E_{x+t}^a - {}_{n-t}E_{x+t}^{ai}\right] = {}_tE_x^{aa} \, {}_{n-t}E_{x+t}^{aa}$$

Geroratutako kapital guzti hauek ${}_nE_x$ -en porpietateak betezen dituzte zeren ${}_0E_x = 1$ eta ${}_\infty E_x = 0$ salbuespen bat kontuan izanda ${}_0E_x^{ai} = 0$ zeren x aktibo izanda, momento horretan baliogabetzeko probabilitatea nulua da.

Aurreko erlazioak betetzen dira $x+n \leq x_j$ betetzen den guztietan kontuan izanda x_j adierazten duela erretiro adina.

6.2. BALIOGABETASUNAREKIN ERLAZIONATUTAKO ERRENTEN BALIO AKTUARIALA

Baliogabea den gizabanakoak kontratatuko errentak

$$a_x^i = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_x^i \qquad {}_{d/}a_x^i = \sum_{t=d+1}^{\infty} {}_tE_x^i$$

$$a_{x:\overline{n}|}^i = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x^i \qquad {}_{d/}a_{x:\overline{n}|}^i = \sum_{t=d+1}^{d+n} {}_tE_x^i$$

Ez dauka zentzurik kontuan hartzea baliogabe baten gaineko errentak zeinetan haren adina $x \geq x_j$, zeren erretiro adinetik aurrera ez da ezberdintzen aktibo eta baliogabeen artean.

$x < x_j$ denerako ondorengo kasuak lortzen dira:

$$\|a\|_x^i = a_{x:\overline{x_j-x}|}^i + {}_{x_j-x}E_x^i \cdot a_{x_j} \qquad x < x_j$$

$${}_{d/}\|a\|_x^i = \begin{cases} {}_{d/}a_{x:\overline{x_j-x-d}|}^i + {}_{x_j-x}E_x^i \cdot a_{x_j} & x+d < x_j \\ {}_{x_j-x}E_x^i \cdot {}_{x+d-x_j/}a_{x_j} & x < x_j \leq x+d \end{cases}$$

$$\|a\|_{x:\overline{n}|}^i = \begin{cases} a_{x:\overline{n}|}^i & x+\mathrm{n} \leq x_j \\ a_{x:\overline{x_j-x}|}^i + {}_{x_j-x}E_x^i \cdot a_{x_j:\overline{x+n-x_j}|} & x < x_j < x+n \end{cases}$$

$${}_{d/}\|a\|_{x:\overline{n}|}^i = \begin{cases} {}_{d/}a_{x:\overline{n}|}^i & x+d+n \leq x_j \\ {}_{d/}a_{x:\overline{x_j-x-d}|}^i + {}_{x_j-x}E_x^i \cdot a_{x_j:\overline{x+d-x_j}|} & x+d < x_j < x+d+n \\ {}_{x_j-x}E_x^i \cdot {}_{x+d-x_j/}a_{x_j:\overline{n}|} & x < x_j \leq x+d \end{cases}$$

Hasieran aktiboa den pertsona batek kontratatutako errenta eta ordintzekoa aktibo jarraitzen duen heinean

$$a_x^{aa} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t E_x^{aa} \qquad {}_{d/}a_x^{aa} = \sum_{t=d+1}^{\infty} {}_t E_x^{aa}$$

$$a_{x:\overline{n}|}^{aa} = \sum_{t=1}^{n} {}_t E_x^{aa} \qquad {}_{d/}a_{x:\overline{n}|}^{aa} = \sum_{t=d+1}^{d+n} {}_t E_x^{aa}$$

Ez dauka zentzurik mugarik gabeko errentak kontsideratzea, bakarrik hitzegin dezakegu erretiro adinerarte mugatutako errentetaz.

