6.6. Problemak

1. Ebatzi sistema hau Newtonen metodoaz, $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 0.5, 0.5)$ hartuz:

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ f_2(x,y,z) &= 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ f_3(x,y,z) &= 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{aligned}$$

   Baldin $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$ bada, bukatu iteratzeko prozesua $\|\boldsymbol{f}(x,y,z)\|_\infty < 6 \cdot 10^{-5}$ denean.

2. Ebatzi sistema hau Newtonen metodoaz, $(x_0, y_0) = (2, 3)$ hartuz:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ f_2(x,y) &= e^{x-1} - y^3 - 2 = 0. \end{aligned}$$

   Baldin $\boldsymbol{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ bada, bukatu iteratzeko prozesua $\|\boldsymbol{f}(x,y)\|_\infty < 10^{-4}$ denean.

3. Izan bedi sistema hau:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 - y - 0.2 = 0 \\ f_2(x,y) &= y^2 - x - 0.3 = 0. \end{aligned}$$

   Ebatzi sistema hori Newtonen metodoaz, $(x_0, y_0) = (1.2, 1.2)$ hartuz; egin bi iterazio bakarrik. Orain $(x_0, y_0) = (-0.2, -0.2)$ hartu eta egin Newtonen metodoaren lehenengo bi iterazioak.

4. Kalkulatu bigarren eta hirugarren problemen sistemetarako diferentzia finituzko Newtonen metodoaren lehenengo bi iterazioak.

5. Kalkulatu bigarren eta hirugarren problemen sistemetarako Broydenen metodoaren lehenengo bi iterazioak.

6. Kalkulatu Broydenen metodoaren lehenengo bi iterazioak sistema honetarako:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x_1 + x_2 - 3 &= 0 \\ f_2(x,y) &= x_1^2 + x_2^2 - 9 &= 0, \end{aligned}$$

   $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)^t = (2, 7)^t$ eta $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0)$ hartuz. Zein da $\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\|$ zehaztasuna? Eta errorea (hots, $\|(f_1(\boldsymbol{x}_2), f_2(\boldsymbol{x}_2))\|$)?

7. Kalkulatu bigarren eta hirugarren problemen sistemetarako norabide azkarreneko metodo globalaren lehenengo bi iterazioak.

8. Izan bedi sistema hau:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ f_2(x,y) &= xy - 1 = 0. \end{aligned}$$

(a) Egiaztatu $(1,1)$ eta $(-1,-1)$ sistema horren soluzioak direla.

(b) Zelako arazoak ager daitezke Newtonen metodoa aplikatzen saiatzen bagara soluzio horiek kalkulatzeko?

9. Aurkitu sistema ez-lineal hauen soluzio bat, Newtonen metodoa erabiliz.

$$\begin{array}{ll} (a) & x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0, \\ & x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0; \qquad \text{hartu} \quad (x_0, y_0) = (1.2, 1.2). \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (b) & 3x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ & 3x_1 x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0; \qquad \text{hartu} \quad (x_0, y_0) = (0.5, 0.5). \end{array}$$

Ebatzi sistema horiek Newtonen metodoaz eta bukatu $\|\boldsymbol{f}(x,y)\|_\infty < 10^{-3}$ denean. Sistema bakoitzean, zenbat iterazio erabili ditugu? Zein da zehaztasun erlatiboa? Zein da konbergentziaren ordena?

Ebatzi (a) eta (b) sistemak Broydenen metodoaz eta bukatu $\|\boldsymbol{f}(x,y)\|_\infty < 10^{-3}$ denean. Sistema bakoitzean, zenbat iterazio erabili ditugu? Zein da zehaztasun erlatiboa? Zein da konbergentziaren ordena?

10. Izan bedi $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, non $r_i = e^{t_i x} - y_i$, $i = 1,2,3,4$, eta $f(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}(x)^t \boldsymbol{r}(x)$, non datu hauek baititugu:

$$(t_1, y_1) = (1,2) \quad (t_2, y_2) = (2,4) \quad (t_3, y_3) = (3, \cdot),$$

hots, y_3-ren balioak eta x_0 hasierako puntuak balio hauek baitituzte:

(a) $y_3 = 8$ eta $x_0 = 1$;

(b) $y_3 = -1$ eta $x_0 = 0$;

Ebatzi problema hau (a) eta (b) kasuetan, Newtonen metodoaz eta Gauss-Newtonen metodoaz. Egin lehenengo bi iterazioak bakarrik. Zer gertatzen da kasu bakoitzean? Zergatik?