<u>Hasieran aktiboa den pertsona batek kontratatutako errenta eta ordaintzekoa baliogabetasunetik aurrera, baliogabe bezala bizitzen den heinean</u>

$$a_x^{ai} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t E_x^{ai} \qquad {}_{d/}a_x^{ai} = \sum_{t=d+1}^{\infty} {}_t E_x^{ai}$$

$$a_{x:\overline{n}|}^{ai} = \sum_{t=1}^{n} {}_t E_x^{ai} \qquad {}_{d/}a_{x:\overline{n}|}^{ai} = \sum_{t=d+1}^{d+n} {}_t E_x^{ai}$$

Galbrun-en erlazioa kontuan hartuta:

$$a_x^{ai} = a_x - a_x^{aa} + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}\left(a_x - a_x^{i}\right)$$

$${}_{d/}a_x^{ai} = {}_{d/}a_x - {}_{d/}a_x^{aa} + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}\left({}_{d/}a_x - {}_{d/}a_x^{i}\right)$$

$$a_{x:\overline{n}|}^{ai} = a_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}^{aa} + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}\left(a_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}^{i}\right)$$

$${}_{d/}a_{x:\overline{n}|}^{ai} = {}_{d/}a_{x:\overline{n}|} - {}_{d/}a_{x:\overline{n}|}^{aa} + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}\left({}_{d/}a_{x:\overline{n}|} - {}_{d/}a_{x:\overline{n}|}^{i}\right)$$

Normalean pertsona bat baliogabetzeko denbora erretiro adinerarte hedatzen da.

<u>Gizabanako aktibo batek kontratatutako errenta eta ordaintzekoa bizirik irauten duen heinean</u>.

$$a_x^{a} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t E_x^{a} \qquad {}_{d/}a_x^{a} = \sum_{t=d+1}^{\infty} {}_t E_x^{a}$$

$$a_{x:\overline{n}|}^{a} = \sum_{t=1}^{n} {}_t E_x^{a} \qquad {}_{d/}a_{x:\overline{n}|}^{a} = \sum_{t=d+1}^{d+n} {}_t E_x^{a}$$

$$ {}_{d/n}a_x^a = \frac{l_x}{l_x^{aa}}\,{}_{d/}a_{x:\overline{n}|} - \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}\,{}_{d/}a^i_{x:\overline{n}|} $$

x_j adinetik aurrerta ez bada banatzen aktibo eta baliogabeen artean:

$$ \|a\|_x^a = {}_{/x_j - x}a_x^a + {}_{x_j - x}E_x^a \cdot a_{x_j} \qquad \text{non} \quad x < x_j $$

$$ {}_{/n}\|a\|_x^a = \left\{ \begin{array}{ll} a^a_{x:\overline{n}|} & \text{non} \;\; x + \text{n} \le x_j \\ a^a_{x:\overline{x_j - x}|} + {}_{x_j - x}E_x^a \cdot a_{x_j:\overline{x+n-x_j}|} & \text{non} \;\; x < x_j \le x + n \end{array} \right\} $$

$$ {}_{d/}\|a\|_x^a = \left\{ \begin{array}{ll} {}_{d/}a^a_{x:\overline{x_j - x - d}|} + {}_{x_j - x}E_x^a \cdot a_{x_j} & \text{non} \;\; x + d < x_j \\ {}_{x_j - x}E_x^a \cdot {}_{x+d-x_j/}a_{x_j} & \text{non} \;\; x < x_j \le x + d \end{array} \right\} $$

$$ {}_{d/n}\|a\|_x^a = \left\{ \begin{array}{ll} {}_{d/}a^{ai}_{x:\overline{n}|} & \text{non} \;\; x + d + n \le x_j \\ {}_{d/}a^{ai}_{x:\overline{x_j - x - d}|} + {}_{x_j - x}E_x^a \cdot a_{x_j:\overline{x+d+n-x_j}|} & \text{non} \; x + d < x_j < x + d + n \\ {}_{x_j - x}E_x^a \cdot {}_{x+d-x_j/}a_{x_j:\overline{n}|} & \text{non} \; x < x_j \le x + d \end{array} \right\} $$

6.3. BALIOGABETASUN ERRENTEN DENBORAKOTASUNA ETA GERORAKOTASUNA

Baliogabetasun errentetaz hitzegitean normalean erreferentzia egiten diegu hasieran aktibo den gizabanako batek kontratatutako errenta eta baliogabetasuna ematen denetik ordaintzekoa dena, baliogabe bezala bizitzen den heinean.

Baliogabetasun errentak gabealdiarekin: gabezia egoteak baliogabetasunerako gerorapen bat bezala har dezakegu, zeinetan, x adineko gizabanako batek baliogabetasun errentarako eskubidea izango du gutxienez aktibo moduan x+c adinerarte badago, c gabezia denboraldia izanda.

$$ {}_cE_x^{aa} \cdot a^{ai}_{x+c} $$

Gabezia denbora pasata, errenta izan daiteke geroratua, denborazkoa edo geroratua eta denborazko solik.

Kontsidera dezakegu baliogabetsaun errenta ezberdinak zeienetan nahasten diren gerorapen eta denborazko ezaugarri , baliogabetasun denboran eman daitezkeen murrizketa posibleak kontuan izanda. Ordainketaren gerorapenari dagokionez, kontsideratzen dugu hau bi modukoak izan daitezkeela: jatorriari buruz edo baliogabetasunaren momentuari buruz.

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako denbora mugagabearekin eta ordainketaren denborazkotasunarekin, denborazkotasuna baliogabetasunetik zenbatzen da,

$$_{,/n*}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot \ddot{a}_{x+t+1:\overline{n}|}^{i}$$

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako denbora mugagabearekin eta ordainketaren denborazkotasunarekin, denborazkotasuna kontratu jatorritik zenbatzen da.

$$_{,/n}a_x^{ai} = {}_{/n}a_{x:\overline{n}|}^{ai}$$

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako denbora mugagabearekin eta ordainketaren gerorapenarekin, gerorapena baliogabetasunetik zenbatzen da.

$$_{,d*/}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{d/}\ddot{a}_{x+t+1}^{i} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot \left[\ddot{a}_{x+t+1}^{i} - {}_{/d}\ddot{a}_{x+t+1}^{i}\right] = a_x^{ai} - {}_{,/d*}a_x^{ai}$$

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako denbora mugagabearekin eta ordainketaren gerorapenarekin, gerorapena kontratu jatorritik zenbatzen da.

$$_{,d/}a_x^{ai} = {}_{d/}a_x^{ai}$$

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako denbora mugagabearekin eta ordainketaren gerorapenarekin eta denborazkotasunarekin, gerorapena eta denborazkotasuna baliogabetasunetik zenbatzen da.

$$_{,d*/n*}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{d/}\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n}|}^{i}$$

$$_{,d*/n*}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot \left[{}_{d/}\ddot{a}_{x+t+1}^{i} - {}_{d+n/}\ddot{a}_{x+t+1}^{i}\right] = {}_{,d*/}a_x^{ai} - {}_{,d+n*/}a_x^{ai} = {}_{,/d+n*}a_x^{ai} - {}_{,/d*}a_x^{ai}$$

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako denbora mugagabearekin eta ordainketaren gerorapenarekin eta denborazkotasunarekin, gerorapena kontratu jatorritik zenbatzen da eta denborazkotasuna lehenengo ordainketa egiten de momentutik.

.

$$ {}_{,d/n*}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{d-1} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{d-t/}\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n}|} + \sum_{t=d}^{\infty} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot \ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n}|} = {}_dE_x^{ai} \cdot a^{i}_{x+d:\overline{n}|} + {}_dE_x^{aa} \, {}_{,/n*}a_{x+d}^{ai} $$

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako denbora mugagabearekin eta ordainketaren gerorapenarekin eta denborazkotasunarekin, gerorapena eta denborazkotasuna kontratu jatorritik zenbatzen da.

$$ {}_{,d/n}a_x^{ai} = {}_{d/}a^{ai}_{x:\overline{n}|} $$

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako denborazkotasuna izanda

$$ {}_{/m,}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot \ddot{a}^{i}_{x+t+1} = a^{ai}_{x:\overline{m}|} + {}_mE_x^{ai} \cdot a^{i}_{x+m} $$

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako eta ordainketarako denborazkotasuna izanda, ordainketaren denborazkotasuna baliogabetasunetik zenbatzen hasten da.

$$ {}_{/m,/n*}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot \ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n}|} $$

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako eta ordainketarako denborazkotasuna izanda, ordainketaren denborazkotasuna kontratu jatorritik zenbatzen hasten da.

$$ {}_{/m,/n}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot \ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} = a^{ai}_{x:\overline{m}|} + {}_mE_x^{ai} \cdot a^{i}_{x+m:\overline{n-m}|} $$

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako denborazkotasuna izanda eta gerorapena ordainketan, gerorapena kontsideratzen da baliogabetasun momentuari dagokionez .

$$ {}_{/m,d*/}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{d/}\ddot{a}^{i}_{x+t+1} = {}_{/m,}a_x^{ai} - {}_{/m,/d*}a_x^{ai} $$

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako denborazkotasuna izanda eta gerorapena ordainketan, gerorapena jatorritik

$$ {}_{/m,d/}a_x^{ai} = {}_{d/}a^{ai}_{x:\overline{m-d}|} + {}_mE_x^{ai} \cdot a^{i}_{x+m} \quad \text{non } m > d $$

$$ {}_{/m,d/}a_x^{ai} = {}_mE_x^{ai} \cdot {}_{d-m/}a^{i}_{x+m} \quad \text{non } m < d $$

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako denborazkotasuna izanda eta gerorapena eta denborazkotasuna ordainketan, gerorapena eta denborazkotasuna baliogabetasun momentutik zenbatzen da.

$$_{/m,d*/n*}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{d/}\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n}|} = {}_{/m,d*/}a_x^{ai} - {}_{/m,d+n*/}a_x^{ai} = {}_{/m,/d+n*}a_x^{ai} - {}_{/m,/d*}a_x^{ai}$$

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako denborazkotasuna izanda eta gerorapena eta denborazkotasuna ordainketan, gerorapena baliogabetasun momentutik zenbatzen da .

$$_{/m,d*/n}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{d/}\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-d-t-1}|}$$

Baliogabetasun errenta baliogabetasunerako denborazkotasuna izanda eta gerorapena eta denborazkotasuna ordainketan, gerorapena jatorritik zenbatzen da eta denborazkotasuna lehenengo ordainketa egiten den momentutik .

$m > d$ denean

$$_{/m,d/n*}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{d-1} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{d-t/}\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n}|} + \sum_{t=d}^{m} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot \ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n}|}$$

$$_{/m,d/n*}a_x^{ai} = {}_dE_x^{ai} \cdot a^{i}_{x+d:\overline{n}|} + {}_dE_x^{aa}\ {}_{/m-d,/n*}a_{x+d}^{ai}$$

$m < d$ denean

$$_{/m,d/n*}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{d-t/}\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n}|} = {}_mE_x^{ai}\ {}_{d-m/}a^{i}_{x+m:\overline{n}|}$$

Baliogabetasun eerenta baliogabetasunean denborazkotasunarekin eta gerorapena eta denborazkotasuna ordainketan, gerorapena eta denborazkotasuna jatorritik zenbatzen da.

$d < m < d + n$ denean

$$_{/m,d/n}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{d-1} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{d-t-1/}\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n}|} + \sum_{t=d}^{m} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot \ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{d+n-t}|}$$

$$_{/m,d/n}a_x^{ai} = {}_{d/}a^{ai}_{x:\overline{m-d}|} + {}_mE_x^{ai} \cdot a^{i}_{x+m:\overline{d+n-m}|}$$

$m < d$ denean

$$_{/m,d/n}a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{d-t-1/}\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n}|}$$

6.4. BALIOGABESTASUNAREKIN ERLAZIONATUTAKO ASEGURUEN GAURKO BALIO AKTUARIALA

Atal honetan aztertzen dugu baliogabe pertsona baten heriotza dela medio ordaintzeko dauden aseguruak, aktiboa baten heriotza dela medio bai aktibo edota bai baliogabe moduan ordaintzeko dauden aseguruak eta zehazki baliogabetasun aseguruak deiturikoak, ordaintzekoak hasieran aktibo den pertsona bat baliogabetzean.

<u>Baliogabe pertsona baten heriotza dela medio ordaintzeko dauden aseguruak</u>

$$A_x^i = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \,{}_{t-i/}q_x^i \qquad {}_{d/}A_x^i = \sum_{t=d+1}^{\infty} v^t \,{}_{t-1/}q_x^i$$

$$A^i_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \,{}_{t-1/}q_x^i \qquad {}_{d/}A^i_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = \sum_{t=d+1}^{d+n} v^t \,{}_{t-1/}q_x^i$$

Erretiro adinetik aurrera ez da ezberdintzen aktibo eta baliogabeen artean.
$x < x_j$ denerako ondorengo kasuak lortzen ditugu:

$$\|A\|_x^i = A^i_{\overset{1}{x:\overline{x_j-x}|}} + {}_{x_j-x}E_x^i \cdot A_{x_j} \qquad x < x_j \ \text{denerako}$$

$${}_{d/}\|A\|_x^i = \begin{cases} {}_{d/}A^i_{\overset{1}{x:\overline{x_j-x-d}|}} + {}_{x_j-x}E_x^i \cdot A_{x_j} & x+d < x_j \longleftarrow \textit{denerako} \\ {}_{x_j-x}E_x^i \cdot {}_{x+d-x_j/}A_{x_j} & x < x_j \le x+d \longleftarrow \textit{denerako} \end{cases}$$

$${}_{/n}\|A\|_x^i = \begin{cases} A^i_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} & x+\mathrm{n} \le x_j \longleftarrow \textit{denerako} \\ A^i_{\overset{1}{x:\overline{x_j-x}|}} + {}_{x_j-x}E_x^i \cdot A_{\overset{1}{x_j:\overline{x+n-x_j}|}} & x < x_j < x+n \longleftarrow \textit{denerako} \end{cases}$$

$${}_{d/n}\|A\|_x^i = \begin{cases} {}_{d/}A^i_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} & x+d+n \le x_j \longleftarrow \textit{denerako} \\ {}_{d/}A^i_{\overset{1}{x:\overline{x_j-x-d}|}} + {}_{x_j-x}E_x^i \cdot A_{\overset{1}{x_j:\overline{x+d+n-x_j}|}} & x+d < x_j < x+d+n \longleftarrow \textit{denerako} \\ {}_{x_j-x}E_x^i \cdot {}_{x+d-x_j/}A_{\overset{1}{x_j:\overline{n}|}} & x < x_j \le x+d \longleftarrow \textit{denerako} \end{cases}$$

<u>Aktibo moduan hiltzen delako ordaintzen den asegurua hasieran aktibo moduan egonda</u>

$$A_x^{aa} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \,{}_{t-1/}q_x^{aa} \qquad {}_{d/}A_x^{aa} = \sum_{t=d+1}^{\infty} v^t \,{}_{t-1/}q_x^{aa}$$

$$A^{aa}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \,{}_{t-1/}q^{aa}_x \qquad {}_{d/}A^{aa}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = \sum_{t=d+1}^{d+n} v^t \,{}_{t-1/}q^{aa}_x$$

<u>Baliogabe moduan hiltzen delako ordaintzen den asegurua hasieran aktibo moduan egonda</u>

$$A^{ai}_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \,{}_{t-1/}q^{ai}_x \qquad {}_{d/}A^{ai}_x = \sum_{t=d+1}^{\infty} v^t \,{}_{t-1/}q^{ai}_x$$

$${}_{/n}A^{ai}_x = \sum_{t=1}^{n} v^t \,{}_{t-1/}q^{ai}_x \qquad {}_{d/n}A^{ai}_x = \sum_{t=d+1}^{d+n} v^t \,{}_{t-1/}q^{ai}_x$$

Kasu hauetan suposatzen dugu gerorapena eta denborazkotasuna baliogabetasunerako eta heriotzarako berdina dela..

Galbrun-en erlazioa erabilita:

$${}_{d/}A^{ai}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = {}_{d/}A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} - {}_{d/}A^{aa}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} + \frac{l^{ii}_x}{l^{aa}_x}\left({}_{d/}A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} - {}_{d/}A^{i}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} \right)$$

<u>Hasieran aktiboa den pertsona baten heriotzarengatik ordaintzen den asegurua</u>.

$$A^{a}_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \,{}_{t-1/}q^{a}_x \qquad {}_{d/}A^{a}_x = \sum_{t=d+1}^{\infty} v^t \,{}_{t-1/}q^{a}_x$$

$$A^{a}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \,{}_{t-1/}q^{a}_x \qquad {}_{d/}A^{a}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = \sum_{t=d+1}^{d+n} v^t \,{}_{t-1/}q^{a}_x$$

Seguru hauen kalkuluetarako ondorengo erlazio hauek ere erabiltzen ditugu:

$${}_{d/}A^{a}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = \frac{l_x}{l^{aa}_x}\,{}_{d/}A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} - \frac{l^{ii}_x}{l^{aa}_x}\,{}_{d/}A^{i}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}$$

Seguru hauek ez dute zentzurik $\geq x_j$ denean; beste kasu batean:

$$\|A\|^a_x = {}_{/x_j-x}A^a_x + {}_{x_j-x}E^a_x \cdot A_{x_j} \qquad \text{non} \quad x < x_j$$

$${}_{/n}\|A\|^a_x = \begin{cases} {}_{/n}A^a_x & \text{non} \quad x + \mathrm{n} \leq x_j \\ {}_{/x_j-x}A^a_x + {}_{x_j-x}E^a_x \cdot {}_{/x+n-x_j}A_{x_j} & \text{non} \quad x < x_j \leq x + n \end{cases}$$

$$ {}_{d/}\|A\|_x^a = \begin{Bmatrix} {}_{d/x_j-x-d}A_x^a + {}_{x_j-x}E_x^a \cdot A_{x_j} & \text{non } x+d < x_j \\ {}_{x_j-x}E_x^a \cdot {}_{x+d-x_j/}A_{x_j} & \text{non } x < x_j \le x+d \end{Bmatrix} $$

$$ {}_{d/n}\|A\|_x^a = \begin{Bmatrix} {}_{d/n}A_x^a & \text{non } x+d+n \le x_j \\ {}_{d/x_j-x-d}A_x^a + {}_{x_j-x}E_x^a \cdot {}_{/x+d+n-x_j}A_{x_j} & \text{non } x+d < x_j < x+d+n \\ {}_{x_j-x}E_x^a \cdot {}_{x+d-x_j/n}A_{x_j} & \text{non } x < x_j \le x+d \end{Bmatrix} $$

<u>Baliogabe bihurtzeagatik ordiantzen den asegurua, hasieran aktibo izanda</u>.

Bi kasu kontuna hartuko ditugu:
Asegurua bakarrik ordainduko da baliogabe bihurtu den gizabanakoa bizirik iristen bada baliogabetasuna eman den momentuaren amaiera rarte.

$$ (A')_x^{ai} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_{t-1}p_x^{aa} \, p_{x+t-1}^{ai} $$

Asegurua ordainduko da hasieran aktiboa den pertsoaren baliogabetasun momentuan:

$$ (A)_x^{ai} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_{t-1}p_x^{aa} \, i_{x+t-1} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_{t-1}p_x^{aa} (1 - p_{x+t-1}^{aa} - q_{x+t-1}^{aa}) = v\ddot{a}_x^{aa} - a_x^{aa} - A_x^{aa} $$

Bi kasu hauek soilik eremu diskretuan plateatzen dira eta ezberdintasuna ez da agertzen seguraren ordainketa eremu jarraian erabiltzean.

$$ (A)_x^{ai} = v\ddot{a}_x^{aa} - a_x^{aa} - A_x^{aa} = v\left[1 - ia_x^{aa}\right] - A_x^{aa} $$

$$ {}_{d/}(A)_x^{ai} = v \, {}_{d/}\ddot{a}_x^{aa} - {}_{d/}a_x^{aa} - {}_{d/}A_x^{aa} = v\left[{}_{d}E_x^{aa} - i \, {}_{d/}a_x^{aa}\right] - {}_{d/}A_x^{aa} $$

$$ {}_{/n}(A)_x^{ai} = v \, {}_{/n}\ddot{a}_x^{aa} - {}_{/n}a_x^{aa} - {}_{/n}A_x^{aa} = v\left[1 - {}_{n}E_x^{aa} - i \, {}_{/n}a_x^{aa}\right] - {}_{/n}A_x^{aa} $$

$$ {}_{d/n}(A)_x^{ai} = v \, {}_{d/n}\ddot{a}_x^{aa} - {}_{d/n}a_x^{aa} - {}_{d/n}A_x^{aa} = v\left[{}_{d}E_x^{aa} - {}_{d+n}E_x^{aa} - i \, {}_{d/n}a_x^{aa}\right] - {}_{d/n}A_x^{aa} $$

6.5. BALIOGABETASUN ASEGURUEN DENBORAKOTASUNA ETA GERORAKOTASUNA

Aktibo moduan hasten den eta baliogabe moduan hiltzean ordaintzen diren aseguruak, baliogabetasunean gabealdia ezarriz: gabeziaren existentzia kontsidera daiteke balioabetasunak bete beharreko gerorapen bat bezala , orduan, x adineko pertsona batek, gutxienez $x+c$ adinerarte aktibo moduan egon behar da , c gabezia denbora izanda.

$$_{c}E_{x}^{aa} \cdot A_{x+c}^{ai}$$

Gabezia denbora pasata asegurua izan daiteke geroratua, denborazkotasunarekin edo geroratua eta denborazkotasunarekin. Era horretan aseguruaren ezaugarriak gerorapena eta denborazkotasunari dagokionez, ez dira kontratazio denborari buruz baizik eta gabezia denboraren amaierari buruz.

Kontsidera dezakegu aktibo moduan hasten den eta baliogabe moduan hiltzean ordaintzen diren seguruen sailkapen bat nahasten direnean heriotzen gerorapen eta denborazkotasun ezaugarriak, baliogabetasun denboraldian eman daitezkeen murrizketekin.

Heriotzen gerorapenari dagokionez, kontuan hartzen dugu bi motatako izan daitekeela: jatorriarekiko edo baliogabetasun momentuarekiko.

Ondorengo kasuak aurkezten ditugu:

Hasieran aktiboa den pertsona bat baliogabe moduan hiltzean ordaintzen den asegurua, baliogabe denbora mugagabearekin eta heriotzarako denborazkotasunarekin, denborazkotasuna baliogabetasun momentutik zenbatzen hasten da.

$$_{,/n*}A_{x}^{ai} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t}E_{x}^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{/n}A_{x+t+1}^{i}$$

Hasieran aktiboa den pertsona bat baliogabe moduan hiltzean ordaintzen den asegurua, baliogabe denbora mugagabearekin eta heriotzarako denborazkotasunarekin, denborazkotasuna jatorritik zenbatzen hasten da.

$$_{,/n}A_{x}^{ai} = {}_{/n}A_{x}^{ai}$$

Hasieran aktiboa den pertsona bat baliogabe moduan hiltzean ordaintzen den asegurua, baliogabe denbora mugagabearekin eta heriotzarako gerorapenarekin, gerorapena baliogabetasun momentutik zenbatzen hasten da.

$$_{,d*/}A_{x}^{ai} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t}E_{x}^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{d/}A_{x+t+1}^{i} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t}E_{x}^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot \left[A_{x+t+1}^{i} - {}_{/d}A_{x+t+1}^{i}\right] = A_{x}^{ai} - {}_{,/d*}A_{x}^{ai}$$

Hasieran aktiboa den pertsona bat baliogabe moduan hiltzean ordaintzen den asegurua, baliogabe denbora mugagabearekin eta heriotzarako gerorapenarekin, gerorapena jatorritik zenbatzen hasten da.

$$_{,d/}A_x^{ai} = {}_{d/}A_x^{ai}$$

Hasieran aktiboa den pertsona bat baliogabe moduan hiltzean ordaintzen den asegurua, baliogabetasunean denborazkotasuna izanda.

$$_{/m,}A_x^{ai} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot A_{x+t+1}^{i} = {}_{/m}A_x^{ai} + {}_mE_x^{ai} \cdot A_{x+m}^{i}$$

Hasieran aktiboa den pertsona bat baliogabe moduan hiltzean ordaintzen den asegurua, baliogabetasunean denborazkotasuna izanda eta heriotzarako gerorapena izanda jatorriarekiko.

$$_{/m,d/}A_x^{ai} = {}_{d/m-d}A_x^{ai} + {}_mE_x^{ai} \cdot A_{x+m}^{i} \quad \text{non } m > d$$

$$_{/m,d/}A_x^{ai} = {}_mE_x^{ai} \cdot {}_{d-m/}A_{x+m}^{i} \qquad \text{non } m < d$$

Hasieran aktiboa den pertsona bat baliogabe moduan hiltzean ordaintzen den asegurua, baliogabetasunean denborazkotasuna izanda eta heriotzarako gerorapena eta denborazkotasuna izanda jatorriarekiko.

$d < m < d + n$ denerako

$$_{/m,d/n}A_x^{ai} = \sum_{t=0}^{d-1} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{d-t/n}A_{x+t+1}^{i} + \sum_{t=d}^{m} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{/d+n-t}A_{x+t+1}^{i}$$

$$_{/m,d/n}A_x^{ai} = {}_{d/m-d}A_x^{ai} + {}_mE_x^{ai} \; {}_{/d+n-m}A_{x+m}^{i} = {}_dE_x^{ai} \; {}_{/n}A_{x+d}^{i} + {}_dE_x^{aa}\left[{}_{/m-d,}A_{x+d}^{ai} - {}_{/m-d,d+n/}A_{x+d}^{ai}\right]$$

$m < d$ denerako

$$_{/m,d/n}A_x^{ai} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_tE_x^{aa} \cdot E_{x+t}^{ai} \cdot {}_{d-t/n}A_{x+t+1}^{i} = {}_{/m,d/n*}A_x^{ai}$$

BIBLIOGRAFIA

Oinarrizko bibliografia

Alegre, A. (1990). *Valoración actuarial de prestaciones relacionadas con la invalidez*. Edicions Universitat de Barcelona. Barcelona.

Ayuso, M., Corrales, H., Guillén, M., Pérez-Marín, A.M. eta Rojo J.L. (2006). *Estadística actuarial vida*. Edicions Universitat de Barcelona.

BOE 174 zk (2012/07/21). *Resolución de 6 de julio de 2012 de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones.*

BOE 244 zk (2000/10/11). *Resolución de 3 de octubre de 2000 de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones.*

Haberman, S. eta Pitacco, E. (1999). *Actuarial models for disability insurance.* Cahpman & Hall/CRC Press LLC. United States of America.

Lopez Cachero, M. eta Lopez de la Manzanara, J. (1996). *Estadística para actuarios*. Fundación Mapfre Estudios. Madrid.

Palacios, H. E. (1996). *Introducción al cálculo actuarial*. Ed. Mapfre. Madrid.

Pérez Hernandez, A. (2004). *Aplicación de las nuevas tecnologías a la previsión social y seguros de vida, utilizando métodos de estadística actuarial.* CD-ROM. Universidad Complutense de Madrid. Madrid.

Vegas Perez, A. (1981). *Estadística, Aplicaciones Econométricas y Actuariales.* Ed. Pirámide. Madrid.

Gehigarrizko Bibliografia

Bowers, N.L., Gerber, H.G., Hickman, J.C., Jones, D.A. eta Nesbitt, C.J. (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries. Itasca, Illinois.

Gerber, H.U., (1997). *Life Insurance Mathematics.* Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg and Swiss Association of Actuaries Zürich.

Jordan, C.W. (1991). *Life Contingencies*. The Society of Actuaries. Chicago.

Lasheras, A. (1948). *Matemática del seguro*. Ed. Dossat. Barcelona.

Legina, J. (1989). *Fundamentos de demografía*. Siglo XXI. Madrid.

Levi, E. (1973). *Curso de matemática financiera y actuarial, volumen II*. Editorial Bosch. Barcelona.

Pavía, J.M. (2010). *101 ejercicios resueltos de estadística actuarial vida*. Ibergarceta plublicaciones. España.

Internet

www.aktuarioak.org
www.actuarios.org